الجبر الخطي

مقدمة

قبل الدخول في تعريف فضاء المتجهات وما يتعلق به من مواضيع نحتاج الى النقاط الآتية

أولاً تعريف الزمرة

لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن $*$ عملية ثنائية معرفة عليها فإن الثنائي $(S,*)$ يسمى زمرة إذا وفقط اذا توفرت الشروط الآتية

١- الخاصية التجميعية $a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall a,b,c \in S$

2- وجود العنصر المحايد

$$\exists e \in S \ni e*a = a*e \quad \forall a \in S$$

3- وجود نظير العناصر

$$\forall a \in S, \ \exists b \in S \ni a*b = b*a = e.$$

وبهذه الحالة يرمز للعنصر النظير بـ a^{-1}

ملاحظة

مرادنا من العملية الثنائية هي داله معرفة بالشكل الآتي $*: S \times S \longrightarrow S$.

أمثلة

١- اذا كانت $\mathbb{Z}$ مجموعة الاعداد الصحيحة فان $(\mathbb{Z},+)$ تكون زمرة لكن $(\mathbb{Z},\cdot)$ ليست زمرة وذلك لعدم وجود نظير للعنصر $0 \in \mathbb{Z}$.

مثال 2 اذا كانت R مجموعة الاعداد الحقيقية فإن $(R,+)$ تكون زمرة

مثال 3 اذا كانت S مجموعة المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والعناصر المأخوذة من مجموعة الاعداد الصحيحة فأن S زمرة تحت عملية جمع المصفوفات .

تعريف
اذا كانت $(S,*)$ زمرة فيقال بأنها تبادلية اذا وفقط اذا كان $\forall a,b\in S \quad a*b=b*a$

ملاحظة
جميع الزمر التي ذكرت في الامثلة السابقة هي زمر تبادلية.

ثانيا

تعريف
لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن كل من $*$ ، $\#$ عملية ثنائية معرفة على S فان الثلاثي $(S,*,\#)$ يسمى حقلاً اذا وفقط اذا توفرت الشروط الاتية

1- $(S,*)$ زمرة تبادلية
2- $(S-\{0\},\#)$ زمرة تبادلية حيث $0\in S$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$
3- $\forall a,b,c\in S \quad a\#(b*c)=(a\#b)*(a\#c)$
وهذه الخاصية تسمى خاصية التوزيع .

مثال / الثلاثي $(R,+,\cdot)$ هو حقل ويسمى حقل الاعداد الحقيقية .

ملاحظة يرمز للعنصر المحايد بالنسبة للعملية الاولى $*$ بالرمز 0 ويرمز للعنصر المحايد بالنسبة للعملية الثانية $\#$ بالرمز I وذلك في اي حقل من الحقول $(F,*,\#)$.

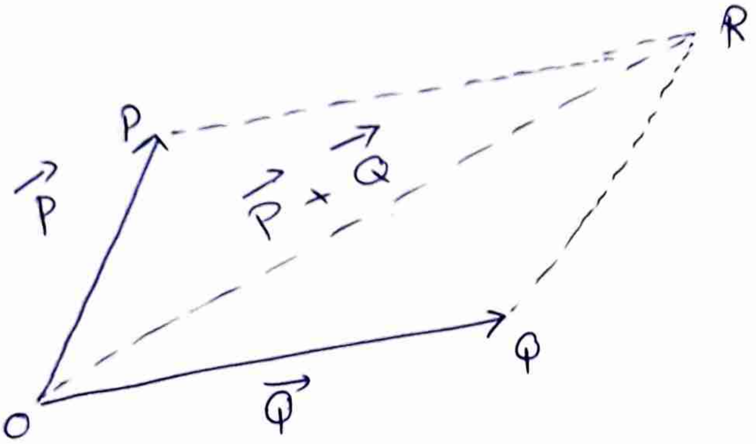
ثالثاً

١- في المستوي والفراغ يمكن وصف اي متجه على انه زوج مرتب من النقاط (P, Q) وهذا يمثل متجه من P الى Q ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{PQ}$ بهذه الحالة تسمى P نقطة البداية و Q نقطة النهاية

٢- يقال بأن المتجهين متساويان اذا تساويا في الطول وكان لهما نفس الاتجاه .

3- المتجهات التي تمثل القوى في الفيزياء يمكن جمعها لتنتج قوة جديدة تسمى محصلة القوى وذلك كالآتي

لو كان لدينا متجهان $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{Q}$ (تم ترميز $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{Q}$ للمتجه باعتبار ان هذه المتجهات تبدأ من نقطة الاصل O وللاختصار تم حذف O من رمز المتجه) فإن جمعهما كما مبين بالشكل ادناه



اي اننا نكمل متوازي الاضلاع الناشئ من النقاط الثلاث O P Q ونرمز للراس الرابع بـ R ثم نضع $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{R}$.

٤- تظهر في بعض الاحيان متجهات نقطة بدايتها ليست عند نقطة الاصل ولايجاد احداثيات متجه A نقطه بدايته هي $P_1(x_1, y_1)$ ونقطة $P_2(x_2, y_2)$ فإننا نكون متجهاً مساوياً نقطة بدايته عند نقطة الاصل . ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{Q}$ بحيث ان احداثيات النقطه Q هي (a, b) بحيث ان $a = x_2 - x_1$ و $b = y_2 - y_2$.

فضاء المتجهات

تعريف: نقول ان مجموعة V هي فضاء متجهات على F اذا كانت تحقق ما يلي

1- (خاصية الانغلاق على عملية الجمع)

$$\forall A, B \in V \rightarrow A + B \in V$$

2- (الخاصية التجميعية لعملية الجمع) اذا كان $A, B, C \in V$

فأن $A + (B + C) = (A + B) + C$

3- (خاصية المحايد الجمعي) يوجد متجه وحيد 0 يسمى المتجه الصفري يحقق $A + 0 = A$ لكل A في V

4- $A + B = B + A$ لكل زوج من المتجهات A و B (القانون الابدالي)

5- لكل متجه A في V يوجد متجه $-A$ في V يحقق $A + (-A) = 0$

6- (خاصية الانغلاق لعملية الضرب بعدد) اذا كان $A \in V$ و $x \in F$ فأن $xA \in V$

7- $x(A + B) = xA + xB$ لكل زوج من المتجهات A و B ولكل عدد x في F.

8- $(x + y)A = xA + yA$ لكل متجه A ولكل زوج من العناصر x, y في F.

9- $(xy)A = x(yA)$ لكل متجه A ولكل زوج من العناصر x, y في F.

10- $1.A = A$ لكل متجه A في V.

ملاحظة: ان عناصر الحقل F تسمى اعداداً قياسية.

أمثلة متنوعة على فضاء المتجهات

١- لتكن V مجموعة المصفوفات من الرتبة (2×2) عناصرها اعداد حقيقية بحيث اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

عنصران في V فأن عمليه الجمع تعرف بالشكل الاتي

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

ونعرف عملية الضرب القياسي كالآتي

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

إن V فضاء متجهات على الحقل $\mathbb{R}$ بالنسبة للعمليتين اعلاه ويمكن التأكد من ذلك من خلال تطبيق الشروط العشرة الواردة في التعريف .

الشرط الاول (الانغلاق على عمليه الجمع)

$$\forall A, B \in V \rightarrow A+B \in V$$

من الواضح ان هذا الشرط متحقق لان $A+B$ من خلال التعريف اعلاه ينتج مصفوفه 2×2 وبالتالي يكون $A+B$ عنصراً في V

الشرط الثاني (الخاصية التجميعية)

$$\forall A, B, C \in V \rightarrow A+(B+C) = (A+B)+C$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (A+B)+C$$

الشرط الثالث

$$\forall A \in V \quad \exists\ 0 \in V \ni A+0 = 0+A = A$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

الشرط الرابع

$$\forall A, B \in V \rightarrow A+B = B+A$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

الشرط الخامس

$$\forall A \in V \quad \exists -A \in V \ni A+(-A) = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الشرط السادس (خاصية الانغلاق لعملية الضرب بعدد)

$$A \in V \ \& \ \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha A \in V$$

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

الشرط السابع

$$\forall A, B \in V \ \& \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \alpha (A + B)$$

$$\alpha \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha A + \alpha B$$

الشرط الثامن

$$\forall A \in V \ \& \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow (x+y) A = x A + y A$$

$$(x+y) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+y) a_{11} & (x+y) a_{12} \\ (x+y) a_{21} & (x+y) a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x a_{11} + y a_{11} & x a_{12} + y a_{12} \\ x a_{21} + y a_{21} & x a_{22} + y a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x a_{11} & x a_{12} \\ x a_{21} & x a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y a_{11} & y a_{12} \\ y a_{21} & y a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= x A + y A$$

الشرط التاسع

$$\forall A \in V \ \& \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow (xy) A = x (y A)$$

$$(xy)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (xy)a_{11} & (xy)a_{12} \\ (xy)a_{21} & (xy)a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x(ya_{11}) & x(ya_{12}) \\ x(ya_{21}) & x(ya_{22}) \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ya_{11} & ya_{12} \\ ya_{21} & ya_{22} \end{bmatrix}$$

$$= x(yA)$$

الشرط العاشر $\forall A \in V \rightarrow 1.A = A$

حيث ان 1 هو المحايد الضربي للحقل $\mathbb{R}$

$$1.A = 1.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

2) بصورة عامة اذا كان F حقلاً فإن مجموعة المصفوفات $(m \times n)$ على الحقل F والتي يرمز لها بالرمز $M_{mn}(F)$ تكون فضاء متجهات على الحقل F بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وعملية ضرب المصفوفات بأعداد.

3) اذا كان F حقلاً وكان n عدداً طبيعياً فإن المجموعة F^n تعرف بالآتي

$$F^n = \{(x_1, --- x_n) : x_i \in F\}$$

وتكون فضاء متجهات على الحقل F بالنسبة لعملية الجمع المعرفه

$$(x_1, x_2, ---, x_n) + (y_1, y_2, --- y_n) = (x_1 + y_1, ---, x_n + y_n)$$

وعملية الضرب القياسي المعرفة ب

$$r(x_1, ---, x_n) = (rx_1, --- rx_n)$$

4) لتكن (a,b) الفترة المفتوحة والتي تحتوي على جميع الاعداد الحقيقية x بحيث $(a<x<b)$ ولتكن

$C(a,b) = \{ f : f\ (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ أ f داله مستمره $\}$

أي ان $C(a,b)$ تمثل مجموعة الدوال الحقيقية والمستمرة والمعرفة على الفترة المفتوحة (a,b).

المجموعة $C(a,b)$ تكون فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب القياسي المعرفتين كما يلي

$$f,g \in C(a,b)\ ,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$r \in \mathbb{R}\ f\ f \in C(a,b)\ ,\ (rf)(x) = rf(x)$$

ولأثبات ذلك لابد من تحقيق الشروط الواردة في تعريف فضاء المتجهات.

1- خاصية الإغلاق لعملية الجمع اي يجب اثبات انه اذا كان $f,g \in C(a,b)$ فأن $(f+g)(x) \in C(a,b)$.

من تعريف $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ نستنتج ان $(f+g)(x)$ داله حقيقية مستمرة لانها معرفة بدلالة جمع دالتين حقيقيتين مستمرتين معرفتين على (a,b). وعليه $(f+g)(x) \in C(a,b)$

2- (الخاصية التجميعية لعملية الجمع) لكل $f,g,h \in C(a,b)$ يجب اثبات ان $(f+(g+h))(x) = ((f+g)+h)(x)$

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= f(x)+(g(x)+h(x))\\ &= (f(x)+g(x))+h(x)\\ &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= ((f+g)+h)(x)\end{aligned}$$

3-(الخاصية الإبدالية) اذا كان $f,g \in C(a,b)$ فان

$$(f+g)(x) = (g+f)(x) \quad \forall f,g \in C(a,b)$$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= g(x)+f(x)\\ &= (g+f)(x)\end{aligned}$$

4-(العنصر المحايد) $\forall f \in C(a,b), \exists 0 \in C(a,b)$

$$\ni (f+0)(x) = f(x)$$

ان المتجه الصفري في $C(a,b)$ يكون داله $0:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

والمعرفه ب $0(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$

الآن نثبت ان الداله $0(x)$ هي المحايد الجمعي

$$\begin{aligned}(f+0)(x) &= f(x)+0(x)\\ &= f(x)+0\\ &= f(x)\end{aligned}$$

5)(العنصر النظير) ان نظير f هو $-f$ ويعرف كما يلي

$$(-f)(x) = -f(x)$$

$$\begin{aligned}(f+(-f))(x) &= f(x)+(-f)(x)\\ &= f(x)-f(x)=0\\ &= 0(x)\end{aligned}$$

6) خاصية الإغلاق لعملية الضرب لكل $f \in C(a,b)$ ولكل $r \in \mathbb{R}$

يجب اثبات ان $(rf)(x)$ ينتمي الى $C(a,b)$.

من تعريف $(rf)(x) = \alpha f(x)$ نستنتج ان (rf) داله حقيقية مستمرة معرفه على الفترة (a,b)، لان f بالفرض تنتمي الى $C(a,b)$ و $\alpha f(x)$ عدد حقيقي.

$\forall f,g \in C(a,b)$ & $\forall r \in \mathbb{R}$ -7

$\longrightarrow (r(f+g))(x) = (rf+rg)(x)$

$$\begin{aligned}(r(f+g))(x) &= r(f+g)(x)\\ &= r(f(x)+g(x))\\ &= rf(x)+rg(x)\\ &= (rf+rg)(x)\end{aligned}$$

$\forall f \in C(a,b)$ & $\forall r,s \in \mathbb{R}$ -8

$\longrightarrow ((r+s)f)(x) = (rf+sf)(x)$

$$\begin{aligned}((r+s)f)(x) &= (r+s)f(x)\\ &= rf(x)+sf(x)\\ &= (rf+sf)(x)\end{aligned}$$

$\forall f \in C(a,b)$ & $\forall r,s \in \mathbb{R}$ -9

$\longrightarrow ((rs)f)(x) = (r(sf))(x)$

$$\begin{aligned}((rs)f)(x) &= (rs)f(x)\\ &= r(sf(x))\\ &= (r(sf))(x)\end{aligned}$$

$\forall f \in C(a,b) \longrightarrow (1.f)(x) = f(x)$ -10

حيث 1 هو المحايد الضربي للحقل $\mathbb{R}$

$(1.f)(x) = 1f(x) = f(x)$

ملاحظة

ان نوع العملية مهم جداً في بناء فضاء المتجهات والمثال الآتي يوضح ذلك .

مثال / لتكن R^2 مجموعة نقاط المستوي بحيث ان عملية الجمع والضرب على عناصرها معرفة بالشكل الآتي

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$r(x, y) = (rx, y)$$

ان R^2 لا تكون فضاء متجهات بالنسبة للعمليتين اعلاه وذلك لانه عند أخذ

$A = (1,1) \in R^2$ & $r_1 = 1, r_2 = -2$

$$(r_1 + r_2) A = (1-2) A = (-1)(1,1) = (-1,1)$$

$$r_1 A = 1.(1,1) = (1,1) \quad , \quad r_2 A = -2(1,1) = (-2,1)$$

$$r_1 A + r_2 A = (1,1) + (-2,1) = (-1, 2)$$

وعليه $r_1 A + r_2 A \neq (r_1 + r_2) A$.

مبرهنة ليكن V فضاء متجهات على الحقل F وليكن $A \in V$ متجها و $x \in F$ عدداً قياسياً فإن

-1 $0.A = 0$ -2 $(-1).A = -A$ -3 $x.0 = 0$

حيث 0 المتجه الصفري .

البرهان H.W .

التمارين

كل التمارين من صفحة 31 الى صفحة 34 الموجودة في كتاب الجبر الخطي للدكتور جورج صايف السبتي .

الفضاءات الجزئية

اذا كان V فضاء متجهات على الحقل F فإن بعض المجموعات الجزئية من الفضاء V تكون بدورها فضاءات متجهات بالنسبة الى عمليتي جمع المتجهات و الضرب في اعداد قياسية المعرفتين على V.

تعريف
اي مجموعة جزئية M من فضاء متجهات V على الحقل F تسمى فضاءاً جزئياً من V اذا كان M فضاء متجهات بالنسبة الى عمليتي الجمع و الضرب بأعداد قياسية المعرفتين على V.

توضيح
لكي تكون المجموعة M فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V لابد ان تحقق الشروط العشرة الواردة في تعريف فضاء المتجهات، لكن علماً ان بعض هذه الشروط متحققة لأن المجموعة M ترثها من V. فمثلاً لاتوجد حاجة للتأكد من ان $A + B = B + A$ للفضاء M لانها تتحقق لجميع المتجهات في V ومن ثم جميع المتجهات في M.
وبهذا تكون بقية الشروط الموروثة من V الى M هي جميع الشروط بأستثناء الشرط الاول و الثالث و الخامس و السادس.
ملاحظة :- يمكن استنتاج الشرط الثالث والخامس من الاول والسادس.

مبرهنة
اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية من فضاء المتجهات V على الحقل F فإن M تكون فضاء متجهات اذا وفقط اذا تحققت الشروط الاتية
1. اذا كان A, B متجهين في M فإن $A + B$ ايضاً في M
2. اذا كان x اي عدد قياسي وكان A اي متجه في M فإن xA ايضاً في M.

البرهان : نفرض ان M فضاء متجهات المطلوب اثبات ان الشرطين اعلاه متحققان

من الواضح ان اذا كانت M فضاء متجهات فأن الشرطين متحققان

والآن نفرض ان الشرطين متحققان

المطلوب اثباته M فضاء متجهات .

عا ان جميع الشروط متوفرة بأستثناء وجود المحايد والنظير الجمعي فأن يكفي اثبات وجودها لكي تكون M فضاء متجهات .

عا ان $\forall A \in M \ \& \ \forall x \in F \rightarrow x.A \in M$

فأذا كان $x=0$ فأن $0.A = O \in M$ وهذا يعني وجود المحايد الجمعي في M

واذا وضعنا $x=-1$ فأن $-1.A=-A$ وهذا يعني وجود النظير الجمعي .

و . هـ . م

ملاحظة

لكل فضاء متجهات V يوجد على الاقل فضاءان جزئيان هما V نفسه والمجموعة $\{0\}$ المكونة فقط من المتجه الصفري والذي يسمى بالفضاء الجزئي الصفري .

مثال / برهن على ان المجموعة $M = \{(x,y) : y=2x\}$ تكون فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات R^2 على الحقل R .

البرهان / لاثبات ان M فضاء جزئي يجب ان نحقق الشرطين الآتيين استناداً الى المبرهنة السابقة

الشرط الاول

$$\forall A, B \in M \rightarrow A + B \in M$$

عا ان $M \subseteq R^2$ فأن جمع المتجهات يعرف بالشكل الآتي

اذا كانت $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ فأن $A+B=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

وعليه لاثبات ان $A+B \in M$ يجب ان نثبت $y_1+y_2 = 2(x_1+x_2)$

عا ان $A, B \in M$ فأن $y_1 = 2x_1$ و $y_2 = 2x_2$

نأخذ

$$y_1 = 2x_1$$

نضيف y_2 للطرفين

$$y_1 + y_2 = 2x_1 + y_2$$

نعوض عن y_2 في الطرف الايسر للمعادلة بـ $2x_2$ فتصبح

$$y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2).$$

الشرط الثاني $\forall A \in M \ \& \ \forall K \in \mathbb{R} \rightarrow KA \in M$

عامان $M \subseteq R^2$ فأن KA يعرف بـ $K(x_1, y_2) = (Kx_1, Ky_2)$

حيث $A = (x_1, y_2)$

وعليه لاثبات ان $KA \in M$ يجب ان تثبت $Ky_1 = 2(Kx_1)$

عامان $A \in M \leftarrow y_2 = 2x_1$

نضرب الطرفين بـ K $\quad Ky_2 = K(2x_1)$

$$\rightarrow Ky_2 = 2(Kx_1).$$

وبعد تحقق الشرط الاول والثاني الواردين في المبرهنة السابقة نثبت ان M فضاء جزئي من فضاء المتجهات R^2.

مثال / برهن على ان المجموعة

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 3x_4 = 0 ; x_2 = x_3\}$$

تكون فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات R^4 على الحقل R.

الحل / خذ $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

ولاثبات ان M فضاءاً جزئياً من R^4 يجب ان تحقق الشرطين الآتيين

الاول $\forall A, B \in M \rightarrow A + B \in M$

عامان $M \subseteq R^4$ فأن $A + B$ يعرف بالشكل الآتي

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

ولاثبات ان $A + B \in M$ يجب اثبات

1- $a_1 + b_1 + 3(a_4 + b_4) = 0$

2- $a_2 + b_2 = a_3 + b_3$

$$a_1 + b_1 + 3(a_4 + b_4) = a_1 + b_1 + 3a_4 + 3b_4 \quad -1$$

$$= a_1 + 3a_4 + b_1 + 3b_4 = 0 + 0$$

$$= 0$$

2) علمان $A, B \in M$ فأن $a_2 = a_3$ و $b_2 = b_3$

نأخذ $a_2 = a_3$

نضيف b_2 للطرفين $\longleftarrow$ $a_2 + b_2 = a_3 + b_2$

نعوض عن b_2 في طرف المعادلة الايسر ب b_3 نحصل على

$$a_2 + b_2 = a_3 + b_3.$$

من ① و ② نحصل على ان $A + B \in M$

الشرط الثاني

$$\forall A \in M \ \& \ \forall K \in \mathbb{R} \longrightarrow KA \in M$$

علماً ان $M \subseteq \mathbb{R}^4$ فأن KA يعرف بالشكل الآتي

$$KA = (Ka_1, Ka_2, Ka_3, Ka_4)$$

حيث $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

ولاثبات ان $KA \in M$ يجب ان نثبت

1) $Ka_1 + 3Ka_4 = 0$

2) $Ka_2 = Ka_3$

① $Ka_1 + 3Ka_4 = K(a_1 + 3a_4)$
$= K \cdot 0 = 0$

2) علماً ان $A \in M$ $\longrightarrow$ $a_2 = a_3$

نضرب الطرفين ب K $\quad Ka_2 = Ka_3$

وهو المطلوب

من ① و ② نثبت ان $KA \in M$

ومن تحقق الشرطين نثبت ان M فضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$.

مثال / هل أن المجموعة $M=\{a+bx+cx^2 : a+2b-c=1\}$
فضاءاً جزئياً من الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R أم لا ؟

الجواب / كلا لانه اذا كان $A, B \in M$ فان $A+B \notin M$
واثبات ذلك : لتكن $A=a_1+b_1x+c_1x^2$ و $B=a_2+b_2x+c_2x^2$
متجهين في M بحيث $a_1+2b_1-c_1=1$ و $a_2+2b_2-c_2=1$

$$A+B = a_1+b_1x+cx^2+a_2+b_2x+c_2x^2$$
$$= (a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2$$

الآن

$$(a_1+a_2)+2(b_1+b_2)-(c_1+c_2) = (a_1+2b_1-c_1)+(a_2+2b_2-c_2)$$
$$= 1+1 = 2$$

والمفروض حتى ينتمي A+B للـ M ان يكون الناتج واحد
وعليه M ليست فضاءاً جزئياً لانها غير مغلقة على عملية الجمع .

التمارين

جميع التمارين الواردة في كتاب الجبر الخطي ص 41-42

جبر الفضاءات الجزئية

اذا كان كل من M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V
على الحقل F فإنه بالإمكان تكوين المجموعتين

$$M_1 \cup M_2 = \{A \in V : A \in M_2 \vee A \in M_1\}$$
$$M_1 \cap M_2 = \{A \in V : A \in M_1 \wedge A \in M_2\}$$

ملاحظة

1- $M_1 \cap M_2$ فضاء جزئياً دائماً من V
2- $M_1 \cup M_2$ ليس بالضرورة ان يكون فضاء جزئياً من V .
3- المبرهنة الآتية سوف تبين الشرط الذي تكون فيه $M_1 \cup M_2$
فضاءاً جزئياً من V .

مبرهنة

اذا كان كل من M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على الحقل F فأن 1) $M_1 \cap M_2$ يكون فضاء جزئياً

2) $M_1 \cup M_2$ يكون فضاءاً جزئياً $\Longleftrightarrow M_1 \subset M_2$ or $M_2 \subset M_1$

البرهان ① نفرض M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من V

المطلوب اثباته

$M_1 \cap M_2$ فضاءاً جزئياً من V

اي

$$\forall \; A, B \in M_1 \cap M_2 \rightarrow A + B \in M_1 \cap M_2$$

و

$$\forall A \in M_1 \cap M_2 \;\&\; \forall K \in F \rightarrow KA \in M_1 \cap M_2$$

الآن نفرض

$$A, B \in M_1 \cap M_2$$

المطلوب اثباته

$$A + B \in M_1 \cap M_2$$

عالان

$$A, B \in M_1 \cap M_2$$

$$\rightarrow A, B \in M_1 \;\&\; A, B \in M_2$$

وعالان M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من V فأن

$$A + B \in M_1 \;\&\; A + B \in M_2$$

وبالتالي

$$A + B \in M_1 \cap M_2$$

وبالتالي $M_1 \cap M_2$ مغلقة على عملية الجمع بقي ان نبرهن انها مغلقة على عملية الضرب.

نفرض

$$A \in M_1 \cap M_2 \;\&\; K \in F$$

المطلوب اثباته

$$KA \in M_1 \cap M_2$$

عالان

$$A \in M_1 \cap M_2$$

$$\rightarrow A \in M_1 \wedge A \in M_2$$

وعالان M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من V فأن

$$KA \in M_1 \;\&\; KA \in M_2$$

وبالتالي

$$KA \in M_1 \cap M_2$$

وعليه نثبت ان $M_1 \cap M_2$ فضاءاً جزئياً من V

② نفرض ان M_1 و M_2 فضاء جزئيا من فضاء المتجهات V

اولاً $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئيا $\longrightarrow M_1 \subset M_2$ or $M_2 \subset M_1$

ثانياً $M_1 \subset M_2$ or $M_2 \subset M_1 \longrightarrow M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي

اولاً: سوف نبرهن اولاً باستخدام التناقض $(P \wedge \sim q)$

نفرض $M_1 \cup M_2$ فضاءاً جزئيا و $M_1 \not\subset M_2$ و $M_2 \not\subset M_1$

بما ان $M_1 \not\subset M_2 \longrightarrow$ يوجد $A \in M_1$ و $A \notin M_2$

وبما ان $M_2 \not\subset M_1 \longrightarrow$ يوجد $B \in M_2$ و $B \notin M_1$

وعلى اي حال $A \in M_1 \cup M_2$ و $B \in M_1 \cup M_2$

وبما ان $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي فان $A + B \in M_1 \cup M_2$

نفرض $A + B = C \longrightarrow A = C - B$ -- ①

$B = C - A$ -- ②

الآن اذا كان $C \in M_1$ فان (2) تعطي $B \in M_1$ وذلك لان $A \in M_1$ وكون M_1 فضاءاً جزئياً حسب الفرضيا ينتج ان $-A \in M_1$

وبذلك $B = C - A = C + (-A) \in M_1$ وهذا غير ممكن

اما اذا كان $C \in M_2$ فان من ① تعطي ان $A \in M_2$ وهذا غير ممكن اذن $C \notin M_1$ و $C \notin M_2$

$\longrightarrow C \notin M_1 \cup M_2$ وهذا تناقضا.

اذن $M_1 \subset M_2$ أو $M_2 \subset M_1$ اذا كان $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئيا.

ثانياً: نفرض ان $M_2 \subset M_1$ او $M_1 \subset M_2$

المطلوب اثباته $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي

اذا كانت $M_2 \subset M_1$ فان $M_1 \cup M_2 = M_1$

وبما ان M_1 فضاء جزئي فان $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي

او $M_1 \subset M_2$ فان $M_1 \cup M_2 = M_2$

وبما ان M_2 فضاء جزئي فان $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي.

مثال / في الفضاء R^2 على الحقل R كل من

$M_1 = \{(x,y) : x+2y=0\}$ & $M_2 = \{(x,y) : 5x+y=0\}$

يكون فضاءاً "جزئياً" من R^2 لكن $M_1 \cup M_2$ ليست فضاءاً جزئياً.

ولاثبات ذلك خذ $A=(2,-1) \in M_1$ و $B=(-1,5) \in M_2$

اي ان $A \in M_1 \cup M_2$ و $B \in M_1 \cup M_2$

بحيث ان

$$A+B=(1,4)$$

وهذا يعني ان $A+B \notin M_1$ و $A+B \notin M_2$

وعليه $A+B \notin M_1 \cup M_2$ وبالتالي $M_1 \cup M_2$ ليست مغلقة على عملية الجمع.

مثال / احسب تقاطع الفضاءين الجزئين

$M_1 = \{(x,y,z) : 2x-y+3z=0\}$

$M_2 = \{(x,y,z) : x+y-z=0\}$

الحل / لايجاد التقاطع بين الفضاءين الجزئيين M_1 و M_2 لابد ان يكون كل متجه ينتمي الى $M_1 \cap M_2$ يحقق الشرطين الواردين في M_1 و M_2.

نفرض $A=(x,y,z)$ ينتمي الى $M_1 \cap M_2$

فان A يحقق الشرطين الواردين في M_1 و M_2 نحصل على

$2x-y+3z=0$ --- ①

$x+y-z=0$ --- ②

نضرب المعادله ② في (-2) وجمعها مع ① نحصل على

$-3y+5z=0 \longrightarrow y=\frac{5}{3}z$ --- ③

نعوض ③ في ②

$x+\frac{5}{3}z-z=0$

$x+\frac{2}{3}z=0 \longrightarrow x=-\frac{2}{3}z$

اذا يمكن وصف التقاطع بالشكل الاتي

$M_1 \cap M_2 = \{(x,y,z) : x=-\frac{2}{3}z,\ y=\frac{5}{3}z,\ z=z\}$

جمع الفضاءات الجزئية

اذا كان كل من M و N فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على الحقل F فإنه بالامكان ان نكون المجموعة الآتية

$$M+N=\{A+B : A\in M,\ B\in N\}$$

اي ان $M+N$ يحتوي على جميع المتجهات في V التي يمكن كتابتها كحاصل جمع متجهين أحدهما في M والاخر في N.
المبرهنة ادناه توضح ان المجموعة الجزئية $M+N$ تكون فضاءاً جزئياً يحتوي على كل من M و N.

مبرهنة: اذا كان V فضاء متجهات على حقل F وكان كل من M و N فضاءاً جزئياً من V فإن $M+N$ يكون فضاءاً جزئياً من V يحتوي على كل من M و N.

البرهان: نفرض ان V فضاء متجهات على حقل F وكل من M و N فضاء جزئياً من V

المطلوب اثباته $M+N$ فضاءاً جزئياً و $M\subseteq M+N$ و $N\subseteq M+N$
لاثبات ان $M+N$ فضاءاً جزئياً لابد من اثبات الشرطين الآتيين

$$\forall A,B\in M+N \rightarrow A+B\in M+N \qquad (1)$$

$$\forall A\in M+N \ \& \ \forall K\in F \rightarrow KA\in M+N \qquad (2)$$

بما ان $A,B\in M+N$ فإنه A و B يكتب كحاصل جمع متجهين احدهما ينتمي الى M والاخر ينتمي الى N وعليه

$$A=B_1+C_1 \ni B_1\in M \ \& \ C_1\in N$$

و

$$B=B_2+C_2 \ni B_2\in M \ \& \ C_2\in N$$

ولاثبات ان $A+B\in M+N$ يجب ان نثبت ان $A+B$ يكتب كحاصل جمع متجهين احدهما في M والاخر في N

$$A+B=(B_1+C_1)+(B_2+C_2)$$
$$=(B_1+B_2)+(C_1+C_2)$$

بما ان M و N فضاء جزئياً و $B_1, B_2 \in M$ و $C_1, C_2 \in N$

فان $B_1 + B_2 \in M$ و $C_1 + C_2 \in N$

وبالتالي $A + B \in M+N$

بقي ان نثبت ان $\forall A \in M+N$ & $\forall K \in F \rightarrow KA \in M+N$

$$KA = K(B_1 + C_1) = \underbrace{KB_1}_{\in M} + \underbrace{KC_1}_{\in N} \therefore \in M+N$$

لان M فضاء جزئي — لان N فضاء جزئي

$\therefore$ $M+N$ فضاء جزئي من الفضاء V.

بقي ان نبرهن ان $M \subseteq M+N$ و $N \subseteq M+N$

لاثبات ان $M \subseteq M+N$

نفرض $A \in M$

المطلوب $\therefore A \in M+N$

بما ان $A \in M$ اذن يمكن كتابة A بالشكل الاتي

$$A = A + 0$$

وبما ان $0 \in N$

فان $A \in M+N$ لانه تم كتابة A كحاصل جمع متجهين احدهما في M والاخر في N.

وبرهان $N \subseteq M+N$ بنفس الطريقة السابقة.

ملاحظة نطلق على الفضاء الجزئي $M+N$ أسم مجموع الفضائين M و N أو جمع الفضائين M و N.

مثال / في الفضاء R^2 على الحقل $\mathbb{R}$ اذا كان

$$M = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \quad , \quad N = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

احسب $M+N$

الحل / ليكن A متجهاً في $M+N$ ومن تعريف $M+N$
يوجد متجه $B=(x,0)$ في M ومتجه اخر $C=(0,y)$ في N
بحيث

$$A = B + C = (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

$$M + N = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$M + N = \mathbb{R}^2$$

مثال / في الفضاء R^4 على الحقل $\mathbb{R}$ اذا كان

$$M = \{(0,y,z,0) : y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$N = \{(x,0,z,w) : x,z,w \in \mathbb{R}\}$$

أحسب $M+N$

الحل / خذ $A=(0,y_1,z_1,0)$ اي متجه في M وخذ $B=(x_2,0,z_2,w_2)$
اي متجه في N

$$A + B = (0,y_1,z_1,0) + (x_2,0,z_2,w_2)$$
$$= (x_2, y_1, z_1+z_2, w_2)$$

$\therefore$
$$M + N = \{(x,y,z,w) : x,y,z,w \in \mathbb{R}\} = R^4$$

وذلك لان اي متجه في $A=(x,y,z,w) \in R^4$
يمكن كتابته كحاصل جمع متجهين أحدهما في M والاخر في N
كالآتي $A = (0,y,\frac{z}{2},0) + (x,0,\frac{z}{2},w)$

نود هنا ان نبين ان المتجهات في R^4 يمكن ان تكتب بطرق
مختلفة كحاصل جمع متجهات في M ومتجهات في N فمثلاً

$$(1,2,3,10) = (0,2,3,0) + (1,0,0,10)$$
$$(1,2,3,10) = (0,2,\tfrac{3}{2},0) + (1,0,\tfrac{3}{2},10)$$
$$(1,2,3,10) = (0,2,2,0) + (1,0,1,10)$$

نلاحظ اننا في كل مره كتبنا المتجه $(1,2,3,10)$ كحاصل جمع متجهين الاول في M والاخر في N بطرق مختلفة.
في بعض الاحيان لا يمكننا عمل ذلك ولغرض التمييز نورد التعريف الآتي:

تعريف: نقول عن فضاء المتجهات V انه جمع مباشر لفضائية الجزئيين M و N ويرمز له $V=M\oplus N$ اذا كان كل متجه $A\in V$ يمكن ان يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على النحو الآتي $A=B+C$ حيث $B\in M$ و $C\in N$.

لو نظرنا للامثلة السابقة لوجدنا ان $R^2=M\oplus N$
اما R^4 ليست جمعاً مباشراً لفضائيها M و N وان كانت جمعاً لهما
بعبارة اخرى $R^4=M+N$ لكن $R^4\neq M\oplus N$.

مبرهنة: يكون الفضاء V جمعاً "مباشراً" لفضائيه الجزئيين M و N اذا وفقط اذا 1) $V=M+N$ ② $M\cap N=\{0\}$

البرهان: اولاً نفرض ان V جمعاً "مباشراً" للفضائيين الجزئيين M و N
اي ان $V=M\oplus N$
المطلوب اثباته $V=M+N$ و $M\cap N=\{0\}$
بما ان $V=M\oplus N$ اي كل متجه A في V يمكن ان يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على النحو $A=B+C$ حيث $B\in M$ و $C\in N$
وهذا يعني $V=M+N$.

ولاثبات ان $M\cap N=\{0\}$ نستخدم طريقة التناقض
اي نفرض ان V جمعاً "مباشراً" للفضائيين الجزئيين M و N و $M\cap N\neq\{0\}$
بما ان $M\cap N\neq\{0\}$ يوجد $A\in M\cap N$ حيث $A\neq 0$
اي $A\in M$ و $A\in N$ و $A\neq 0$،
عندئذ يمكن كتابة A بالاكثر من طريقة واحدة فمثلاً
$A=A+0$ (لان $A\in M$ و $0\in N$)
$A=0+A$ (لان $0\in M$ و $A\in N$)
وهذا يناقض كون V جمعاً "مباشراً" (24)

اذاً $V=M+N$ و $M\cap N=\{0\}$.

ثانياً نفرض $V=M+N$ و $M\cap N=\{0\}$

المطلوب اثباته $V=M\oplus N$

خذ اي متجه $A\in V$ وافرض انه بالامكان كتابته بطريقتين مختلفتين

$A=B_1+C_1$ و $A=B_2+C_2$

بحيث $B_1, B_2\in M$ و $C_1 C_2\in N$

$$B_1+C_1=B_2+C_2$$

$$\Leftarrow \quad B_1-B_2=C_2-C_1$$

وعا ان كل من M ، N فضاء جزئي فيكون

$B_1-B_2\in M$ و $C_2-C_1\in N$

لكن المعادلة $B_1-B_2=C_2-C_1$

تنتج $B_1-B_2\in N$ لانه يساوي C_2-C_1 المنتمي الى N

و $C_2-C_1\in M$ لانه يساوي B_1-B_2 المنتمي الى M

وعليه $B_1-B_2\in M\cap N$ و $C_2-C_1\in M\cap N$

وعا ان $M\cap N=\{0\}$

$\Leftarrow \quad B_1-B_2=0 \;\Leftarrow\; B_1=B_2$

و $C_2-C_1=0 \;\Leftarrow\; C_1=C_2$

وعليه A يكتب بطريقة واحدة وواحده فقط

وبالتالي $V=M\oplus N$ وهو المطلوب .

التمارين

كل التمارين الواردة في ص $52-54$.

التركيب الخطي

اذا كانت لدينا مجموعة جزئية معينة $S = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ من متجهات تنتمي الى فضاء متجهات V على حقل F.
فهل يوجد فضاء جزئي يحتوي على المجموعة S وماهو اصغر تلك الفضاءات الجزئية التي تحتوي على المجموعة.
إنه لمن المهم جداً ان نعرف اصغر فضاء جزئي يحتوي على مجموعة جزئية معطاة لان الفضاء V نفسه يعتبر فضاءً جزئياً من V ودائماً يحتوي على اي مجموعة جزئية معطاة.
يقدم لنا التعريف الآتي الاداة الرئيسية لبناء مثل هذه الفضاءات الجزئية.

تعريف يسمى المتجه A بتركيب خطي من المتجهات $B_1, \dots B_K$
اذا امكن التعبير عنه بالصورة $A = x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_K B_K$
حيث $x_1, x_2, \dots x_K$ اعداد قياسية.

مثال / اذا كان $A = (1,5,0)$ ، $B = (2,0,-1)$ في R^3
فبين ان $C = (3,-5,-2)$ يكون تركيباً خطياً من A و B وان $D = (-2,20,7)$ لا يكون تركيباً خطياً من A و B.

الحل / لكي يكون C تركيباً خطياً من A و B يجب ان توجد اعداد قياسية x_1 و x_2 بحيث $C = x_1 A + x_2 B$

اي ان

$$(3,-5,-2) = x_1(1,5,0) + x_2(2,0,-1)$$

$$(3,-5,-2) = (x_1, 5x_1, 0) + (2x_2, 0, -x_2)$$

$$(3,-5,-2) = (x_1 + 2x_2, 5x_1, -x_2)$$

من المساواة بين المتجهين نحصل على

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$5x_1 = -5 \longrightarrow x_1 = -1$$

$$-x_2 = -2 \longrightarrow x_2 = 2$$

اي ان $C = -A + 2B$

بالمثل بالنسبة الى D لكي لايكون تركيباً خطياً يجب ان لاتوجد اعداد قياسية x_1 و x_2 بحيث $D = x_1 A + x_2 B$

فلو وضعنا $D = x_1 A + x_2 B$ لحصلنا على

$$(-2, 20, 7) = x_1 (1, 5, 0) + x_2 (2, 0, 1)$$

$$(-2, 20, 7) = (x_1 + 2x_2 , 5x_1 , -x_2)$$

ومن التساوي

$$x_1 + 2x_2 = -2$$

$$5x_1 = 20 \longrightarrow x_1 = 4$$

$$-x_2 = 7 \longrightarrow x_2 = -7$$

وعند تعويض قيم $x_1 = 4$ و قيمة $x_2 = -7$ في معادلة ① فانها لاتحقق المعادلة وهذا يعني ان النظام غير متوافق ومن ثم لا يوجد مثل هذه الاعداد القياسية بحيث $D = x_1 A + x_2 B$ وعليه D ليس تركيباً خطياً لـ A و B .

مثال/ اذا كان $A = 1 + x$ ، $B = x^2 - 3$ ، $C = 2 - x + x^3$ متجهات في $P_3(R)$ على حقل الاعداد الحقيقية R فهل ان المتجه $D = 1 - x + x^2$ يكون تركيباً خطياً من A و B و C

الحل/ لكي يكون D تركيباً خطياً من A و B و C يجب ان توجد اعداد قياسية a_1 و a_2 و a_3 بحيث $D = a_1 A + a_2 B + a_3 C$

$$1 - x + x^2 = a_1 (1 + x) + a_2 (x^2 - 3) + a_3 (2 - x + x^3)$$

$$1 - x + x^2 = (a_1 - 3a_2 + 2a_3) + (a_1 - a_3) x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

من المساواة نحصل على

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 1 \quad \text{-----} ①$$

$$a_1 - a_3 = -1 \quad \text{-----} ②$$

$$a_2 = 1 \quad \text{-----} ③$$

$$a_3 = 0 \quad \text{-----} ④$$

ان المعادلات ② و ③ و ④ تعطي $a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=0$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة ① اي ان النظام اعلاه غير متوافق ومن ثم لا توجد اعداد قياسية a_1, a_2, a_3 تحقق

$$D = a_1 A + a_2 B + a_3 C$$

وهذا يعني ان D لا يكون تركيباً خطياً من A و B و C.

لنفرض الآن ان S مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهات V على الحقل F ولتكن

$$[S] = \{ x_1A_1 + \cdots + x_nA_n : x_i \in F,\ A_i \in S,\ n \in \mathbb{N} \}$$

حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية.

ان المجموعة $[S]$ اعلاه تمثل مجموعة المتجهات في V التي يكون كل منها تركيباً خطياً لعناصر مجموعة جزئية منتهية من المجموعة S.

سوف نطلق اسم مجموعة التركيبات الخطية لعناصر S على المجموعة $[S]$.

المبرهنة التالية تجيب عن التساؤل الذي طرحناه في بداية الموضوع ما هو أصغر فضاء جزئي يحتوي على المجموعة S؟

مبرهنة

ليكن V فضاء متجهات على الحقل F و S مجموعة جزئية غير خالية من V. ان مجموعة التركيبات الخطية لعناصر S والتي يرمز لها بالرمز $[S]$ تكون اصغر فضاء جزئي يحتوي على S.

البرهان: نفرض V فضاء متجهات على الحقل F و $S \neq \phi \subseteq V$

المطلوب اثباته ① $[S]$ فضاء جزئي

② $[S]$ اصغر فضاء جزئي

① لاثبات ان $[S]$ فضاء جزئي يجب تحقيق ما يلي

1) $\forall\ A, B \in [S] \rightarrow A+B \in [S]$

2) $\forall\ A \in [S]\ \&\ \forall\ K \in F \longrightarrow KA \in [S]$

نفرض $A, B \in [S]$ بحيث

$$A = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$$

$$B = y_1B_1 + \cdots + y_nB_n$$

حيث $A_1, \dots, A_n$ و $B_1, \dots, B_n$ متجهات في S و
$x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_n$ اعداد قياسية في F.

$$A + B = x_1A_1 + \dots x_nA_n + y_1B_1 + \dots y_nB_n$$

وهذا ايضاً تركيب خطي لعدد محدود من عناصر S وبالتالي
يكون عنصراً في [S]. اي ان [S] مغلقة تحت عملية الجمع.
الآن نأخذ $k \in F$ اي عدد قياسي ونلاحظ

$$kA = k(x_1A_1 + \dots x_nA_n)$$
$$= kx_1A_1 + \dots kx_nA_n$$
$$= (kx_1)A_1 + \dots (kx_n)A_n$$

وبهذا نستنتج ان $kA \in [S]$ لان kA يكون تركيب خطي من
متجهات $A_1, \dots, A_n$ تنتمي الى S واعداد قياسية $kx_1, \dots kx_n$.
اذن [S] مغلقة بالنسبة لعملية الضرب القياسي وبالتالي تكون
[S] فضاءً جزئياً.

② لكي نبرهن [S] اصغر فضاء جزئي يحتوي S
يجب اولاً ان نبرهن ان $S \subset [S]$
نفرض $A \in S$. المطلوب اثباته $A \in [S]$
بما ان $A = 1.A, 1 \in F$ ⟵ $A \in [S]$ اي ان A يكون
تركيب خطي لعناصر من S. وعليه $S \subset [S]$
ثانياً لاثبات ان [S] هو اصغر فضاء جزئي يحتوي S
نفرض M فضاء جزئي يحتوي على S اي $S \subset M$
المطلوب اثباته $[S] \subset M$
نفرض $B \in [S]$
المطلوب اثباته $B \in M$
بما ان $B \in [S]$ اي ان $B = x_1B_1 + \dots x_nB_n$
حيث $B_i \in S$ و $x_i \in F$ لكل $i = 1, \dots n$
نستنتج ان $B_i \in M$ لان $B_i \in S$ و $S \subset M$
وبما ان $B_i \in M$ و $x_i \in F$ فان $x_iB_i \in M$
لان M فضاء جزئي وهذا يعني ان الجمع $B = x_1B_1 + \dots + x_nB_n$
ايضاً ينتمي الى M . وبذلك يكون [S] اصغر فضاء جزئي يحتوي S .

ملاحظة/ اذا كان V فضاء متجهات على حقل F و S مجموعة جزئية غير خالية من V فإن الفضاء الجزئي $[S]$ يسمى الفضاء الجزئي المولد من قبل المجموعة الجزئية S ويقال عن المجموعة S بأنها مجموعة مولدة للفضاء الجزئي $[S]$.

مثال/ بين ان المجموعة الجزئية $S = \{(1,0),(0,1)\}$ تولد R^2.

الحل/ يجب ان نبين $[S] = R^2$ اي ان كل متجه $A = (x,y)$ في R^2 يمكن ان يكتب كتركيب خطي من متجهات S وهذا يمكن ملاحظته اذا كتبنا $A = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

مثال/ ماهو اصغر فضاء جزئي يحتوي على المجموعة الجزئية $S = \{(x,y,z) : 2x - y + z = 0\}$ من الفضاء R^3.

الحل/ نلاحظ بأن المجموعة الجزئية S اعلاه تكون بحد ذاتها فضاءً جزئياً من R^3 وبالتالي يكون $[S] = S$ اي ان اصغر فضاء جزئي يحتوي S هو S.

اثبات كون S فضاء جزئي H.W.

مثال / اذا كانت $S = \{A, B\}$ حيث $A = (0,2,2)$ ، $B = (1,2,0)$ فأثبت ان المجموعة S تولد الفضاء الجزئي

$$M = \{(x,y,z) ; 2x - y + z = 0\}$$

الحل/ المطلوب اثباته هنا $[S] = M$ اي $[S] \subseteq M$ و $M \subseteq [S]$

نلاحظ اولاً ان $A \in M$ و $B \in M$ (لأن A و B تحقق الشرط الوارد في M ($2x - y + z = 0$) وعليه $S \subseteq M$

وبما ان $[S]$ هو اصغر فضاء جزئي يحتوي على S فنستنتج ان $[S] \subseteq M$.

الان نفرض $C = (x,y,z) \in M$

المطلوب اثباته $C \in [S]$

اي يجب ان يكتب كتركيب خطي من عناصر S

لو حاولنا كتابة C كتركيب خطي لمتجهات في S اي ان

$$C = (x,y,z) = a(0,2,2) + b(1,2,0)$$

فسيكون لدينا $b = x$ --- ①

$2a + 2b = y$ --- ②

$2a = z$ --- ③

بما ان $(x, y, z) \in M$ اذن $2x - y + z = 0$

المعادلات ① و ③ تعطي $b = x$ ، $a = \frac{z}{2}$ وهذه القيم تحقق

المعادلة ② وذلك لان $2a + 2b = z + 2x = y$

وعليه كل متجه في M يمكن كتابته على الشكل

$$C = (x, y, z) = \frac{z}{2}(0, 2, 2) + x(1, 2, 0)$$

اي كل متجه M يمكن كتابته كتركيب خطي لمتجهات في S .

وبذلك يكون $M \subset [S]$.

اي ان $M = [S]$ ،

ملاحظة

لكي تكون المجموعة S مولدة للفضاء الجزئي M - يجب الافتراض مسبقاً بان S مجموعة جزئية من M وبما ان $[S]$ هو اصغر فضاء جزئي يحتوي على S فإذن $[S] \subseteq M$.

اي انه عندما يطلب منا نثبت ان مجموعة ما تكون مجموعة مولدة لفضاء جزئي معين يجب فقط ان نثبت ان كل متجه في ذلك الفضاء الجزئي يمكننا كتابته كتركيب خطي من متجهات تلك المجموعة.

مثال / في فضاء متجهات V على حقل F ، اذا كان $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ و B متجه في V حيث $B \in [S]$ فبرهن ان المجموعة $T = \{A_1, A_2, A_3, B\}$ تولد نفس الفضاء الجزئي $[S]$ بعبارة اخرى برهن على ان $[S] = [T]$

الحل / يجب ان نبرهن ان $[S] \subseteq [T]$ و $[T] \subseteq [S]$

اولاً نفرض $A \in [S]$

المطلوب اثباته $A \in [T]$

بما ان $A \in [S]$ اذن توجد اعداد قياسية x_1, x_2, x_3 بحيث

$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$ وعليه يمكن ان نكتب A

بالشكل الآتي $A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + 0 \cdot B$

وهذا الشكل يعني ان A كتب كتركيب خطي من عناصر $[T]$

وعليه $A \in [T]$

وعليه $[S] \subseteq [T]$

ثانياً" نفرض $C \in [T]$

المطلوب إثبات $C \in [S]$

بما أن $C \in [T]$ اذن توجد اعداد قياسية y_1, y_2, y_3, y_4 بحيث

$$C = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 B$$

وبما أن $B \in [S]$ اذن توجد اعداد قياسية x_1, x_2, x_3 بحيث

$$B = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

وعليه

$$C = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3)$$

$$C = \underbrace{(y_1 + y_4 x_1)}_{\text{عدد قياسي في } F} A_1 + \underbrace{(y_2 + y_4 x_2)}_{\text{عدد قياسي في } F} A_2 + \underbrace{(y_3 + y_4 x_3)}_{\text{عدد قياسي في } F} A_3$$

وعليه $C \in [S]$ لانه كتب كتركيب خطي من عناصر S.

اذن $[T] \subseteq [S]$.

ومن ثم $[S] = [T]$.

ملاحظة: المثال اعلاه مهم جداً" ويعني لو اضفنا الى مجموعة معينة متجهاً" يمكن كتابته اصلاً كتركيب خطي من متجهات المجموعة المعينة فأن المجموعة الجديدة الناتجة من اضافة ذلك المتجه تولد الفضاء الجزئي نفسه. الكلام اعلاه نفسه يمكن ان تعاد صياغته بلغة حذف متجه.

تمارين

كل التمارين الواردة في ص 62-64

الاستقلال الخطي والارتباط الخطي

تعريف يقال بأن المجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات V على الحقل F مجموعة من المتجهات مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجدت اعداد قياسية $x_1, x_2, ---x_n$ ليست جميعها مساوية للصفر وكذلك وجدت متجهات مختلفة $A_1, A_2, --- A_n$ في S بحيث

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ---- + x_n A_n = 0$$

مثال/ المجموعة $S = \{(1,2), (2,5), (0,1)\}$

تكون مجموعة مرتبطة خطياً من المتجهات في الفضاء R^2 وذلك لان

$$2(1,2) + 1(0,1) + (-1)(2,5) = (0,0)$$

مثال/ في الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R برهن على ان المجموعة $S = \{5, 2+x, x^2, 1+4x-x^2\}$ ، مرتبطة خطياً.

الحل/ لكي نبرهن على ان المجموعة اعلاه مجموعة مرتبطة خطياً يجب ايجاد اعداد حقيقية a_1, a_2, a_3, a_4 ليست جميعها مساوية للصفر وتحقق

$$a_1(5) + a_2(2+x) + a_3(x^2) + a_4(1+4x-x^2) = 0$$

بعد تبسيط الطرف الايسر للمعادلة اعلاه نحصل على

$$(5a_1 + 2a_2 + a_4) + (a_2 + 4a_4)x + (a_3 - a_4)x^2 = 0$$

ولكي تكون متعددة الحدود في الطرف الايسر مساوية لمتعددة الحدود الصفرية يجب ان تكون جميع المعادلات تساوي صفر وبهذا نحصل على المعادلات

$$5a_1 + 2a_2 + a_4 = 0$$

$$a_2 + 4a_4 = 0$$

$$a_3 - a_4 = 0$$

حل هذه المعادلات يكون

$$a_3 = a_4 \quad , \quad a_2 = -4a_4 \quad , \quad a_1 = \frac{7}{5}a_4$$

وهذا يعني ان نظام المعادلات اعلاه لديه عدة حلول ولغرض الحصول على حل غير صفري نضع على سبيل المثال $a_4 = 1$

وبهذا نحصل على $a_1 = \frac{7}{5}$, $a_2 = -4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$

وهذا يعني ان

$$\left(\frac{7}{5}\right)(5) + (-4)(2+x) + (x^2) + (1)(1+4x-x^2) = 0$$

اي ان المجموعة S مرتبطة خطياً.

تعريف يقال بان المجموعة الجزئية S مستقلة خطياً اذا وفقط اذا S مجموعة غير مرتبطة خطياً.

التعريف اعلاه يكافئ مايلي

اذا كان اي تركيب خطي لمتجهات في S مساوياً للصفر فيجب على جميع المعاملات بأن تساوي صفر. فإذا كانت المجموعة S منتهية اي ان $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ فان S تكون مستقلة خطياً اذا كان الحل الوحيد للمعادلة $x_1A_1 + \cdots x_nA_n = 0$ هو الحل الصفري اي $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

مثال / برهن على ان المجموعة الجزئية

$$S = \{(1,1,1), (0,10,1), (0,0,1)\}$$

من الفضاء R^3 تكون مستقلة خطياً.

الحل / يجب ان نبرهن على ان الحل الوحيد للمعادلة.

$$x_1(1,1,1) + x_2(0,10,1) + x_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

هو الحل الصفري اي ان $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

تصبح المعادلة اعلاه بعد التبسيط.

$$(x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3) = (0,0,0)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

من هذا نرى ان الحل الوحيد هو

$$x_1 = 0 \quad , x_2 = 0 \quad , x_3 = 0$$

C^2 مثال / لتكن $S=\{(1,i),(i,-1)\}$ مجموعة جزئية من الفضاء
على الحقل C هل ان S مستقلة خطياً ام مرتبطة خطياً ؟
الحل / لغرض الاجابة على السؤال اعلاه يجب ان نحدد فيما اذا كان للمعادلة

$$z_1(1,i)+z_2(i,-1)=(0,0)$$

حل غير صفري ، حيث ان z_1, z_2 عددان عقديان
المعادلة اعلاه تكافئ المعادلة $(z_1+iz_2,\ iz_1-z_2)=(0,0)$

$$z_1+iz_2=0 \quad ---- \quad (1)$$
$$iz_1-z_2=0 \quad ---- \quad (2)$$

نلاحظ انه لو ضربنا المعادلة (1) في العدد العقدي i لحصلنا على المعادلة (2) اي ان المعادلة (2) ليست جديدة وبهذا تبقى معادلة واحدة
هي $z_1+iz_2=0 \longleftarrow z_1=-iz_2$
بأخذ $z_2=1$ نحصل على $z_1=-i$
اي انه يوجد حل غير صفري ومن هذا نستنتج على ان المجموعة S مجموعة مرتبطة خطياً

مثال / اذا كانت V فضاء متجهات على الحقل R وكانت $E=\{A,B,C\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في V برهن على ان المجموعة $S=\{A+B, B+C, A+C\}$ مستقلة خطياً من المتجهات في V.

الحل / نأخذ المعادلة

$$x_1(A+B)+x_2(B+C)+x_3(A+C)=0$$

$$x_1A+x_1B+x_2B+x_2C+x_3A+x_3C=0$$

$$(x_1+x_3)A+(x_1+x_2)B+(x_2+x_3)C=0$$

وبما ان A و B و C مستقلة خطياً نحصل على

$$(1)\ --\ (x_1+x_3)=0 \longrightarrow x_1=-x_3 \quad ---- \quad (4)$$
$$(2)\ --\ (x_1+x_2)=0 \longrightarrow x_1=-x_2 \quad -- \quad (5)$$
$$(3)\ --\ (x_2+x_3)=0$$

نعوض (4) و (5) في (3)

$$-x_1 - x_1 = 0$$

$$-2x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \;,\; x_2 = 0 \;,\; x_3 = 0$$

سوف نذكر بعض المبرهنات والنتائج التي تساعدنا كثيراً في معرفة فيما اذا كانت مجموعة ما من المتجهات مستقلة خطياً ام مرتبطة خطياً.

مبرهنة: ليكن V فضاء متجهات على الحقل F ولتكن S مجموعة جزئية من V اذا كانت المجموعة الجزئية S تحتوي على المتجه الصفري O فإنها تكون مرتبطة خطياً.

البرهان H.W

نتيجة

اذا كان M فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على اي حقل F فأن M يكون مجموعة مرتبطة خطياً.

البرهان H.W.

تعريف: يقال بأن المتجه A يعتمد خطياً على المجموعة S اذا وفقط اذا كان $A \in [S]$.

مبرهنة: المجموعة S تكون مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجد متجه A في S يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S.

البرهان اولاً نفرض ان المجموعة S تكون مرتبطة خطياً

المطلوب اثباته يوجد $A \in S$ بحيث A يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S.

بما ان S مرتبطة خطياً اذن توجد اعداد قياسية $x_1, \cdots x_n$ ومتجهات مختلفة $A_1, \cdots A_n$ في S بحيث

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots x_n A_n = 0$$

وليست جميع الاعداد $x_1, \cdots x_n$ تكون مساوية للصفر.

بتغيير الترتيب ان اقتضت الضرورة يمكننا دائماً ان نفرض على ان $x_1 \neq 0$.

وبهذا يمكننا ان نكتب

$$A_1 = \left(-\frac{x_2}{x_1}\right) A_2 + \cdots + \left(-\frac{x_n}{x_1}\right) A_n$$

اي ان A_1 يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $A_2, \cdots A_n$ المنتمية الى S وهذا يعني ان A_1 يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S.

ثانياً نفرض انه يوجد متجه $A \in S$ يعتمد خطياً على باقي متجهات S لكان بأستطاعتنا ان نجد متجهات مختلفة $B_1, \cdots B_k$ في S (تختلف عن A) بحيث $A = x_1 B_1 + \cdots x_k B_k$

اي ان $x_1 B_1 + \cdots x_k B_k + (-1).A = 0$

والمعادلة اعلاه تعني وجود متجهات مختلفة في S هي $A, B_1, \cdots B_k$ واعداد قياسية $x_1, \cdots x_k, -1$ تحقق المعادلة وعلى ان $(-1) \neq 0$ اذن الاعداد القياسية اعلاه ليست جميعها مساوية للصفر. وبهذا تكون S مرتبطة خطياً.

مبرهنة لتكن $S = \{A_1, \cdots A_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات. S تكون مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجد متجه $A_k \in S$ $(k \leq n)$ يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه اي ان

$$A_k = a_1 A_1 + \cdots a_{k-1} A_{k-1}$$

البرهان اولاً نفرض ان S مجموعة مرتبطة خطياً المطلوب اثباته يوجد $A_k \in S$ $(k \leq n)$ بحيث A_k تكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه.

بما ان S مجموعة مرتبطة خطياً اذن توجد اعداد قياسية $a_1, \cdots a_n$ ليست جميعها أصفار بحيث

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots a_n A_n = 0 \quad \cdots (1)$$

الان نفرض ان m هو أكبر عدد بين 1 و n بحيث $a_m \neq 0$

وهذا يعني ان $a_{m-1} = \cdots = a_n = 0$

وبهذا يمكننا ان نكتب المعادلة ① على الشكل

$$a_1 A_1 + \cdots\cdots a_m A_m = 0$$

وعليه

$$A_m = \left(\frac{-a_1}{a_m}\right) A_1 + \cdots\cdots + \left(-\frac{a_{m-1}}{a_m}\right) A_{m-1}$$

وهذا يبرهن على ان A_m يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه.

نفرض انه يوجد متجه $A_k \in S$ بحيث يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه.

المطلوب S مرتبطة خطياً.

بما ان $A_k \in S$ ويمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه لأصبح A_k يعتمد خطياً على S، اي ان S مجموعة خطياً.

ملاحظة

المبرهنة اعلاه تختلف عن المبرهنة التي قبلها بنقطتين

الاولى: هي انها تتحدث عن مجموعة منتهية من المتجهات في حين ان المبرهنة التي قبلها تتحدث عن أي مجموعة.

النقطة الثانية هي تنظيمية حيث ان المتجه المراد كتابته كتركيب خطي من الاخريات يعاد ترقيمه بحيث يكون ترتيبه في آخر المتجهات التي يعتمد عليها.

تمارين

كل التمارين الواردة في ص 72-75

القواعد و الفضاءات المنتهية البعد

لاحظنا في موضوع التركيب الخطي وجود مجموعات جزئية من فضاءات المتجهات بإستطاعتها توليد تلك الفضاءات ، اي ان كل متجه في الفضاء يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات تلك المجموعة فمثلاً المجموعة الجزئية $S = \{(1,0),(0,1),(2,4)\}$ من الفضاء R^2 على الحقل R تولد ذلك الفضاء.

بعض الفضاءات مثل فضاء متعددات الحدود ذات المعاملات الحقيقية ومن اي درجة لا يمكن توليدها من قبل مجموعة منتهية من المتجهات. سنركز في دراستنا على الفضاءات التي يمكن توليدها من قبل مجموعة منتهية من المتجهات وسنطلق اسماً معيناً على تلك الفضاءات ثم نطلق اسم (قاعده) على اصغر تلك المجموعات.

تعريف ليكن V فضاء متجهات على الحقل F. يقال بأن V فضاء منتهي البعد اذا وفقط اذا وجدت مجموعة جزئية منتهية S من V بحيث $V = [S]$.

مثال / الفضاء R^n على الحقل R يكون فضاءاً منتهي البعد وذلك لان المجموعة الجزئية

$$S = \{(1,0,0,---0),(0,1,0,---,0), ---- (0,0,---,0,1)\}$$

منتهية وتولد R^n.

فمثلاً عندما $n=3$ تكون $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

وان اي متجه $A = (a_1, a_2, a_3)$ يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات المجموعة S كالآتي

$$A = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1).$$

ملاحظة اذا كان الفضاء منتهي البعد فإنه توجد اكثر من مجموعة جزئية منتهية ومولدة للفضاء فمثلاً المجموعة

$$S = \{(2,0,0),(0,3,0),(0,0,-1),(4,2,7)\}$$

تكون ايضاً مولده للـ R^3

مثال / ليكن $P_\infty(R)$ فضاء المتجهات على الحقل R الذي يحتوي على جميع متعددات الحدود بـ x . ان $P_\infty(R)$ ليس فضاء" منتهي البعد . فإذا فرضنا ان المجموعة الجزئية $S = \{A_1(x) --- A_n(x)\}$ تولد الفضاء لحصلنا على تناقض لان متعددة الحدود $B(x) = xA_n(x)$ تكون متعددة حدود ذات درجة $(n+1)$ و لا يمكن كتابتها كتركيب خطي $A_1(x) ---- A_n(x)$.

في ضوء المثال اعلاه نذكر المبرهنة التالية

مبرهنة

اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد فإنه توجد مجموعة جزئية منتهية ومستقلة خطياً S بحيث $V = [S]$ (اي ان V يولد من قبل مجموعة منتهية ومستقلة خطياً)

البرهان نفرض ان V فضاء متجهات منتهي البعد .
المطلوب اثباته توجد مجموعة جزئية منتهية ومستقلة خطياً S بحيث $V = [S]$

∴ ان V فضاء منتهي البعد فعليه توجد مجموعة جزئية منتهية $S = \{A_1, --- A_n\}$ بحيث $V = [S]$

الآن اذا كانت S مجموعة مستقلة خطياً فإنه لا يوجد شيء يستحق البرهان .

اما اذا كانت S مجموعة مرتبطة خطياً فحسب المبرهنة (المجموعة S تكون مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجد متجه A في S يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S) .

يوجد متجه $A_k \in S$ يعتمد خطياً على بقية المتجهات. بإعادة الترتيب ان اقتضت الضرورة يمكننا ان نفترض ان A_n يمكن كتابته كتركيب خطي من بقية المتجهات $A_1, ---- A_{n-1}$.

لتكن $S_1 = \{A_1, --- A_{n-1}\}$. نلاحظ الآن ان $[S] = [S_1]$.

اذا كانت S_1 مستقلة خطياً انتهى البرهان .
اما اذا كانت مرتبطة خطياً فنحذف المتجه الذي يعتمد خطياً على بقية المتجهات ونحصل على S_2 تحقق $[S_1] = [S_2]$

وهكذا الى ان نصل الى مجموعة جزئية $S_k \subset S$ تكون مستقلة خطياً وتحقق

$$[S_k] = [S_{k-1}] = \cdots [S_1] = [S]$$

وهو المطلوب.

ان المجموعات الجزئية التي تتصف بكونها مولدة ومستقلة خطياً مهمة جداً في تطوير دراسة الموضوع لذلك نقدم التعريف الآتي

تعريف

يقال بأن المجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات V قاعدة الى V اذا وفقط اذا كانت S مجموعة مولدة ومستقلة خطياً.

بما اننا اعطينا امثلة في المواضيع السابقة على مسألتي توليد الفضاء والاستقلال الخطي فاننا سنكتفي بذكر بعض القواعد لبعض الفضاءات دون التحقيق.

مثال / المجموعة $S = \{(1,0,\cdots 0),(0,1,0\cdots 0),\cdots (0,\cdots,1)\}$ المتكونة من n من المتجهات تكون قاعدة للفضاء F^n على الحقل F وذلك لاي عدد طبيعي n ولأي حقل F. هذه القاعدة تسمى القاعدة الطبيعية.

نود الاشارة هنا الى انه بالامكان تواجد قواعد عديدة مختلفة للفضاء نفسه كما في المثال ادناه.

مثال / المجموعات $S_1 = \{(2,0),(0,-1)\}$, $S_2 = \{(1,4),(2,3)\}$ $S_3 = \{(2,5),(0,1)\}$ تعتبر قواعد مختلفة للفضاء R^2 على الحقل $\mathbb{R}$.

مثال / المجموعة

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

تكون قاعدة للفضاء $M_2(R)$ على الحقل $\mathbb{R}$ وتسمى بالقاعدة الطبيعية.

الأمثلة الآتية تبين كيفية أيجاد القواعد لبعض الفضاءات الجزئية.

مثال / جد قاعدة للفضاء الجزئي $M = \{(x,y,z) : 2x - y + z = 0\}$ من فضاء المتجهات R^3 على الحقل R.

الحل / نعوض عن احد المتغيرات وليكن z مثلاً بدلالة المتغيرين الآخرين وعليه يمكن وصف الفضاء الجزئي M كالآتي

$$M = \{(x,y,z) : x = x ,\ y = y ,\ z = y - 2x\}$$

وبذلك كتبنا جميع المتغيرات بدلالة المتغيرين المستقلين x و y.
نأخذ $x=1$ و $y=0$ تكون $z=-2$ وبذلك نحصل على المتجه $(1,0,-2)$
وعندما نأخذ $x=0$ و $y=1$ تكون $z=1$ فنحصل على المتجه $(0,1,1)$
وبذلك حصلنا على متجهين $A_1 = (1,0,-2)$, $A_2 = (0,1,1)$ مستقلين خطياً ومولدين للفضاء M وذلك لانه اذا اخذنا اي متجه في M وليكن $A = (x,y,z)$ حيث $2x - y + z = 0$ فإنه بالامكان كتابة A كتركيب خطي من A_1 و A_2 على النحو الآتي.

$$A = xA_1 + yA_2 .$$

عليه تكون المجموعة $S = \{A_1, A_2\}$ قاعدة للفضاء الجزئي M.

مثال / جد قاعدة للفضاء الجزئي $M = \{(x,y) : y = ix\}$ من الفضاء C^2 على C ثم اعتبر M فضاء جزئيا من C^2 على الحقل R وجد قاعدة له.

الحل / نلاحظ هنا وجود متغير واحد مستقل وهو x ففي حالة كون M فضاءاً جزئياً من الفضاء C^2 على الحقل C نعوض عن $x=1$ ونحصل على متجه واحد $A = (1,i)$ الذي بدوره يكون قاعدة الى M.
اما في حالة كون M فضاءاً جزئياً من الفضاء C^2 على الحقل R فنعوض مرة عن $x=1$ ونحصل على $A_1 = (1,i)$ ومرة عن $x = i$ ونحصل على $A_2 = (i,-1)$ وبذلك تكون المجموعة $S = \{A_1, A_2\}$ عبارة عن قاعدة الى M والسبب هو انه في حالة كون الفضاء C^2 على الحقل R فإن معاملات التركيب الخطي تكون اعداداً حقيقية فلو اخذنا $A = (x,y) \in M$ حيث $y = ix$ ولو كتبنا $x = a + ib$ لاتضح بأن $y = -b + ia$ وبهذه الحالة يمكننا كتابة

$$A = a(1,i) + b(i,-1) = aA_1 + bA_2$$

اي ان S تكون مولدة للفضاء الجزئي M من الفضاء C^2 على الحقل R. وبما ان S مستقلة فهي قاعدة.

(مبرهنة) لتكن $B = \{A_1, \dots A_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء الجزئي M من الفضاء V على الحقل F ولتكن $S = \{C_1, \dots C_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في M عندئذ $m \le n$

نفرض المجموعة B مولدة الفضاء الجزئي M من الفضاء V على الحقل F ولتكن S مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في M

المطلوب اثباته $m \le n$ (اي عدد عناصر المجموعة S اقل او يساوي عدد عناصر المجموعة B)

لننظر الى المجموعة $B_1 = \{C_1, A_1, \dots A_n\}$

بما ان $C_1 \in M$ والمجموعة B مولدة للفضاء M فيكون C_1 معتمداً خطياً على المجموعة B وبذلك تكون المجموعة B_1 مرتبطة خطياً

(حسب المبرهنة التي تقول المجموعة S تكون مرتبطة خطياً $\Longleftrightarrow$ اذا وجد متجه A في S يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S)

الآن حسب المبرهنة التي تنص على

(لتكن $S = \{A_1, \dots A_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات. S تكون مرتبطة خطياً $\Longleftrightarrow$ وجد متجه $A_k \in S$ $(k \le n)$ يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه اي ان $A_k = a_1 A_1 + \dots a_{k-1} A_{k-1}$)

احد المتجهات في B_1 يمكن ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه بإعادة ترقيم المتجهات $A_1, \dots A_n$ ان اقتضت الضرورة يمكننا ان نفترض ان المتجه A_n يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه

نحذف A_n ونلاحظ ان المجموعة $H_1 = \{C_1, A_1 \dots A_{n-1}\}$ تولد الفضاء الجزئي M.

وللاسباب السابقة نفسها نلاحظ أن المجموعة $B_2 = \{C_2, C_1, A_1 \dots A_{n-1}\}$ تكون مرتبطة خطياً وبذلك يمكننا حذف المتجه A_{n-1}

والحصول على المجموعة $H_2 = \{C_2, C_1, A_1, \dots A_{n-2}\}$ المولدة للفضاء الجزئي. نستمر هكذا ففي كل مرة ندخل متجه C_k ونحذف متجه A_j فإذا كانت $m > n$ فإننا سنحصل للمجموعة $H_n = \{C_n \dots C_1\}$ المولدة للفضاء الجزئي M. بذلك تكون المجموعة

$B_{n+1} = \{C_{n+1}, C_n, \dots C_1\}$ مرتبطة خطياً وهذا تناقض

لان المجموعة $\{C_m, C_{n+1}, C_n, \dots C_1\}$ مجموعة مستقلة بالفرض إذن $m \le n$.

(مبرهنة) كل فضاء متجهات لامنتهي البعد عنده قاعدة واي قاعدتين تحتويان على نفس العدد من المتجهات

البرهان H.W .

(تعريف) ليكن V فضاء متجهات منتهي البعد. يسمى عدد عناصر قاعدة V ببعد V ويرمز له بالرمز $\dim(V)$

مثال / لاحظنا ان بعد R^n عندما نكون قاعدة الفضاء R^n هي

$$S = \{(1,0,---,0),(0,1,0,---,0), ------(0,---,0,1)\}$$

يساوي n اي ان $\dim(R^n) = n$.

مثال / ليكن V هو الفضاء C^n على الحقل C بذلك يكون $\dim V = n$

اما اذا اعتبرنا V هو الفضاء C^n على الحقل R فأن $\dim V = 2n$

توضيح هذا المثال يتم من خلال مراجعة المثال رقم (7) ص $\underline{79}$ في الكتاب .

(ملاحظة) على ضوء المبرهنة (ليكن $B = \{A_1, --- A_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء الجزئي M من الفضاء V على الحقل F ولتكن $S = \{C_1, ---- C_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في M عندئذ يكون $m \leq n$) لا يمكن لاي فضاء ان يكون فضاء منتهي البعد اذا احتوى على مجموعة لانهائية من المتجهات المستقلة خطياً.

ولتطبيق هذه الفكرة نورد المثال التالي :

مثال / لقد لاحظنا في مثال سابق ان الفضاء $P_\infty(R)$ ليس فضاءاً منتهي البعد. نلاحظ هذا من خلال الملاحظة اعلاه متعددات الحدود

$$A_1(x) = x,\ A_2(x) = x^2 ----\ A_n(x) = x^n, -----$$

تكون مجموعة مستقلة خطياً ولانهائية وبذلك وحسب الملاحظة اعلاه لا يمكن للفضاء $P_\infty(R)$ المحتوي على تلك المتعددات بأن يكون منتهي البعد.

(مبرهنة) لتكن $B = \{A_1, ------ A_n\}$ قاعدة لفضاء المتجهات المنتهي البعد V. ان اي متجه $A \in V$ يمكن كتابته بطريقة واحدة وواحدة فقط كتركيب خطي: $A = a_1 A_1 + ------- + a_n A_n$

البرهان نفرض ان B قاعدة لفضاء المتجهات المنتهي البعد V و A متجه في V

المطلوب اثباته A يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط كتركيب خطي $A = a_1 A_1 + ----- a_n A_n$

.: ان B قاعدة الى V فإن المتجه $A \in V$ يكون تركيباً خطياً لعناصرها $A_1, ---- A_n$ ولنفرض انه بالصيغة

$$A = a_1 A_1 + ------ a_n A_n$$
$$= b_1 A_1 + ---- b_n A_n$$

اي ان A كتب بطريقتين مختلفتين وبذلك نحصل على

$$(a_1 - b_1) A_1 + (a_2 - b_2) A_2 + ---- (a_n - b_n) A_n = 0$$

.: ان المجموعة $\{A_1, ---- A_n\}$ مستقلة خطياً فعليه

$$a_1 - b_1 = ------- --- = a_n - b_n = 0$$

ومن هنا نستنتج على ان $a_1 = b_1, --------- a_n = b_n$

اي ان A يكتب بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات B.

(مبرهنة) ليكن V فضاء متجهات منتهي البعد ولتكن $A_1, --- A_m$ متجهات مستقلة خطياً في V. توجد متجهات $B_1, ------- $ في V بحيث ان المجموعة $\{A_1, ---, A_m, B_1, ---- B_n\}$ تكون قاعدة الى V.

البرهان نفرض ان V فضاء متجهات منتهي البعد ولتكن $A_1, ---- A_n$ متجهات مستقلة خطياً في V.

المطلوب اثباته توجد متجهات $B_1, ----- B_n$ في V بحيث ان المجموعة $\{A_1, ---- A_m, B_1, ------ B_n\}$ تكون قاعدة للـ V

اذا كان $[A_1, ---- A_m] = V$ اي ان المجموعة $\{A_1, --- A_m\}$ تولد V فانها ستكون قاعدة الى V ولا يوجد شيء يبرهن.

بخلاف ذلك فانه يوجد متجه $B_1 \in V$ لا يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $A_1, ----A_m$
لذلك نستنتج على ان المجموعة $\{A_1, ----A_m, B_1\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً لانه لو كانت مرتبطة خطياً لامكن لاحد متجهاتها ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه حسب مبرهنة سابقة (لتكن $S = \{A_1, ---A_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات . S تكون مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجد متجه $A_K \in S$ $(K \leq n)$ يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه اي ان $A_K = a_1 A_1 + ----- a_{K-1} A_{K-1}$)
هذا المتجه لا يمكن ان يكون A_K $(1 \leq K \leq m)$ لان المجموعة $\{A_1, ----Am\}$ مستقلة خطياً ولا يمكن ان يكون B_1 وذلك بالفرض .
الآن اذا كانت المجموعة $\{A_1, ---, A_m, B_1\}$ مولدة الى V فان البرهان انتهى ، بخلافه يوجد متجه $B_2 \in V$ لا يمكن ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات $A_1, A_2, ---A_m, B_1$ وبذلك نستنتج بأن المجموعة $\{A_1 ---A_m, B_1, B_2\}$ مستقلة خطياً للاسباب السابقة نفسها وهكذا . فاذا كانت مولدة انتهى البرهان وان لم تكن فنضيف متجهاً جديداً .
بما ان V فضاء منتهي البعد ، فان هذه العملية لا بد لها من نهاية ولابد ان نصل الى مجموعة مولدة بعد اضافة عدد محدود من المتجهات $B_1, ----B_n$.
ملاحظة : المبرهنة اعلاه تنص على انه بإمكان اي مجموعة جزئية مستقلة خطياً من فضاء متجهات منتهي البعد ان تكون مجموعة جزئية من قاعدة لذلك الفضاء . بهذه الحالة نقول بأن تلك المجموعة الجزئية قد وسعت الى قاعدة لذلك الفضاء .

مثال / وسع المجموعة $\{(1,2)\}$ الجزئية من R^2 الى قاعدة الى R^2

الحل / بما ان $\dim(R^2)=2$ اذن اي قاعدة الى R^2 يجب ان تحتوي على متجهين. نلاحظ بأن المتجه $(1,0)$ لايمكن ان تكتب كتركيب خطي من المتجه $(1,2)$ بذلك تكون المجموعة $\{(1,2),(1,0)\}$ قاعدة الى R^2. المجموعة $\{(1,2),(3,5)\}$ تكون قاعدة اخرى وهكذا.

مثال / جد قاعدة للفضاء $P_3(R)$ على الحقل R تحتوي على مجموعة المتجهات $\{x+1, 2x^2\}$ المستقلة خطيا.

الحل / يجب اضافة متجهين للمجموعة اعلاه وذلك لان اي قاعدة الى $P_3(R)$ تحتوي على اربعة متجهات بسبب $\dim(P_3(R))=4$ للسهولة نتبع الخطوات التالية في جميع المسائل من هذا النوع

الخطوة الاولى: نضيف متجهات القاعدة الطبيعية للمجموعة المعطاة بهذه الحالة يكون لدينا $x+1, 2x^2, 1, x, x^2, x^3$

الخطوة الثانية نحذف ابتداءً من اليسار كل متجه يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه.

المتجه 1 لايمكن ان يكتب كتركيب خطيا من المتجهات $x+1$ و $2x^2$.

بما ان
$$x = 1.(x+1)+0.(2x^2)+(-1).1$$

نحذف x

وكذلك نحذف x^2 لان x^2 يكتب كتركيب خطيا من 1 و $2x^2$ و $x+1$

وكذلك يكتب كتركيب خطي من x و 1 و $2x^2$ و $x+1$ بالشكل الاتي

$$x^2 = 0(x+1)+\frac{1}{2}(2x^2)+0.(1)$$

$$x^2 = -(x+1)+\frac{1}{2}(2x^2)+(1).1+(1).x$$

وعليه تكون المجموعة $\{x+1, 2x^2, 1, x^3\}$ مستقلة خطياً ومولدة للفضاء $P_3(R)$ وبذلك تكون قاعدة محتوية على المجموعة المستقلة $\{x+1, 2x^2\}$ ،

نتيجة: في اي فضاء متجهات ذي بعد n ، اي مجموعة جزئية تحتوي على n+1 من المتجهات تكون مرتبطة خطياً.

البرهان H.W

نتيجة: اذا كان M فضاءً جزئياً من فضاء المتجهات V فان $\dim M \le \dim V$ بالاضافة الى ذلك فانه اذا كان $\dim M = \dim V$ فان $M = V$.

البرهان H.W.

نتيجة: # اذا كان V فضاء متجهات ذا بعد n فان

1- اي مجموعة جزئية من V متكونة من n من المتجهات تكون قاعدة الى V اذا كانت مستقلة خطياً.

2- اي مجموعة جزئية من V متكونة من n من المتجهات تكون قاعدة الى V اذا كانت تولد V.

البرهان H.W

ملاحظة: النتيجة # مفيدة لانه اذا عرفنا بعد الفضاء فيكفي للمجموعة الجزئية المتكونة من عدد من المتجهات مساوي الى بعد الفضاء بأن تكون قاعدة اذا كانت مستقلة خطياً او مولدة لذلك الفضاء.

مبرهنة: $\dim(M+N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$

البرهان . H.W.

مثال / جد بعد الفضاء الجزئي M+N من R^3 اذا علمت ان

$M = \{(x,y,z) : x - 2y + z = 0\}$ ، $N = \{(x,y,z) : 2x + 5y = 0\}$

ثم برهن على ان $M + N = R^3$

الحل / بتطبيق المبرهنة اعلاه نلاحظ ان

$$\dim(M+N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$$

وعليه لابد اولاً ان نجد ابعاد الفضاءات $M, N, M \cap N$

يمكن اعادة كتابة M و N بالشكل الآتي

$$M = \{(x,y,z) : x = x ,\ y = y ,\ z = -x + 2y\}$$

$$N = \{(x,y,z) : x = x,\ y = -\tfrac{2}{5}x,\ z = z\}$$

وكما وضحنا في الامثلة السابقة فانه بالامكان أختيار المجموعتين

$B = \{(1,0,0),(0,1,2)\}$ ، $C = \{(1,-2/5,0),(0,0,1)\}$

كقواعد الى كل من M و N على الترتيب .بمعنى ان B قاعدة للـ M و C قاعدة للـ N ، وبذلك يكون لدينا :

$$\dim N = 2\ ,\ \dim M = 2 .$$

لحساب $M \cap N$ نفترض ان المتجه $(x,y,z) \in M \cap N$ لذلك يكون لدينا

$$z = -x + 2y \quad --- (1)$$
$$y = (-2/5)x \quad --- (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على

$$z = -x + 2\left(\frac{-2}{5}\right)x$$

$$z = -x - \frac{4}{5}x = -\frac{9}{5}x$$

$$M \cap N = \{(x,y,z) : x = x,\ y = -\tfrac{2}{5}x,\ z = -\tfrac{9}{5}x\}$$

وبهذا يكون لدينا متغير واحد فقط هو المستقل (x) وما أختيار $x = 5$ نحصل على المتجه $(5,-2,-9)$ الذي بدوره يكون قاعدة الى $M \cap N$ وهذا يعني ان $\dim(M \cap N) = 1$

وعليه

$$\dim(M+N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$$
$$= 2 + 2 - 1 = 3$$

اي ان $\dim(M+N) = \dim(R^3)$.

وبما ان $M+N$ فضاء جزئي من R^3 فعليه وحسب نتيجة سابقة [اذا كان M فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V فان $\dim M \leq \dim V$ بالاضافة الى ذلك فانه اذا كان $\dim M = \dim V$ فان $M = V$] يكون $M + N = R^3$.

تمارين

ص 93 - 95

الاحداثيات وتغيير القواعد.

اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F، واذا كانت $S=\{A_1,\ldots A_n\}$ قاعدة الى V فان اي متجه $A\in V$ يمكن كتابته بطريقة واحدة وواحدة فقط كتركيب خطي من متجهات تلك القاعدة. اي ان

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots x_n A_n$$

حيث $x_1, x_2, \ldots x_n \in F$ اعداد قياسية وحيدة.

من الآن فصاعداً سوف نهتم بترتيب المتجهات في القاعدة اي اننا سنتعامل مع قواعد مرتبة لكن لسهولة التعبير سنطلق اسم قاعدة ونفهم من ذلك انها قاعدة مرتبة. فمثلاً القاعدة $\{A_1=(1,0), A_2=(0,1)\}$ للفضاء R^2 سوف تختلف عن القاعدة $\{A_1=(0,1), A_2=(1,0)\}$ على الرغم من كونهما مجموعتين متساويتين لكن الاختلاف هنا بترتيب المتجهات.

تعريف: بمتجه احداثيات المتجه $A\in V$ بالنسبة للقاعدة $S=\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ نقصد المتجه $X=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ حيث ان $x_1, x_2, \ldots x_n \in F$ هي الاعداد القياسية الوحيدة التي تحقق

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots x_n A_n.$$

مثال/ في الفضاء R^2 جد متجه احداثيات المتجه $A=(5,6)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية ثم بالنسبة للقاعدة

$$S=\{A_1=(1,2), A_2=(-1,4)\}$$

الحل/ ان القاعدة الطبيعية الى R^2 هي $\{A_1=(1,0), A_2=(0,1)\}$

عالماً.

$$A=(5,6) = 5(1,0) + 6(0,1)$$
$$= 5A_1 + 6A_2$$

اذن يكون متجه احداثيات $A=(5,6)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية مساوياً للمتجه نفسه اي $X=(5,6)$.

لايجاد متجه احداثيات المتجه $A=(5,6)$ بالنسبة للقاعدة S اعلاه نكتب

نكتب

$$A=(5,6)=x_1A_1+x_2A_2$$
$$=x_1(1,2)+x_2(-1,4)$$
$$(5,6)=(x_1-x_2,\ 2x_1+4x_2)$$

ومن المساواة بين الاحداثيات

$$x_1-x_2=5 \quad ---(1)$$
$$2x_1+4x_2=6 \quad ---(2)$$

نضرب معادلة (1) ب 4 و نجمع المعادلة الناتجة مع معادلة (2)

$$4x_1-4\cancel{x_2}=20$$
$$2x_1+4\cancel{x_2}=6$$

$$6x_1=26 \longrightarrow \quad x_1=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$
$$x_2=-\frac{2}{3}$$

هذا يعني ان متجه احداثيات $A=(5,6)$ بالنسبة للقاعدة S هو $X=\left(\frac{13}{3},\frac{-2}{3}\right)$.

مثال / في الفضاء $P_2(R)$ جد متجه احداثيات المتجه $A=1-x^2$ بالنسبة $S=\{A_1=3,\ A_2=-1+x,\ A_3=x^2\}$

الحل / نكتب

$$A=1-x^2=a(3)+b(-1+x)+c(x^2)$$
$$=(3a-b)+bx+cx^2$$

من المساوات نحصل على

$$3a-b=1 \quad ---(1)$$
$$b=0$$
$$c=-1$$

اذن

$$a=\frac{1}{3},\quad b=0,\quad c=-1$$

عندئذ يكون متجه احداثيات المتجه $A=1-x^2$ بالنسبة للقاعدة S هو $X=\{\frac{1}{3},0,-1\}$.

لقد لاحظنا ان متجه احداثيات اي متجه يعتمد كليا" على المتجه والقاعدة ، فاذا تغيرت القاعده تغير متجه الاحداثيات .
سوف ندرس العلاقة بين احداثيات متجه بالنسبة لقاعدتين مختلفتين ، لكن قبل ذكر العلاقة بصورة عامة سنحاول دراستها من خلال المثال التالي

مثال/ اذا كانت $S=\{A_1, A_2\}$ قاعدة اي R^2 و $S^*=\{A_1^*, A_2^*\}$ قاعدة جديدة اى R^2 بحيث ان

$A_1 = aA_1^* + bA_2^*$ ، $A_2 = cA_1^* + dA_2^*$

اذا كان $X=(x,y)$ هو متجه احداثيات المتجه $A\in R^2$ بالنسبة للقاعدة S نجد $X^*=(x^*, y^*)$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة الجديدة S^* .

الحل/

$$A = x A_1 + y A_2$$
$$= x(a_1A_1^* + bA_2^*) + y(cA_1^* + dA_2^*)$$
$$= (xa_1 + yc)A_1^* + (xb + yd)A_2^*$$

اذن $x^* = (xa_1 + yc)$, $y^* = xb + yd$

$$X^* = (x^*, y^*) = (xa + yc, xb + yb)$$
$$= (x, y)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

لو وضعنا $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

فان العلاقة اعلاه هي $X^* = XP$.

الصف الاول للمصفوفه P هو متجه احداثيات A_1 بالنسبة للقاعدة الجديدة.
والصف الثاني هو متجه احداثيات A_2 بالنسبة للقاعده الجديدة.
نسمي المصفوفة P اعلاه ومصفوفة الانتقال من القاعدة S اى القاعدة S^* .

بصورة عامة اذا كانت $S=\{A_1,\ldots,A_n\}$ قاعدة الى V

و $S^*=\{A_1^*,\ldots,A_n^*\}$ قاعدة جديدة الى V فانه بالامكان

كتابة كل متجه في S كتركيب خطي من متجهات S^* وعلى النحو

التالي

$$A_1 = P_{11}A_1^* + P_{12}A_2^* + \cdots P_{1n}A_n^*$$

$$A_2 = P_{21}A_1^* + P_{22}A_2^* + \cdots P_{2n}A_n^*$$

$$\vdots$$

$$A_n = P_{n1}A_1^* + P_{n2}A_2^* + \cdots P_{nn}A_n^*$$

عندئذ تسمى المصفوفة

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة S^*.

لاحظ ان الصف k للمصفوفة P هو متجه احداثيات $A_k \in S$

بالنسبة للقاعدة الجديدة S^*. اي ان مصفوفة الانتقال من S

الى S^* هي المصفوفة التي تنتج من كتابة متجهات S بدلالة

متجهات S^* على الترتيب.

مثال / جد مصفوفة الانتقال من القاعدة $S=\{\overset{A_1}{(2,1)},\overset{A_2}{(0,3)}\}$

الى القاعدة $S^*=\{\overset{A_1^*}{(-1,0)},\overset{A_2^*}{(3,3)}\}$

الحل / نكتب

$$A_1=(2,1)=P_{11}A_1^*+P_{12}A_2^*$$

$$A_2=(0,3)=P_{21}A_1^*+P_{22}A_2^*$$

نبذلك نحصل على

$$(2,1) = P_{11}(-1,0) + P_{12}(3,3) = (-P_{11} + 3P_{12}, 3P_{12})$$
$$(0,3) = P_{21}(-1,0) + P_{22}(3,3) = (-P_{21} + 3P_{22}, 3P_{22})$$

اي ان

$$-P_{11} + 3P_{12} = 2$$
$$3P_{12} = 1 \longrightarrow P_{12} = \frac{1}{3} \longrightarrow P_{11} = -1$$
$$-P_{21} + 3P_{22} = 0$$
$$3P_{22} = 3 \longrightarrow P_{22} = \frac{3}{3} = 1 \longrightarrow P_{21} = 3$$

عندئذ تكون مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة S^* هي

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

مبرهنة

اذا كانت S قاعدة لفضاء المتجهات المنتهي البعد V و S^* قاعدة جديدة الى V بحيث ان مصفوفة الانتقال من S الى S^* هي P، واذا كان X هو متجه احداثيات المتجه $A \in V$ بالنسبة للقاعدة S فإن $X^* = XP$ يكون متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^*.

البرهان لنفرض ان بعد V هو n ولنفرض ان $S = \{A_1, ---- A_n\}$ و $S^* = \{A_1^*, A_2^*, ---- A_n^*\}$ بما ان $X = (x_1, x_2, --- x_n)$ هو متجه احداثيات المتجه $A \in V$ بالنسبة للقاعدة S.

اذن

$$A = x_1A_1 + x_2A_2 + ---- x_nA_n \quad ------- \#$$

وبما ان $P = (P_{ij})$ هي مصفوفة الانتقال من S الى S^*، اذن

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = P_{11}A_1^* + P_{12}A_2^* + ------ P_{1n}A_n^* \\ A_2 = P_{21}A_1^* + P_{22}A_2^* + ------ P_{2n}A_n^* \\ \vdots \\ A_n = P_{n1}A_1^* + P_{n1}A_2^* + ------ P_{nn}A_n^* \end{array}\right\} \quad ---- \#\#$$

وبتعويض ## في # نحصل على

$$A = x_1 (P_{11} A_1^* + \text{----} P_{1n} A_n^*) + x_2 (P_{21} A_1^* + \text{----} + P_{2n} A_n^*)$$
$$+ \text{-----} x_n (P_{n1} A_1^* + \text{-----} P_{nn} A_n^*)$$

$$= (x_1 P_{11} + x_2 P_{21} + \text{----} + x_n P_{n1}) A_1^* + \text{-----}$$
$$+ (x_1 P_{1n} + x_2 P_{2n} + \text{----} x_n P_{nn}) A_n^*$$

اذا كان $X^* = \{ x_1^*, x_2^*, \text{-----} x_n^* \}$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^* فنحصل على العلاقات التالية.

$$x_1^* = x_1 P_{11} + x_2 P_{21} + \text{-----} x_n P_{n1}$$
$$x_2^* = x_1 P_{12} + x_2 P_{22} + \text{-----} x_n P_{n2}$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = x_1 P_{1n} + x_2 P_{2n} + \text{----} + x_n P_{nn}$$

بمراجعة ضرب المصفوفات يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة الاتية

$$(x_1^*, x_2^*, \text{----} x_n^*) = (x_1, x_2, \text{---} x_n) \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \text{--} & P_{1n} \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \text{--} & P_{nn} \end{bmatrix}$$

اي ان $X^* = XP$.

مثال/ اذا علمت بأن $X = (1, 2, -1)$ هو متجه احداثيات المتجه A بالنسبة للقاعدة $S = \{ \frac{1}{2}, -x, 2x^2 \}$ الى $P_2(R)$ واذا علمت بأن P هي

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من S الى القاعدة $S^* = \{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}$

نجد متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^*

الحل/ بما ان $X = (1,2,-1)$ هو متجه احداثيات المتجه A بالنسبة للقاعدة $\{\frac{1}{2}, -x, 2x^2\}$ فان

$$A = (1)(\tfrac{1}{2}) + (2)(-x) + (-1)(2x^2)$$

$$A = \tfrac{1}{2} - 2x - 2x^2$$

لكن $X^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^* اذن $X^* = XP$.

$$X^* = (1,2,-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (4,2,-1)$$

مثال/ اذا علمت بأن مصفوفة الانتقال من القاعدة $S = \{\overset{A_1}{(2,1)}, \overset{A_2}{(0,3)}\}$ الى القاعدة $S^* = \{A_1^*, A_2^*\}$ لـ R^2 هي

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

نجد A_1^*, A_2^* ثم جد مصفوفة الانتقال من S^* الى S

الحل/ من تعريف مصفوفة الانتقال نحصل على

$$A_1 = (2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}} A_1^* + \frac{2}{\sqrt{5}} A_2^* \quad \text{——— } (1)$$

$$A_2 = (0,3) = -\frac{2}{\sqrt{5}} A_1^* + \frac{1}{\sqrt{5}} A_2^* \quad \text{——— } (2)$$

بضرب (1) بـ 2 وجمعها مع (2) نحصل على

$$(4,5) = \frac{5}{\sqrt{5}} A_2^* \longrightarrow (4,5) = \sqrt{5}\, A_2^*$$

$$\longrightarrow A_2^* = (\tfrac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5})$$

الرتبة الصفية والرتبة العمودية.

من معادلة (1) نحصل على

$$\frac{1}{\sqrt{5}} A_1^* = (2,1) - \frac{2}{\sqrt{5}} A_2^*$$

$$= (2,1) - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right)$$

$$= (2,1) - (8/5, 2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} A_1^* = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$$

$$A_1^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}\right).$$

لنفرض ان

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة S^* الى القاعدة S فيكون لدينا

$$A_1^* = q_{11} A_1 + q_{11} A_2$$

$$A_2^* = q_{21} A_1 + q_{22} A_2$$

اي ان

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}\right) = q_{11}(2,1) + q_{12}(0,3)$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right) = q_{21}(2,1) + q_{22}(0,3)$$

وبحل المعادلات اعلاه نحصل على

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

لاحظ ان $Q = P^{-1}$.

مبرهنة / اذا كانت $S = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ و $S^* = \{A^*_1, A^*_2, \ldots A^*_n\}$
$S^{**} = \{A^{**}_1, A^{**}_2, \ldots A^{**}_n\}$ قواعد للفضاء V و P هي مصفوفة الانتقال من S الى S^* و Q مصفوفة الانتقال من S^* الى S^{**} فان PQ تكون مصفوفة الانتقال من S الى S^{**}

البرهان H.W .

نتيجة / اذا كانت P مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة S^* فان P^{-1} تكون مصفوفة الانتقال من S' الى S .

البرهان ان مصفوفة الانتقال من S الى S هي المصفوفة المحايدة . فاذا كانت Q مصفوفة الانتقال من S^* الى S فان PQ تكون مصفوفة الانتقال من S الى S . اي $PQ = I$
وبذلك يكون $Q = P^{-1}$.

مثال / جد المتجه A في $P_2(R)$ الذي متجه احداثياته بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = -1, A_2 = 1 + x, A_3 = 2x^2\}$ هو المتجه $X = \{-2, 0, 1\}$

الحل / من تعريف متجه الاحداثيات نحصل على

$$A = (-2) A_1 + (0) A_2 + (1) A_3$$
$$A = (-2)(-1) + (0)(1 + x) + (1)(2x^2)$$
$$A = 2 + 2x^2$$

تمارين

<u>كل التمارين الواردة في كتاب الجبر الخطي ص 105 الى 108</u>

الرتبة الصفية والرتبة العمودية.

تعريف لتكن A مصفوفة درجتها $(n \times m)$ على الحقل K
الفضاء الصفي لـ A هو الفضاء الجزئي من K^n المتولد بصفوفها
وأن الفضاء العمودي هو الفضاء الجزئي من K^m المتولد بأعمدتها
وعليه بعد الفضاء الصفي و الفضاء العمودي لـ يسميان على الترتيب
الرتبة الصفية والرتبة العمودية لـ A.

ملاحظة رتبة الصف ورتبة العمود للمصفوفة A متساويتان.

مثال جد الرتبة الصفية والعمودية للمصفوفة الآتية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{---}\ R_1 \\ \text{---}\ R_2 \\ \text{---}\ R_3 \end{array}$$

الحل / باستخدام العمليات الصفية نحصل على

$$R_2 = R_2 - 2R_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_3 - 3R_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_3 - 2R_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة الصفوف غير الصفرية في المصفوفة تكون مستقلة خطياً.

وبما ان عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة A يساوي $\underline{2}$ هذا يعني ان قاعدة الفضاء الصفي لـ A تتكون من متجهين وعليه يكون بعد الفضاء الصفي لـ A هو 2 وكذلك بعد الفضاء العمودي لـ A .

اذن الرتبة الصفية = 2 وكذلك العمودية تساوي $\underline{2}$.

حاصل الضرب القياسي .

ليكن u و v متجهين في $\mathbb{R}^n$ بحيث ان

$$u = (u_1, u_2, ---, u_n) \quad \& \quad v = (v_1, v_2, ---- v_n)$$

حاصل الضرب القياسي للمتجهين u و v والذي يرمز له بالرمز $u.v$ هو العدد القياسي الذي نحصل عليه بضرب المركبات المناظرة ثم جمع حاصل الضرب

$$u.v = (u_1, u_2, --- u_n).(v_1, v_2, --- v_n)$$
$$= u_1.v_1 + u_2.v_2 + ---- u_n.v_n \ .$$

تعريف

يقال للمتجهين u و v أنهما متعامدان اذا كان حاصل الضرب القياسي صفراً اي اذا كان $u.v = 0$

مثال / ليكن $u = (1, -2, 3, -4)$ ، $v = (6, 7, 1, -2)$
$w = (5, -4, 5, 7)$

جد $u.v$ و $u.w$

$$u.v = (1, -2, 3, -4).(6, 7, 1, -2)$$
$$= (1)(6) + (-2)(7) + (3)(1) + (-4)(-2)$$
$$= 6 - 14 + 3 + 8 = 3$$

$$u \cdot w = (1,-2,3,-4) \cdot (5,-4,5,7)$$

$$= (1)(5) + (-2)(-4) + (3)(5) + (-4)(7)$$

$$= 5 + 8 + 15 - 28 = 0$$

وعليه u و w متعامدات.

الخواص الاساسية لحاصل الضرب القياسي في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

اذا كانت المتجهات $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ وكان $K \in \mathbb{R}$ فأن

1) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

2) $(Ku) \cdot v = K(u \cdot v)$

3) $u \cdot v = v \cdot u$

4) $u \cdot u \geq 0$ and $u \cdot u = 0 \iff u = 0$

الضرب الاتجاهي

تعريف اذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$ اي متجهين في الفضاء $\mathbb{R}^3$ عندئذ نعرف الضرب الاتجاهي والذي يرمز له بالرمز $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2 , u_3 v_1 - u_1 v_3 , u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

أو بواسطة المحددات

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

(مثال) جد $\vec{u} \times \vec{v}$ عندما $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (3, 0, 4)$

قبل البدء بحل المثال نقدم ملاحظة تفيد في استذكار قانون الضرب الاتجاهي وهي تكتب المتجهين بالصيغة العامة في مصفوفة اي

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

بحذف العمود الاول نحصل على عناصر المحدد الاول
وبحذف العمود الثاني نحصل على عناصر المحدد الثاني
وبحذف العمود الثالث نحصل على عناصر المحدد الثالث .

نعود لتطبيق القاعدة على المثال اعلاه
تكتب المتجهات كصفوف بالشكل الاتي

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (3 \times 4 - 0 , -(1 \times 4 + 2 \times 3) , (0 - 9))$$

$$= (12 , -10 , -9)$$

(ملاحظة)
ناتج الضرب الاتجاهي هو متجه بينما ناتج الضرب العددي (القياسي)
هو عدد .

المبرهنة الاتية تعطي علاقة بين الضرب العددي و الضرب الاتجاهي وتبين ان $\vec{u} \times \vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

مبرهنة: اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهين في فضاء $\mathbb{R}^3$ عندئذ

1) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \longrightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$

2) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \longrightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

3) $\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$.

حيث ان $\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ اذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$

ملاحظة المتطابقة الاخيرة تسمى متطابقة لاكرانج.

برهان ① ليكن $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= \cancel{u_1 u_2 v_3} - \cancel{u_1 u_3 v_2} + \cancel{u_2 u_3 v_1} - \cancel{u_2 u_1 v_3} + \cancel{u_3 u_1 v_2} - \cancel{u_3 u_2 v_1} = 0$$

برهان ② و ③ H.w.

مبرهنة: اذا كان u, v, w ثلاثة متجهات في فضاء $\mathbb{R}^3$ وكان k اي عدد قياسي فان

1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

2) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

3) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

4) $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$

5) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}$

6) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ 　　　　البرهان / H.w

التحويلات الخطية

تعريف ليكن V و W فضائي متجهات على الحقل F نفسه

ولتكن $T: V \longrightarrow W$ دالة تحقق

1) $T(A+B) = T(A) + T(B)$

2) $T(rA) = rT(A)$.

وذلك لاي متجهات $A, B \in V$ ولاي عدد قياسي $r \in F$

بهذه الحالة نسمي T تحويلاً خطياً من V الى W.

مثال ليكن $V = R^3$ و $W = R^2$ ولتكن $T: R^3 \longrightarrow R^2$

دالة معرفة بالصيغة $T(x, y, z) = (x+y, z)$

الحل / لكي تكون T تحويلاً خطياً لابد ان تحقق الشرطين الواردين

في التعريف اعلاه وعليه نفرض اولاً

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad , \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

1)
$$T(A+B) = T(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$= (a_1+b_1+a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$= (a_1+a_2, a_3) + (b_1+b_2, b_3)$$
$$= T(A) + T(B)$$

2) ليكن $r \in R$ اي عدد حقيقي

$$T(rA) = T(ra_1, ra_2, ra_3)$$
$$= (ra_1+ra_2, ra_3)$$
$$= r(a_1+a_2, a_3)$$
$$= rT(A)$$

من 1 و 2 نستنتج ان T تحويل خطي.

مثال { الدالـــة $T: P_2(R) \to M_2(R)$ المعرفة بالصيغة

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a-2b & 0 \\ 0 & a+c \end{bmatrix}$$

هل ان T تحويلاً خطياً او لا ؟

الحل / ليكن $A, B \in P_2(R)$ بحيث

$$A = a_1 + b_1 x + c x^2 \quad \& \quad B = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$$

لكي يكون T تحويل خطي لابد من تحقيق الشرطين الواردين في التعريف .

١) الشرط الاول

$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$

$$T(a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + a_1 + b_2 x + c_2 x^2) = T(a_1 + a_2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)x^2)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 - 2(b_1+b_2) & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 + c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - 2b_1 & 0 \\ 0 & a_1 + c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 - 2b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$= T(A) + T(B)$$

اذن الشرط الاول متحقق .

الشرط الثاني

$$T(rA) = rT(A)$$

$$T(r(a+bx+cx^2)) = T(ra + rbx + rcx^2)$$

$$= \begin{bmatrix} ra - 2rb & 0 \\ 0 & ra + rc \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} a-2b & 0 \\ 0 & a+c \end{bmatrix} = rT(A)$$

مثال: اذا كان V و W اي فضائي متجهات على الحقل F فان الدالة الثابتة $T: V \rightarrow W$ والمعرفة بالصيغة $T(A) = 0$ لكل $A \in V$ تكون تحويلاً خطياً يسمى التحويل الصفري.

البرهان: H.W

مثال: اذا كان V اي فضاء متجهات فان الدالة $T: V \rightarrow V$ المعرفة بالصيغة $T(A) = A$ لكل $A \in V$ تكون تحويلاً خطياً يسمى بالتحويل المحايد.

البرهان: H.W

مثال: برهن على ان الدالة $T: R^2 \rightarrow R$ المعرفه بالصيغة

$$T(x, y) = xy + 1$$

ليست تحويلاً خطياً.

البرهان: ليكن $A = (a_1, a_2)$ و $B = (b_1, b_2)$ فأن

$$T(A+B) = T(a_1+b_1, a_2+b_2)$$

$$= (a_1+b_1)(a_2+b_2) + 1$$

$$= a_1a_2 + a_2b_1 + a_1b_2 + b_1b_2 + 1$$

لكن

$$T(A) + T(B) = a_1a_2 + 1 + b_1b_2 + 1$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2 + 2$$

وبهذا أصبح واضحاً ان $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$

وعليه T ليس تحويل خطيا.

مثال: الدالة $T: R^2 \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة $T(x, y) = 2x$

تكون تحويل خطي.

البرهان: H.W

مبرهنة: اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلاً خطياً بين الفضائين V و W
على الحقل F فان
1) $T(0) = 0$
2) لاي مجموعة متجهات $A_1, A_2, \ldots A_n \in V$ ولأي مجموعة
اعداد قياسية $x_1, x_2, \ldots x_n \in F$ يكون لدينا

$$T(x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots x_nA_n) = x_1T(A_1) + \cdots x_nT(A_n)$$

البرهان
① عا ان $A = 0$ ولأي متجه $A \in V$ يكون $0 = 0.0$ حيث
$0 \in F$ وحسب الشرط الثاني من تعريف التحويل الخطي يكون
لدينا

$$T(0) = T(0.0) = 0.T(0) = 0$$

② من التعريف ثبت المطلوب.

ملاحظة: المبرهنة التالية توضح لنا كيف انه بالامكان معرفة التحويل
الخطي بمجرد معرفة قيمته على عناصر اي قاعدة كانت.

مبرهنة: # اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وكانت $\{A_1, \ldots A_n\}$
قاعدة الى V فانه لاي مجموعة $\{B_1 \ldots B_n\}$ متكونة من n
من المتجهات العشوائية في W. يوجد تحويل خطي وحيد
$T: V \longrightarrow W$ يحقق

$$T(A_1) = B_1 \quad \ldots \quad T(A_n) = B_n$$

ولأي اعداد قياسية $x_1, x_2, \ldots x_n$ يكون

$$T(x_1A_1 + \cdots x_nA_n) = x_1B_1 + \cdots x_nB_n$$

البرهان سنبرهن اولاً بانه يوجد تحويل خطي $T: V \longrightarrow W$ يحقق
الشرطين اعلاه ولهذا الغرض نأخذ $A \in V$ اي متجه.
عا ان المجموعة $\{A_1, \ldots A_n\}$ قاعده لـ V بالفرض
اذن توجد اعداد قياسية وحيدة $x_1, x_2, \ldots x_n$
حيث $A = x_1A_1 + \cdots x_nA_n$
لو وضعنا $T(A) = x_1B_1 + \cdots x_nB_n$ لنكون قد عرفنا دالة
$T: V \longrightarrow W$ ولغرض التحقق من ان الدالة اعلاه تكون تحويلاً
خطياً نأخذ A, C اي متجه في V ولنفرض ان

$$A = x_1 A_1 + \cdots x_n A_n \ \& \ C = y_1 A_1 + \cdots + y_n A_n$$

بذلك يكون

$$A + C = (x_1 + y_1) A_1 + \cdots (x_n + y_n) A_n$$

ومن تعريف الدالة T اعلاه نحصل على :

$$T(A+C) = (x_1 + y_1) B_1 + \cdots (x_n + y_n) B_n$$

$$= x_1 B_1 + \cdots x_n B_n + y_1 B_1 + \cdots + y_n B_n$$

$$= (x_1 B_1 + \cdots x_n B_n) + (y_1 B_1 + \cdots y_n B_n)$$

$$= T(A) + T(C)$$

ليكن الآن r أي عدد قياسي

اذن

$$rA = (rx_1) A_1 + \cdots + (rx_n) A_n$$

وعليه يكون

$$T(rA) = (rx_1) B_1 + \cdots (rx_n) B_n$$

$$= r(x_1 B_1 + \cdots x_n B_n)$$

$$= rT(A)$$

بهذا نكون قد برهنا على ان الدالة T اعلاه تكون تحويلاً خطياً محققاً الشروط المذكورة . مثل هذا التحويل يكون وحيداً

لانه لو كان $S : V \longrightarrow W$ اي تحويل خطي محققاً للشروط

$$S(A_1) = B_1 , \cdots S(A_n) = B_n$$

فان

$$S(x_1 A_1 + \cdots x_n A_n) = x_1 S(A_1) + \cdots + x_n S(A_n)$$

$$= x_1 B_1 + \cdots x_n B_n$$

وبالتالي يتحقق S الشرط الثاني ويكون مساوياً الى T.

مثال) اعتبر المجموعة $\{A_1=(1,0)\ ,\ A_2=(2,7)\}$ قاعدة لـ R^2
ثم جد تحويلاً خطياً $T: R^2 \longrightarrow P_2(R)$ يحقق

$$T(A_1) = 1+x \qquad T(A_2) = -1+x-3x^2$$

الحل/ المطلوب ايجاد $T(A)$ لاي متجه $A=(a,b)\in R^2$ نحاول اولاً
ايجاد اعداد قياسية x_1, x_2 تحقق

$$A = x_1(1,0) + x_2(2,7)$$
$$= (x_1+2x_2\ ,\ 7x_2)$$

وبهذا نحصل على معادلتين

$$x_1+2x_2 = a \quad ---- (1)$$
$$7x_2 = b \quad ---- (2)$$
$$x_2 = \frac{b}{7} \quad ---- (3)$$

نعوض (3) في (1)

$$x_1 + \frac{2}{7}b = a \longrightarrow x_1 = a - \frac{2}{7}b$$

الآن نعرف $T: R^2 \longrightarrow P_2(R)$ بالصيغة التالية

$$T(A) = T(a,b) = x_1(1+x) + x_2(-1+x-3x^2)$$
$$= \left(a-\frac{2}{7}b\right)(1+x) + \frac{b}{7}(-1+x-3x^2)$$
$$= \left(a-\frac{3b}{7}\right) + \left(a-\frac{b}{7}\right)x + \left(\frac{-3b}{7}\right)x^2$$

ملاحظة) المبرهنة السابقة (#*) توضح ان التحويلات الخطية ليست دوال عادية وكذلك فان قواعد فضاءات المتجهات ليست مجموعة جزئية عادية. فبمجرد معرفتنا لقيم التحويل الخطي على عناصر القاعدة نكون قد حددنا التحويل الخطي وعرفنا قيمته على جميع عناصر الفضاء.

مثال / هل يوجد تحويل خطي واحد فقط $T: R^2 \longrightarrow R^3$

يحقق $T(1,2) = (0,3,0)$

الحل / نلاحظ هنا ان المعروف فقط قيمة T على متجه واحد وهو (1,2)

وبما ان المجموعة $\{(1,2)\}$ لا تصلح بأن تكون قاعدة الى R^2

فعليه نتوقع وجود أكثر من تحويل واحد.

الآن اذا كان T تحويلاً خطياً بحيث $T(1,2) = (0,3,0)$

فإن $T(x,2x) = T(x(1,2)) = xT(1,2)$

$$= x(0,3,0) = (0,3x,0)$$

هذا يعني اننا سنعرف قيم T على جميع المتجهات ذات الصيغة

$(x,2x)$ فمثلاً المتجه (2,3) لا يكون بالصيغة اعلاه وبالتالي

لا نعرف اين يرسله T لكن لو اعطينا اي قيمة الى $T(2,3)$

مثل $T(2,3) = (1,1,0)$ لا صبح بالامكان معرفة

$T(a,b)$ لأي متجه (a,b) من R^2 وذلك كما في المثال السابق

هذا يعني وجود تحويلات كثيرة ترسل المتجه (1,2)

الى المتجه (0,3,0) لكنها تختلف بكيفية ارسالها للمتجهات

ذات الصيغة (a,b) حيث $b \neq 2a$.

الآن نعرف جمع التحويلات الخطية وضربها بأعداد قياسية.

تعريف # لأي فضائي متجهات V و W على الحقل F نفسه

ولأي تحويلين خطيين $S,T: V \longrightarrow W$ يمكن تعريف

دالة $S+T: V \longrightarrow W$

بالصيغة الآتية $(S+T)(A) = S(A) + T(A)$

كذلك فإنه لأي عدد قياسي $r \in F$ يمكن تعريف

دالة

$rT: V \longrightarrow W$

بالصيغة الآتية

$(rT)(A) = rT(A)$

مثال { اذا كان $S, T: R^2 \longrightarrow R^2$ تحويلين خطيين معرفين بالصيغتين

$$S(x,y) = (x, 2y) \quad , \quad T(x,y) = (y,0)$$

فجد $S+T$ و $2S-5T$

الحل/ من تعريف الجمع والضرب بعدد قياسي نحصل على #

$$(S+T)(x,y) = S(x,y) + T(x,y)$$

$$(S+T)(x,y) = (x,2y) + (y,0)$$

$$(S+T)(x,y) = (x+y, 2y)$$

$$(2S-5T)(x,y) = (2S+(-5T))(x,y)$$

$$= (2S)(x,y) + (-5T)(x,y)$$

$$= 2S(x,y) + (-5)T(x,y) = 2(x,2y) - 5(y,0)$$

$$= (2x,4y) - (5y,0)$$

$$= (2x-5y, 4y).$$

مبرهنة { لأي تحويلين خطيين $S,T: V \longrightarrow W$ ولأي عدد قياسي r تكون كل من الدالتين $S+T$ و rT تحويلاً خطياً

البرهان: نأخذ A و B اي متجهين في V كما يلي

$$(S+T)(A+B) = S(A+B) + T(A+B)$$

$$= S(A) + S(B) + T(A) + T(B)$$

$$= S(A) + T(A) + S(B) + T(B)$$

$$= (S+T)(A) + (S+T)(B)$$

$x + 24 = 0$

ولأي عدد قياسي x يكون

$$(S+T)(xA) = S(xA) + T(xA)$$
$$= xS(A) + xT(A)$$
$$= x(S(A) + T(A))$$
$$= x((S+T)(A)).$$

بالنسبة لاثبات rT تحويل خطي نستخدم نفس الاسلوب لذلك نترك البرهان واجب على الطلبة.

مبرهنة اذا كان كل من V ، W فضاء متجهات على الحقل F فان مجموعة جميع التحويلات الخطية من V الى W والتي يرمز لها بالرمز $L(V,W)$ تكون فضاء متجهات على الحقل F.

البرهان H.W

مثال اذا كان V فضاء متعددات الحدود ب x من اي درجة وذات المعاملات من اي حقل F فان V فضاء متجهات على الحقل F ولتكن $S : V \longrightarrow V$ دالة معرفة بالصيغة $S(P(x)) = P'(x)$

حيث $P'(x)$ مشتقة $P(x)$

و $T : V \longrightarrow V$ دالة معرفة بالصيغة $T(P(x)) = xP(x)$

فبرهن على ان كل من S و T تحويلا خطيا.

الحل/ لاثبات ان S تحويل خطي نفرض ان $P(x)$ و $q(x)$ عنصران في V و $r \in F$

المطلوب اثباته

$$* \quad S(P(x) + q(x)) = S(P(x)) + S(q(x))$$

$$** \quad S(rP(x)) = rS(P(x))$$

$$* \quad S(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))'$$
$$= p'(x)+q'(x)$$
$$= S(p(x))+S(q(x))$$

$$** \quad S(rp(x)) = (rp(x))' = rp'(x) = rS(p(x)).$$

وعليه S تحويل خطي.

الآن لاثبات ان T تحويل خطي نفرض ان

$p(x), q(x) \in V$ و $r \in F$

المطلوب اثباته

$$* \quad T(p(x)+q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$$
$$** \quad T(rp(x)) = rT(p(x))$$

$$* \quad T(p(x)+q(x)) = x(p(x)+q(x))$$
$$= xp(x) + xq(x)$$
$$= T(p(x)) + T(q(x))$$

$$** \quad T(rp(x)) = x(rp(x)) = r(xp(x))$$
$$= rT(p(x)).$$

وعليه T تحويل خطي.

التمارين

كل التمارين الواردة في الكتاب من ص $\underline{121}$ - الى ص $\underline{123}$.

الرتبة والصفرية

تعريف : لأي تحويل خطي $T: V \longrightarrow W$ بين فضائي متجهات يمكن تعريف مايلي

1- صورة T ويرمز لها بالرمز $Im(T)$ وتعرف كالآتي

$$Im(T) = \{B \in W : B = T(A), A \in V\}$$

2- نواة T ويرمز لها بالرمز $Ker(T)$ وتعرف كالآتي

$$Ker(T) = \{A \in V : T(A) = 0\}$$

لاحظ ان $Im(T) \subseteq W$ و $Ker(T) \subseteq V$

مثال ### اذا كان $T: R^3 \longrightarrow R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 0, 3z)$$

نجد المجموعات الجزئية $Ker(T)$ و $Im(T)$.

الحل / لايجاد $Ker(T)$ نحاول حل المعادلة

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 0, 3z) = (0, 0, 0)$$

وعليه نحصل على $x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y$

$$0 = 0$$

$$3z = 0 \longrightarrow z = 0$$

$$Ker(T) = \{(x, y, z) : x = -2y, y = y, z = 0\}$$

اما بالنسبة الى $Im(T)$ فإننا نبحث عن جميع المتجهات $B = (a, b, c) \in W$ التي تحقق $T(x, y, z) = B$

$$T(x, y, z) = (a, b, c)$$

$$(x + 2y, 0, 3z) = (a, b, c)$$

اي ان

$$x+2y=a$$
$$0=b$$
$$3z=c$$

نلاحظ هنا بأن $b=0$ اما بالنسبة الى a و c فلا يوجد شرط يحدد قيمتيهما و لا توجد علاقة تربطهما، بالتالي يمكن وصف $Im(T)$ كالآتي

$$Im(T)=\{(a,b,c):a=a\ ,\ b=0\ ,\ c=c\}$$

وبهذا نلاحظ ان $T(a,0,\frac{c}{3})=(a,0,c)$ اي انه لأي متجه $(a,0,c)\in Im(T)$ يوجد $(a,0,\frac{c}{3})\in R^3$ تحقق

$$T(a,0,\frac{c}{3})=(a,0,c).$$

مبرهنة: لأي تحويل خطي $T:V\longrightarrow W$ يكون لدينا

1- $Ker(T)$ فضاء جزئي من V
2- $Im(T)$ فضاء جزئي W

البرهان

1- لبرهنة ان $Ker(T)$ هو فضاء جزئي، يجب ان نبرهن انه مغلق بالنسبة للجمع و الضرب في اعداد قياسية.
نأخذ A_1 و A_2 متجهين في $Ker(T)$ و r اي عدد قياسي فيكون

$$*\quad T(A_1+A_2)=T(A_1)+T(A_2)$$
$$=0+0=0$$

اذن $A+B$ ينتمي الى $Ker(T)$

$$**\quad T(rA_1)=rT(A_1)=r.0=0$$

أي ان $rT\in Ker(T)$.

2- نأخذ الآن B_1,B_2 في $Im(T)$ و r اي عدد قياسي. لبرهنة ان $Im(T)$ هو فضاء جزئي من W يجب البرهنة على ان $B_1+B_2\in Im(T)$ و $rB_1\in Im(T)$

اي اننا يجب ان نجد متجهين A و C في V يحققان

$$T(C) = rB_1 \quad \text{و} \quad T(A) = B_1 + B_2$$

علما ان $B_1, B_2 \in \operatorname{Im} T$ فانه يوجد $A_1, A_2 \in V$ حيث.

$$T(A_1) = B_1 \quad \text{و} \quad T(A_2) = B_2$$

نعتبر الآن $A = A_1 + A_2$ و $C = rA_1$

$$* \; T(A) = T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$$
$$= B_1 + B_2$$

وايضاً

$$T(C) = T(rA_1) = rT(A_1)$$
$$= rB_1$$

اي ان $rB_1 \in \operatorname{Im}(T)$

هذا يعني ان كل من $\operatorname{Ker}(T)$ و $\operatorname{Im}(T)$ يكون فضاءً جزئياً.

على ضوء المبرهنة اعلاه نقدم التعريف الآتي :

تعريف

بصفرية T نقصد بعد الفضاء الجزئي $\operatorname{Ker}(T)$

اي $\dim(\operatorname{Ker}(T))$ وبرتبة T نقصد بعد الفضاء الجزئي $\operatorname{Im}(T)$ اي $\dim(\operatorname{Im}(T))$.

مثال / جد صفرية ورتبة التحويل الخطي $T : R^3 \longrightarrow R^3$ والمعرف بالصيغة الآتية $T(x, y, z) = (x + 2y, 0, 3z)$.

الحل / الخطوة الاولى نجد $\operatorname{Ker}(T)$ و $\operatorname{Im}(T)$ بنفس الطريقة في المثال #*# وعليه.

$$\operatorname{Ker}(T) = \{(x, y, z) : x = -2y, \; y = y, \; z = 0\}$$

$$\operatorname{Im}(T) = \{(a, b, c) : a = a, \; b = 0, \; c = c\}$$

الخطوة الثانية نجد قاعدة الفضاء الجزئي $Ker(T)$ وكذلك قاعدة الفضاء الجزئي $Im(T)$.

بالنسبة لقاعدة $Ker(T)$ ∴ ان المتغير المستقل الوحيد فيها هو y فإذا فرضنا $y = 1$ فأننا نحصل على المجموعة $S = \{(-2, 1, 0)\}$ والتي تمثل قاعدة لـ $Ker(T)$

وبالنسبة لقاعدة $Im(T)$ فأننا اذا فرضنا $a = 1, c = 0$ نحصل على $(1, 0, 0)$ واذا فرضنا $a = 0, c = 1$ نحصل على $(0, 0, 1)$ وعليه تكون المجموعة $H = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ قاعدة الـ $Im(T)$.

وعليه $\dim(Ker) = 1$ و $\dim(Im(T)) = 2$

اي ان صفرية $T = 1$ ورتبة $T = 2$.

مبرهنة: اذا كان $T : V \to W$ تحويلاً خطياً فان

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$$

البرهان. H.W.

مثال / جد رتبة وصفرية التحويل الخطي $T : R^3 \to R^2$ المعرف بالصيغة $T(x, y, z) = (y, z)$

∴ ان التحويل اعلاه هو تطبيق شامل اي ان $Im(T) = R^2$ وعليه يكون رتبة التحويل T هو 2

و∴ ان

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$$

اذن $V = R^3$ $\dim(V) = 3$

$$\dim(Ker(T)) = \dim(V) - \dim(Im\,T) = 3 - 2 = 1$$

(مثال) برهن على ان اي تحويل شامل $T: R^n \longrightarrow R^n$
يجب ان يكون متباين.

البرهان: بما ان T شامل

اذن $Im(T) = R^n$ وعليه تكون رتبة T مساوية n

وبتطبيق مبرهنة سابقة $(\dim(V) = \dim(Ker T) + \dim(Im T))$

نحصل على

$$\dim(Ker T) = n - n = 0$$

وهذا يعني ان $Ker\, T = \{\emptyset\}$

الآن نفرض $T(A) = T(B)$

المطلوب اثباته $A = B$

بما ان

$$T(A) = T(B)$$

$$\longrightarrow T(A) - T(B) = \emptyset$$

$$\longrightarrow T(A - B) = \emptyset$$

وهذا يعني $A - B \in Ker T$ وعليه $A - B = \emptyset$

$\longrightarrow$ $A = B$ وهو المطلوب

اي ان T تطبيق متباين

(مبرهنة) اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلاً خطياً

1) T متباين اذا وفقط اذا $Ker(T) = \emptyset$

2) T شامل اذا وفقط اذا $Im = W$

البرهان. H.W.

مثال/ جد تحويل خطياً $T: R^3 \longrightarrow R^2$ بحيث ان المجموعة $\{A_1 = (1,-1,0) , A_2 = (2,0,1)\}$ تكون قاعدة لنواته.

الحل / التحويل المطلوب يجب ان يحقق

$$T(A_1) = T(1,-1,0) = (0,0)$$
$$T(A_2) = T(2,0,1) = (0,0)$$

المبرهنة (اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وكانت $\{A_1, ---A_n\}$ قاعدة الى V فانه لاي مجموعة $\{B_1, --- B_n\}$ متكونة من n من المتجهات العشوائية في W يوجد تحويل خطي وحيد $T: V \longrightarrow W$ يحقق

$$T(A_1) = B_1 \quad ----- \quad T(A_n) = B_n$$

ولأي اعداد قياسية $x_1, ----- x_n$ يكون

$$T(x_1A_1 + ----- x_nA_n) = x_1B_1 + --- x_nB_n$$)

تضمن لنا ايجاد التحويل بعد معرفتنا لقيمه على عناصر أي قاعدة كانت.

لنأخذ المتجه $A_3 = (0,0,1)$ ونلاحظ المجموعة

$$\{A_1 = (1,-1,0) , A_2 = (2,0,1) , A_3 = (0,0,1)\}$$

تكون قاعدة الى R^3. لنرسل المتجه A_3 بواسطة T الى اي متجه غير صفري في R^2 وليكن $T(A_3) = (1,-1)$

لانه عند وضع $T(A_3) = (0,0)$ فأن A_3 ينتمي لـ $Ker(T)$ وبذلك يكون $Ker(T) = R^3$ والتحويل T لن يكون التحويل المطلوب.

الآن اذا كان

$$(x,y,z) = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

$$T(x,y,z) = aT(A_1) + bT(A_2) + cT(A_3)$$
$$= a(0,0) + b(0,0) + c(1,-1)$$
$$= c(1,-1)$$

اذن المطلوب ايجاد قيمة c

فاان

$$(x,y,z) = aA_1 + bA_2 + cA_3$$
$$= a(1,-1,0) + b(2,0,1) + c(0,0,1)$$
$$= (a+2b, -a, b+c)$$

$x = a + 2b$ ---- (1)

$y = -a$ ---- (2)

$z = b + c$ ---- (3)

وبحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على

$$a = -y \quad , b = \frac{1}{2}(x+y) \quad , c = z - \frac{1}{2}(x+y)$$

وعليه

$$T(x,y,z) = c(1,-1)$$
$$= \left(z - \frac{1}{2}(x+y), -z + \frac{1}{2}(x+y)\right)$$

[illegible]

مصفوفة التحويل الخطي

اذا كان كل من V و W فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F نفسه بحيث $\dim(V) = m$ و $\dim(W) = n$ واذا كان $T : V \longrightarrow W$ تحويلاً خطياً فإنه بالإمكان ايجاد مصفوفة $m \times n$ عناصرها من الحقل F وتعتمد اعتماداً كلياً على التحويل الخطي T وعلى القواعد المختارة الى كل من V و W وعلى النحو التالي

لنفرض ان $H = \{A_1, \ldots, A_m\}$ قاعدة الى V وان $S = \{B_1, \ldots, B_n\}$ قاعدة الى W الآن لكل $i = 1, \ldots, m$ يكون $T(A_i)$ متجهاً في W وبالتالي يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $B_1, \ldots, B_n$ وبطريقة واحدة فقط. اذا وضعنا

$$\left.\begin{aligned} T(A_1) &= a_{11} B_1 + \cdots + a_{1n} B_n \\ T(A_2) &= a_{21} B_1 + \cdots + a_{2n} B_n \\ &\vdots \\ T(A_m) &= a_{m1} B_1 + \cdots a_{mn} B_n . \end{aligned}\right\} \text{——— } *** $$

فنحصل على مصفوفة

$$M_T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ———— } \#\#\#$$

علاقة هذه المصفوفة بالتحويل الخطي T وبالقواعد H و S موضحة بالمبرهنة التالية.

مبرهنة ** اذا كان $X = (x_1, \ldots, x_m)$ متجه احداثيات المتجه $A \in V$ بالنسبة للقاعدة $H = \{A_1, \ldots, A_m\}$ و $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ متجه احداثيات $T(A)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{B_1, \ldots, B_n\}$ فان مصفوفة التحويل الخطي $T : V \longrightarrow W$ بالنسبة للقواعد H و S والمستخرجة في المصفوفة $(\#\#\#)$ تحقق

$$Y = X M_T$$

البرهان : اذا كان $X = (x_1, \ldots x_m)$ متجه احداثيات المتجه A بالنسبة للقاعدة $H = \{A_1, \ldots A_m\}$

فأن $A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots x_m A_m$

بما ان $T : V \longrightarrow W$ تحويلاً خطياً فعلية

$$T(A) = T(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots x_m A_m)$$

$$= x_1 T(A_1) + x_2 T(A_2) + \ldots x_m T(A_m)$$

الآن نعوض عن كل $T(A_k)$ $k = 1, \ldots m$ بما يساويه في $(***)$ وعليه نحصل على

$$T(A) = x_1 (a_{11} B_1 + \ldots a_{1n} B_n) + \ldots$$
$$\ldots + x_m (a_{m1} B_1 + \ldots a_{mn} B_n)$$

$$= (x_1 a_{11} + \ldots x_m a_{m1}) B_1 + \ldots$$
$$\ldots + (x_1 a_{1n} + \ldots x_m a_{mn}) B_1 \quad \ldots (1)$$

وبما ان $Y = \{y_1, \ldots y_n\}$ يمثل متجه احداثيات $T(A)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{B_1, \ldots B_n\}$ اي ان

$$T(A) = y_1 B_1 + y_2 B_2 + \ldots y_n B_n \quad \ldots (2)$$

وبما ان كل متجه في W يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات القاعدة S فعلية نستنتج ان

$$y_1 = (x_1 a_{11} + \ldots x_m a_{m1})$$
$$\vdots$$
$$y_n = (x_1 a_{1n} + \ldots x_m a_{mn})$$

وعليه نحصل على

$$(y_1, y_2, --- y_n) = (x_1, x_2 --- x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & ---- & a_{1n} \\ | & & \\ | & & \\ a_{m1} & --- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ملاحظة

1- في المبرهنة اعلاه اعتبرنا المتجهات X و Y على انها مصفوفات $1 \times m$ و $1 \times n$ على التوالي.

2- كما ان متجه الاحداثيات بالنسبة لقاعدة معينة يعين المتجه بصورة كلية فأن المبرهنة اعلاه توضح ان معرفة مصفوفة التحويل الخطي تعني معرفة التحويل كلياً.

مثال / ليكن $T: R^2 \longrightarrow R^3$ تحويلا خطيا معرفاً بالصيغة

$$T(x, y) = (x, x+y, 2x-y)$$

جد مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة للقواعد الطبيعية اي كل من R^2 و R^3.

الحل / القاعدة الطبيعية اي R^2 تتكون من $A_1 = (1, 0), A_2 = (0, 1)$

والقاعدة الطبيعية اي R^3 تتكون من المتجهات

$$B_1 = (1, 0, 0) \;,\; B_2 = (0, 1, 0) \;,\; B_3 = (0, 0, 1)$$

ولغرض حساب مصفوفة التحويل الخطي نتبع الخطوات المذكورة (***)

$$T(A_1) = T(1, 0) = (1, 1, 2)$$
$$= (1) B_1 + (1) B_2 + (2) B_3$$

$$T(A_2) = T(0, 1) = (0, 1, -1)$$
$$= (0) B_1 + (1) B_2 + (-1) B_3$$

وبذلك تكون مصفوفة التحويل بالنسبة للقواعد الطبيعية كما يلي

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال / اذا كان $T: P_2(R) \longrightarrow R^2$ تحويلا خطيا معرفا بالصيغة

$$T(a+bx+cx^2) = (2a, b-c)$$

جد مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة للقاعدة $H=\{A_1=5, A_2=2x, A_3=x^2\}$ لـ $P_2(R)$ والقاعدة $S=\{B_1=(-1,0), B_2=(0,3)\}$ لـ R^2.

الحل /

$$T(A_1)=T(5)=(10,0) = (-10)B_1 + 0\,B_2$$

$$T(A_2)=T(2x)=(0,2) = (0)B_1 + (\tfrac{2}{3})B_2$$

$$T(A_3)=T(x^2)=(0,-1) = (0)B_1 + (-\tfrac{1}{3})B_2$$

بذلك تكون مصفوفة التحويل بالنسبة للقواعد اعلاه كما يلي

$$M_T = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$