

الفصل الثالث : الطبيعة الموجبة للموارد والحرم الموجبة
وعند الادقة

د. عميل فاسر

لا نجد فرضيات بلانك و آينشتاين وكومبتون والتي أسست للنسبة المزدوجة للإشعاع من حيث أنه يملك سلوك الجسيم في حالة ما يلاحظ أنه إلى كونه موجة في حالة أخرى.

* في عام ١٩٢٤ قام دي-برولي بالتوسع في دراسة الطبيعة المزدوجة للجسيم الموجه ليشمل جميع المواد.

* قاد دي-برولي التحور بحسب الطبيعة للتأخر في المعبر والجسيم أو الإشعاع والمادة. لذلك إذا كان الإشعاع يملك خواص تشبه خواص الجسيم عند خات الجسيمات في المواد كالإلكترونات والبروتونات والنيوترونات يجب أن يملك خواص متشابهة بالموجات.

$$\begin{aligned} E &= h\nu & \text{* أني الفوتون ذو الذر ν يملك طاقة} \\ p &= \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} & \text{، نضم} \\ p &= \frac{h}{\lambda} & \text{وبدالة الطول الموجي} \end{aligned}$$

حيث اقترح دي-برولي أن العلاقة التي تظهر على الجسيمات المادية بالأمانة إلى الفوتونات. حيث اقترحت دي-برولي أن دمع كل جسيم مادي فإن هناك دالة موجة ترافقه ولها طول موجي λ يعطى بالعلاقة:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{①} \quad \text{طول موجة دي-برولي}$$

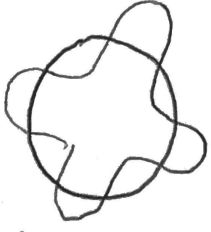
إذا كان الجسم له كتلة m ويتحرك بسرعة v فإن:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{②}$$

* للجسيم النسبي فإن $m \Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ وتسمى كتلة الكون

* هذه الفرضية تسمى فرضية دي-برولي ولا تشمل طول موجة دي-برولي

* في الملاحظة المرافقة للجسيم يسمى الموجهة المادية أو طول موجة دي-برولي
 * حاول دي-برولي توضيح مدار بور المستقر بإيجاد ومطابقة الموجهة الواقعية حول منحنى
 (مدار) المدار كما في الشكل (1) :



إذا كان الطول الموجي المرتبط مع المدار n هو λ
 ونصف قطر المدار r فأن :

$$2\pi r = n\lambda$$

الحل (1) : موجهة دي-برولي لـ $n=4$
 مدار بور

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad \text{حيث فرضية بور فأن :}$$

$$n\lambda = 2\pi \left(\frac{nh}{2\pi mv} \right) \quad \text{مُجمد :}$$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{mv}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad \text{و} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{كذلك فأن :}$$

ولمذا هناك علاقتين رئيسيتين للنظرية الكمومية وهي :

$$E = \hbar \omega \quad \text{--- (3)}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \text{--- (4)}$$

المتجه $\vec{k}$ يسمى متجه الموجة

علاقات مهمة لطول موجة دي-برولي الغير نسبية

* بدلالة الطاقة الحركية :

جسيم غير نسبي كتلته m يملك طاقة حركية K فأن :

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mK}$$

22

* بدلة مصدر التجيل

لجسيم كتلة m وسرعة v يتحول خارج مصدر فرق جهد V فانه:

$$K = qV$$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{2mqV}} \quad (6)$$

$$\lambda = \left(\frac{6.625 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19}}} \right) \frac{1}{\sqrt{V}}$$

والاكترون :

$$\lambda = \frac{12.3 \times 10^{-10}}{\sqrt{V}} \text{ m}$$

or

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{ \AA} \quad (7)$$

علاقة هذه الأطوال الموجية دي-برولي النسبية

* بدلة الطاقة الحركية

لجسيم كتلة m_0 وطاقة الكلية E تعطى بالعلاقة:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$$

وزخمه:

$$E = K + m_0 c^2$$

اذا كانت K الطاقة الحركية للجسيم فانه:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(K + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4}$$

$$\therefore p = \frac{1}{c} \sqrt{K(K + 2m_0 c^2)}$$

ونكون طول موجة دي - بروي صبي لمادة، لتاليه :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}} \quad \text{--- (8)}$$

* بدالة جهد التجيل

اذا كان اكبر من صفر في جهة q وتم تجيله خلال فرق جهد V عندئذ :

$$K = qV$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{qV(2m_0c^2 + qV)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0qV(1 + \frac{qV}{2m_0c^2})}}$$

علاقة (8) تصبح :-

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0qV(1 + \frac{\alpha}{2})}} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{qV}{m_0c^2} \quad \text{--- (9)}$$

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V(1 + \frac{\alpha}{2})}} \text{ A}^\circ \quad \text{--- (10)}$$

والاكثر من :

مثال : اوجد طول موجة دي - بروي لالكترونات تجلت خلال فرق جهد 100 فولت ؟

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e}} \frac{1}{\sqrt{V}} = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{ A}^\circ$$

$$V = 100 \text{ Volt}$$

$$\therefore \lambda = \frac{12.3}{\sqrt{100}} = 1.23 \text{ A}^\circ$$

مثال : اوجد طول موجة دي - بروي لالكترونات تتحرك بطاقة مرتبة 100 eV ؟

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 100 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m}$$

٣٩
مُتَان: فإذا جِبِبْ أَن تَكُونُ قِيَمَةُ الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ لِلنُّيُوتَرُونِ بَعْدَ ٢٠٠ eV جِبِبَتْ
تَكُونُ قِيَمَةُ الطُّوْلِ الْمَوْجِي لِلدَّيْرُولِيِّ الْمُرْتَبِطَةِ بِهِ $1.4 \times 10^{-10} \text{ m}$ وَفِي الْعِلْمِ
أَنَّ كِتْلَةَ النُّيُوتَرُونِ $m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$

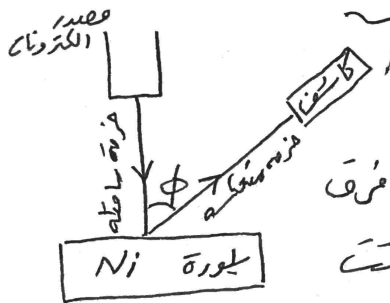
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \quad \text{و} \quad K = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2 \times 1.675 \times 10^{-27} \times (1.4 \times 10^{-10})^2}$$

$$K = 6.634 \times 10^{-21} \text{ J} = 4.15 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

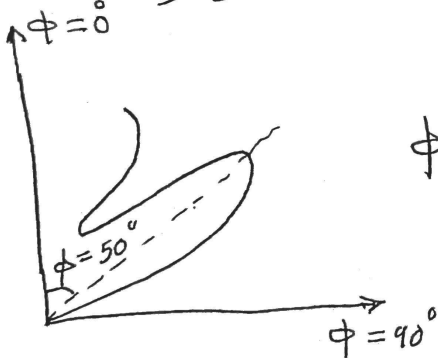
تَجَارِبُ تَحْقِيقِ فَرْصَةٍ دِي-يِرُولِي

فِي الْمَثَالِ السَّابِقِ وَجَدْنَا أَنَّ طُولَ مَوْجَةِ دِيْرُولِي لِلْإِلِكْتَرُونَاتِ الْمَعْجَلَةِ مِنْ خِلَالِ فَرْقِ جَهْدٍ قَدَرَهُ ١٥٧ V هُوَ $1.23 \text{ \AA}$ وَهَذِهِ الْقِيَمَةُ مِنْ مَرْتَبَةِ الْمِائَةِ بَيْنَ الْمَتَوَيَّاتِ الذَّرِيَّةِ فِي الْبِلُورَاتِ
هَذِهِ السَّيِّئَةُ أَدَّتْ إِلَى أَنْ يُمْكِنَ أَنْجَاحُ وَجُودِ هَوِيَّاتِ الْمَادَّةِ بِأَسْتَدْلَامِ الْبِلُورَاتِ كَيْفَ كَانَتْ
أَمُور (مُخْرِزَاتِ هَوِيٍّ) لِلْإِلِكْتَرُونَاتِ بِطَرِيقَةٍ مُنَاسِبَةٍ كَيْفُورِ الْأَسْطَحَةِ السَّيِّئَةِ بِوَاسِلَةِ الْبِلُورَاتِ
وَفِي هَذِهِ التَّجَارِبِ :

تَجْرِبَةُ دَاغِيْوِن وَكِرْمَر (تَحْقِيقِ الطَّبِيعَةِ الْمَوْجِيَّةِ لِلْإِلِكْتَرُونَاتِ).



الشكل (2) مخطط التجربة
دَاغِيْوِن - كِرْمَر



الشكل (3) : يوضح المنحنى العكسي
لِلشَّيْءِ كَدَالَةِ الزَّوْجَةِ الْإِسْكَارَةِ φ عِنْدَ
V = 54 eV لِلْإِلِكْتَرُونَاتِ.

* تَرْتِيبُ التَّجْرِبَةِ مِثْلَ ذَلِكَ (2).

* يَتِمُّ تَوْجِيهِ شُعَاعٍ ضَعِيفٍ (مَزْمَنَةٍ ضَعِيفَةٍ) مِنَ الْإِلِكْتَرُونَاتِ وَتَحْمِلُ خِلَالِ فَرْقِ
جَهْدٍ V بِشَكْلِ عَمُودِيٍّ عَلَى طَرَفِ بِلُورَةِ الْإِسْكَالِ. هَيْئَةُ سَتَرٍ تَحْتِ
الْإِلِكْتَرُونَاتِ فِي كُلِّ الْأَتَّجَاهَاتِ بِوَاسِلَةِ ذَرَاةِ الْبِلُورَةِ.

* شِدَّةُ الْإِلِكْتَرُونَاتِ الْمُسْطَارَةِ مِثْلَ كَدَالَةِ الزَّوْجَةِ حَقْلٍ عَرَفِيٍّ φ
تَمَّ مِقَاسُهَا مِنْ مَحْوَرِ الْخِزْمَةِ الْأَمَامِيِّ وَعِنْدَ هَوِيٍّ تَحْمِلُ فُخْلَفَةً.

* الشَّكْلُ (3) يَوْضَحُ الرَّسْمَ (الْمُنْحَنِ) الْعَكْسِيَّ لِخَيْرِ الشَّيْءِ مَعَ الزَّوْجَةِ φ
عِنْدَ (V = 54 eV).

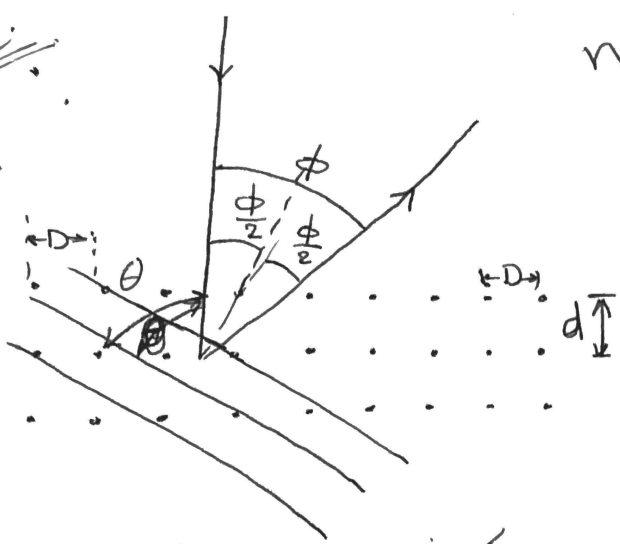
* عِنْدَ أَنْ يَزِيدَ الشَّدَّةُ تَعَرَّى بِوَاسِلَةِ الْمِائَةِ مِنْ نَقْطَةِ الْأَمَلِ وَيَرْتَفِعُ أَنَّ φ
تُرَدُّ مِنَ الصُّفْرِ وَعِنْدَ تَزَادِ φ فَإِنَّ الشَّدَّةَ تَقَلُّ بِالْبَدَايَةِ حَارَةً بِأَمَّاكَ قِيَمَةٍ
عِنْدَ φ = 35° ثُمَّ تُرَدُّ إِلَى الْعَرَةِ عِنْدَ φ = 50° وَهَذِهِ الزَّيَادَةُ بِالشَّدَّةِ نَائِبَةٌ
عَنِ التَّأَثُّلِ الْبَنَاءِ لِمَوْجَاتِ الْإِلِكْتَرُونَاتِ الْمَعْمُورَةِ مِنْ مَجْمُوعَةٍ مَحْصِيَةٍ مِنْ
فُتُوحَاتِ بَرَاغٍ فِي الْبِلُورَةِ وَمِنْ أَمَامِ حَالَةِ سَقَطِ الْأَسْطَحَةِ السَّيِّئَةِ الْمَوْصُوفَةِ فِي الشَّكْلِ (4)

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

١. ان شرط براغ للتداخل البناء

d هي المسافة بين مستويات براغ

n : عدد صحيح



$$\theta + \phi + \theta = 180^\circ$$

$$\theta = \frac{180 - \phi}{2}$$

$$\theta = 90^\circ - \left(\frac{\phi}{2}\right)$$

النسبة (4) هي د المسافة بين المستويات البلورية

من النسبة (4) لدينا $d = D \sin \frac{\phi}{2}$ حيث D هي المسافة بين الذرات

$$n\lambda = 2D \sin \frac{\phi}{2} \sin \left(90 - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$n\lambda = 2D \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = D \sin \phi$$

$$\therefore n\lambda = D \sin \phi$$

للنيتروجين N فان $D = 2.15 \text{ \AA}$ وعلى مرفق ائى الصيغة كدس عند $\phi = 50^\circ$ والى تقابل
الحجود من المركبة الاولى ($n=1$) فان

$$\lambda = 2.15 \sin 50^\circ = 1.65 \text{ \AA}$$

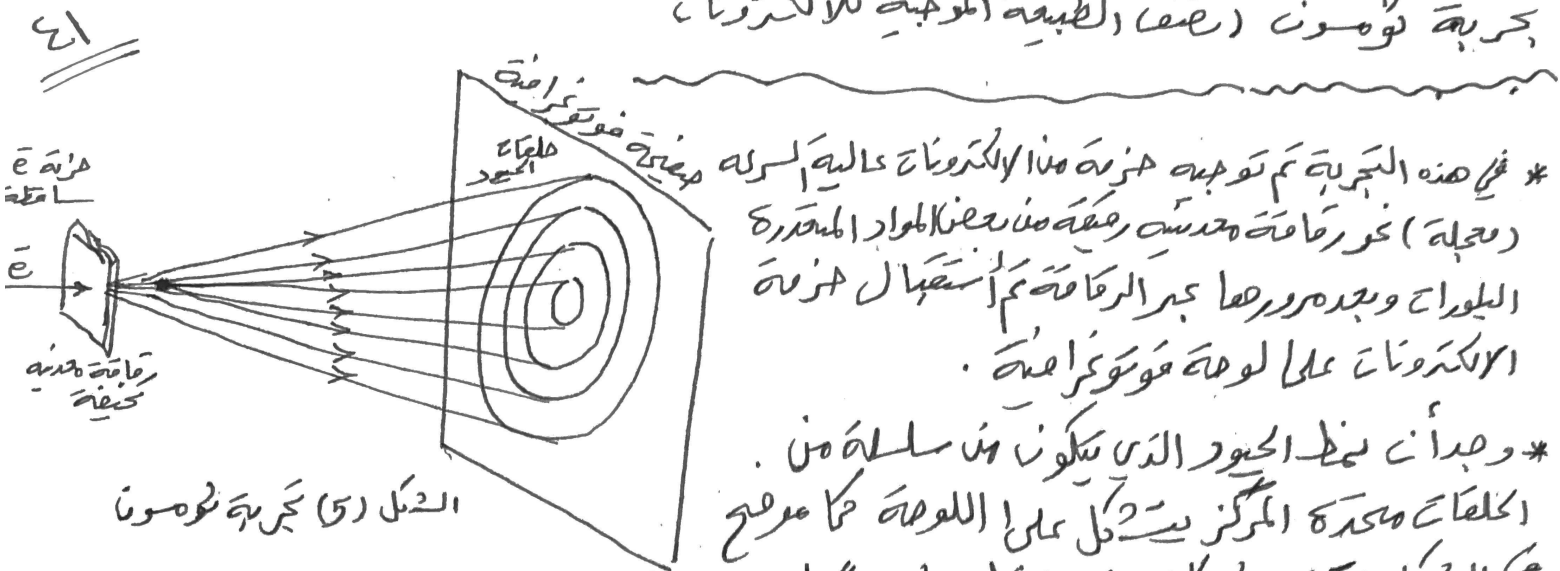
و طبقاً لفرصة دي-برولي للالكترونات المحملة بواسطة فرق جهد / الطاقة (7) :

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{ \AA} = \frac{12.3}{\sqrt{54}} = 1.66 \text{ \AA}$$

نجد ان الاتفاقة بين القيمتين قريب جداً لكل ملحوظ.

تم اعداد التجربة اعلاه عند طاقات الكترونات مختلفة عن طريق تغيير الجهد وفي كل حالة كانت نتائج القيمة لـ λ هي حالة توافق كذلك تم التحقق من علامة λ مع الرضخ كما اعطيت العلامة (1) من قبل دي-برولي. كذلك للحجود من المراتب العليا لقيم $n > 1$ لوحظ هناك مطابقة مع فرصة دي-برولي. وهذه النتائج تدعم فرصة دي-برولي.

تجربة تومسون (تصف الطبيعة الموجية للإلكترونات)



* في هذه التجربة تم توجيه حزمة من الإلكترونات عالية السرعة (موجلة) نحو رقاقة معدنية رقيقة من بعض المواد المتعددة البلورات وبعد مرورها عبر الرقاقة تم استقبال حزمة الإلكترونات على لوحة فوتوغرافية.

* وجد أن نمط الحيود الذي يتكون من سلسلة من الحلقات مكددة المراكز يتشكل على اللوحة كما موضح في الشكل (5) حيث كان هذا النمط متماثاً لنمط حيود الأشعة السينية.

الاستنتاج: التجربة دليلاً قاطعاً على الطبيعة الموجية للإلكترونات.

* حصل (أمسترج) تومسون الطول الموجي للإلكترونات من صيغة دي-بروي (العلامة (17)) ثم حسب المسافة البينية بين المستويات الذرية باستخدام معادلة براغ وقد وجد أن قيمة d هي نفسها التي حصل عليها من تجارب الاستشعاع السيني.

مثال: في تجربة دافسون - جيرمر، إلكترونات بطاقة حركية 100 eV ستطارد من بلورة، و $\theta = 10^\circ$ ما هي المسافة البينية بين المستويات البلورية؟ كم عدد القيم الممكنة في نمط التداخل؟

الحل: من شرط براغ للتداخل البناء $n\lambda = 2d \sin \theta$ (1)
لأن $n=1$ لذلك فإن:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \Rightarrow \lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{ Å} = \frac{12.3}{\sqrt{100}} = 1.23 \text{ Å}$$

$$\therefore d = \frac{1.23}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1.23}{2 \times 0.174} = 3.53 \text{ Å}$$

(ب) لكن عدد القيم في نمط التداخل هو n لأن أمثلة قيمة محتملة $\sin \theta = 1$

$$\therefore n\lambda \leq 2d \Rightarrow n \leq \frac{2d}{\lambda} = \frac{2 \times 3.53}{1.23} = 5.74$$

لذلك فإن أمثلة قيمة محتملة n هي 5 ولها 5 قيم في نمط التداخل $n=5$

* لقد وجدنا أن جسيمات المادة لها طبيعة موجية وبالتالي يجب أن ترتبط بكل جسيم دالة موجية، حيث أن زخم الجسيم p والطول الموجي λ للموجة المرتبطة به يرتبطان بواسطة علاقة دي-برولي:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (11)$$

حيث $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ سَمَّى ثابت التمدد (الانتشار) أو سَمَّى البعد الموجي. إضافة إلى ذلك فإن طاقة الجسيم E وتردد الموجة المرتبطة ν يرتبطان بعلاقة أينشتاين - بلانك التالية:

$$E = h\nu = \hbar \omega \quad (12)$$

حيث $\omega = 2\pi\nu$ هو التردد الزاوي للموجة.

* لبناء وتركيب دالة موجية مرتبطة بالجسيم نقرض مستوى وموجة أمارية لتردد (الزمن) والطول الموجي:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (13)$$

هذه الدالة تمثل توزيع تواقي لبط الطول الموجي $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ والتردد $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ في المرحلة تتحرك باتجاه المحور x الموجب بسرعة الضوء:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad (14)$$

إن الدالة الموجية التي تمثل موجة مستوية (13) تمثل جسيم يمتلك زخم معين $p = \hbar k$ وأن A تمثل سعة الموجة المستوية وتقابل كثافة الجسيم في الفضاء. كذلك فإن كثافة الاحتمال P تعطى بالعلاقة:

$$P = |\psi(x, t)|^2 = A^2 \quad (15)$$

إن كثافة الاحتمال لا تعتمد على الموضع وهذا يعني أن الجسيم لديه احتمالية متساوية للعثور عليه (أن يتواجد) في أي مكان من $(-\infty \rightarrow +\infty)$ وكذلك فإن موجة مستوية واحدة لا يمكن أن تمثل جسيماً محدداً لذلك يمثل الجسيم بواسطة دالة موجية.

٤٣
 حيث يمكن تشكيل حزمة موجية عن طريق تراكب موجات مستوية ذات أعداد موجية k مختلفة
 حيث يتداخل مع بعضها البعض بشكل أوتو من خارج منطقة معينة من الفضاء باستخدام تكامل
 فورييه وتحويلاته.

• لنفترض حزمة موجية ببعد واحد بحلقة بواسطة تراكب (تداخل) موجات مستوية:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (16)$$

حيث السعة $A(k)$ والتردد الزاوي ω يعتمدان على العدد الموجي k .
 وباستخدام معكوس تحويل فورييه للمالة الموجية $\psi(x,t)$ نجد:

$$A(k) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) e^{-ikx} dx$$

أو

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) e^{-i(kx - \omega t)} dx \quad (17)$$

ولتحديد موقع الحزمة لوصفها بواسطة الحزمة الطولية تفترض ان $A(k)$ تتحول حول قيمة معينة $k = k_0$ بحيث ان $A(k)$ تقبض بصورة حادة (مضاهية) الى النصف خارج الفترة $(k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2})$ حيث Δk كمية صغيرة. لذلك فان

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (18)$$

وهي ان $\omega(k)$ تتغير بصورة خطية وبطبيعة مع k لذلك نستخدم متسلسلة فورييه:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_0} + \dots$$

فبإزالة الحدود من المراتبة العليا لانفرضا قيم k قريبة من k_0 وبوضع $\omega(k_0) = \omega_0$ نجد ان:

٢٢

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta k} A(k) \exp \left[i \left\{ (k-k_0)x + k_0x - \omega_0t - (k-k_0)t \frac{d\omega}{dk} \right\} \right] dk$$

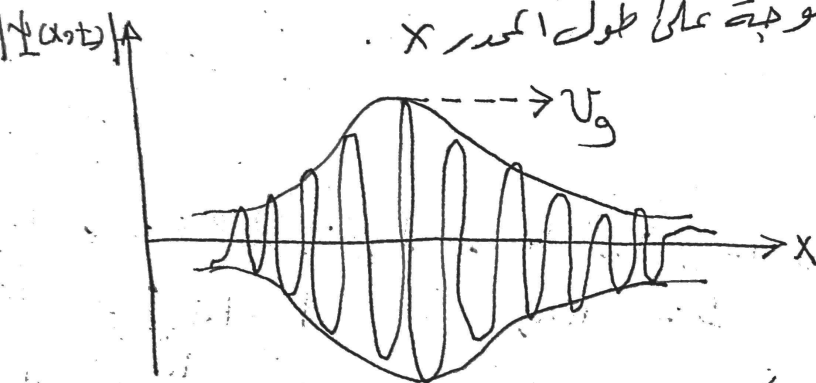
$$\therefore \psi(x,t) = f(x,t) e^{i(k_0x - \omega_0t)} \quad (19)$$

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta k} A(k) \exp \left[i \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right) (k-k_0) \right] dk \quad (20)$$

العلاقة (19) تبين أن الحالة الموجية $\psi(x,t)$ هي موجة ذات طول $\frac{2\pi}{k_0}$ وتردد $\frac{\omega_0}{2\pi}$ متضمنة بواسطة الحالة (20) وهذا يعني أن كل حزمة موجة تتحرك بسرعة تساوي سرعة المجموعة:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (21)$$

الشكل يبين معنى لموج (أو انتشار) حزمة موجة على طول المحور x.



الشكل: حزمة موجة تنتشر باتجاه المحور x.

فإذا كان Δx هو التغير بالموقع الحزمة الموجية و Δk التغير بالمقدار الموجي فأن:

$$\Delta x \Delta k \geq 1 \quad (22)$$

وكما قلنا Δx زاد Δk والعكس بالعكس. هذه الخاصية لها أهمية كبيرة في ميكانيكا الكم بصيغة مبدأ عدم الدقة لهايزنبرغ.

ان هزمة الموجة ترتبط بالجسيمات المادية كالتالي ..

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d(hw)}{d(hk)} \quad \text{--- (23)}$$

كلاسيكياً تكون سرعة جسيم غير نسبى طاقة E وكتلة m هي :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

وتكون سرعة :

$$\therefore \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v \quad \text{--- (24)}$$

حيث v هي سرعة الجسيم العرنسبى

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

* من الحالة النسبية قان :

$$2E \frac{dE}{dp} = 2pc^2$$

or $\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$ where: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\therefore v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{\gamma m v c^2}{\gamma m c^2} = v \quad \text{--- (25)}$$

وهذا بالنسبة للجسيمات النسبية وغير النسبية يجب تحديد سرعة الموجة و v لحزمة الموجة المرتبطة مع سرعة الجسيم

ونذكر ان سرعة الطور v_{ph} للحالة العرنسبية (الجسيمات غير النسبية)

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = \frac{hw}{hk} = \frac{E}{p} = \left(\frac{p^2}{2m} \right) \frac{1}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2} \quad \text{--- (26)}$$

والجسيم النسبي :

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma m c^2}{\gamma m v} = \frac{c^2}{v} \quad \text{--- (27)}$$

نلاحظ من الحالة العريضة V_{ph} أنه من سرعة الجسيم وفي الحالة البسيطة V_{ph} أكبر من سرعة الضوء.

* أنة الحالة المربعة $\psi(x, t)$ يمكن أن يكتب بالصيغة التالية:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} dp \quad (28)$$

حيث استبدلت $A(k)$ بدالة سرعة الزخم $\phi(p)$. كذلك فإن

$$\Phi(p, t) = \phi(p) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad (29)$$

عندئذ يمكننا كتابة (28) تصبح:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p, t) e^{iPx/\hbar} dp \quad (30)$$

باعتبار معكوس تحويل فورييه للحالة $\psi(x, t)$:

$$\Phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{-iPx/\hbar} dx \quad (31)$$

عند $t = 0$ يمكننا كتابة (30) و (31) بالشكل:

$$\psi(x) = \psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{iPx/\hbar} dx \quad (32)$$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-iPx/\hbar} dx \quad (33)$$

حيث $\Phi(p, t)$ أو $\phi(p)$ تسمى بدالة الموجة في فضاء الزخم.

وأيضا

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(p, t)|^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \text{constant} \quad (34)$$

هذه النتيجة (34) تسمى (Parseval's theorem) بنظرية بيرسيفال وتبين أنه إذا كانت $\psi(x, t)$ ومعايره للواقع فإن $\Phi(p, t)$ تكافئ كذلك.

كما سبق تم تحويل طاقة الموجة $\psi(x,t)$ في بعد واحد هو x ، والآن من السهولة التوسع من بعد واحد إلى ثلاث أبعاد فأن طاقة الموجة في ثلاث أبعاد هي:

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t) e^{i \frac{p \cdot r}{\hbar}} dp \quad (35)$$

حيث أن: $dp = dx dy dz$ هو عنصر الحجم في فضاء الزخم

وبأخذ معكوس التحويل يتبع لدينا:

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r,t) e^{-i \frac{p \cdot r}{\hbar}} dr \quad (36)$$

حيث $dr = dx dy dz$ هو عنصر الحجم في فضاء الإحداثيات

لهذا فإن نظرية "بيرسيفيل" هي (في ثلاث أبعاد) تصبح:

$$\int |\psi(r,t)|^2 dr = \int |\Phi(p,t)|^2 dp \quad (37)$$

مثال: دالة الطاقة $A(k)$ لطاقة موجة تعطى بالتالي

$$A(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & -\frac{\epsilon}{2} \leq k \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & |k| > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

أوجد دالة الموجة $\psi(x)$ ومن ثم صف العلاقة التبادلية $\int \Delta x \Delta k > 1$

الحل: $\psi(x)$ يمكن الحصول عليها بأخذ تحويل فورييه للدالة $A(k)$:

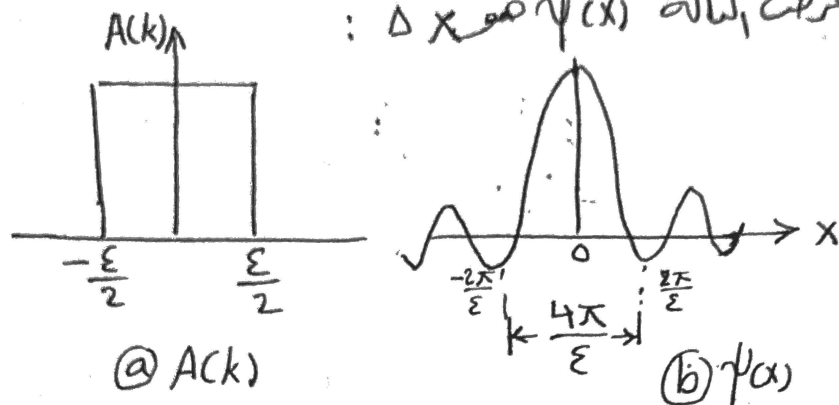
$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{ikx} dk \end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \left[\frac{e^{ikx}}{2} \right]^{\epsilon/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \frac{2}{x} \frac{e^{i\epsilon x/2} - e^{-i\epsilon x/2}}{2i}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\epsilon}} \frac{\sin(\epsilon \frac{x}{2})}{x}$$

عند الرسم بين $A(k)$ و $\psi(x)$ كما موضح بالشكل نجد أن العلاقة المربضية لـ $\psi(x)$ تصبط للعرض عند $x = \pm \frac{2\pi}{\epsilon}$ لذلك فإن عرض الحالة $\psi(x)$ هو Δx :



عرض $\psi(x)$: $\Delta x = \frac{4\pi}{\epsilon}$

عرض $A(k)$: $\Delta k = \epsilon$

لذلك فإن : $\Delta x \Delta k = 4\pi$

أي أن العلاقة التبادلية صحيحة (تم تصحيحها). الشكل بين الحالة وتحويل فورييه لها

* مبدأ اللا دقة طائيرينك

* في الميكانيك الكلاسيكي يكون موضع الجسم x وزخمه p مستقلين عند بعضها البعض ويمكن قياسهما بدقة في نفس الوقت.

* في ميكانيك الكم يتم تمثيل الجسم بواسطة هزمة موجية مقابل الجسم يمكن العثور عليه في أي مكان داخل المنطقة حيث تكون سعة الدالة الموجية $\psi(x)$ غير صفرية. وبالتالي فإن موضع الجسم يكون غير محدد ضمن عرض هزمة الموجة وبالمثل فإن زخم الجسم غير محدد ضمن عرض الهزمة الموجية داخل المنطقة حيث تكون دالة موجية الزخم $\phi(p)$ غير صفرية.

س / ما هذا الدقة التي يمكن من خلالها تحديد موضع الجسم وزخمه في وقت واحد ؟
 الج : العلاقة التبادلية :

$$\Delta x \Delta k \geq 1$$

$$\because p = \hbar k \quad \text{on} \quad \Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar}$$

38 — $\Delta x \Delta p \geq \hbar$

وهذه علامة اللا دقة لها تأثير بترك الخاصية بالموقع Δx والزخم Δp وتنبه على أنه من غير الممكن تحديد كل من موضع وزخم الجسيم في وقت واحد بدقة واحدة. ونلاحظ أنه ناتج عدم لدقة في الموضع والزخم يكون دائماً أكبر من القيمة من مرتبة $\hbar$.

* أرى النتيجة الدقيقة مبدأ اللا دقة الخاص بالموقع والزخم هي: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

38 — $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

* أرى العلاقة (38) يمكن تعميمها على ثلاثة أبعاد كالتالي:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$$

39 —

* نلاحظ (29) عدم وجود علاقة لادقة بين أحد المكونات الكارتييه لمحة موضع الجسيم ومكون كارتييه (ديكاري) أو أخر لمركبة (مكون) الزخم $(\Delta x \Delta p_x, \Delta y \Delta p_y, \Delta z \Delta p_z)$.

* من المهم ملاحظة أنه علامة اللا دقة لا ترفع أي قيود على الدقة التي يمكن بها تحديد موضع أو زخم الجسيم. ولكن بمجرد معرفة أنة النظام لديه إحدى هذه الكميات محدده بدقة مع حان قياسات الكميات الأخرى لا يمكن تحقيقها تماماً مع دقة عالية المثل $\frac{\hbar}{2}$ وبالتالي وبكل أكثر دقة يتم معرفة إحدى الكميتين كلما زاد نظام (معدل) القياس التي سيتم الحصول عليها في سلسلة من قياسات الكميات الأخرى.

* يمكن استخدام علاقة عدم اليقين (اللدونة) بين الموقع والزخم للحصول على علامة لادونة أخرى. وهي العلاقة التي تتضمن الطاقة والزمن. حيث أن الطاقة E لجسيم هي كمية m وزخمه P هي :-

$$E = \frac{P^2}{2m}$$

فإذا كانت ΔP عدم الدقة في الزخم فإن عدم الدقة بالطاقة هي :-

$$\Delta E = \frac{2P}{2m} \Delta P = \frac{P}{m} \Delta P = v \Delta P$$

حيث v سرعة الجسيم. فإذا كان العرض المكاني (الفضاوي) لحزمة الموجة التي تمثل الجسيم هو Δx فلا بد من الدقة في الوقت اللازم للحزمة لتتضمن خلال نقطة معينة وبالتالي عدم الدقة في أمكانية تحديد موقعها في الزمن المناسب هو (عدم الدقة بالزمن) :-

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\therefore \Delta E \Delta t = (v \Delta P) \left(\frac{\Delta x}{v} \right) = \Delta x \Delta P \gg \hbar$$

$$\therefore \Delta E \Delta t \gg \hbar \quad \text{--- (40)}$$

يمكن أيضاً استنتاج هذه العلاقة مباشرة من مبدأ المبدأ الموجهة (28) حيث أن E و t يظهران في نفس العلاقة المتبادلة مثل P و x .

* يجب أن تكون حزمة الموجة ذات الفترة Δt من مركبات موجة مستوية تمتد طاقاتها من خلال المدى ΔE بحيث تتحقق العلاقة (40) وبالتالي فإن هذه العلاقة تربط اللدونة بالطاقة ΔE (في تحديد طاقة النظام) مع الفترة الزمنية Δt لتحديد ΔE (الطاقة). وفي مفهوم ميكانيك الكم فلهذا يعني أن الحالة ذات الفترة الزمنية المحدودة لا يمكن أن يكون لها طاقة محددة بدقة. وبالتالي فإنه إذا كانت حالة ذرية أو ثورية

٥١
 متباينة لها عمر زمني ح فإن طاقاتها غير محدودة بمقدار لا يقل عن المربعة $\frac{h}{c}$.
 ولكن يتم تعريف طاقة الحالة الكمومية بدقة يجب أن يكون لها عمر زمني لا نهائي.

* أن العلاقات السابقة (39) و (40) لعدم اليقين (الادقة) تم القول عليها كخاصية رياضية لحزم الموجة وللمحاذاة إلى التوافق بين أزواجية الموجهة والجسيم. أن هذه العلاقات هي أمثلة محدودة لمبدأ الادقة الذي صاغه هايزنبرك عام 1927 وهو مبدأ الأساس الذي يقوم عليه هيكل ميكانيك الكم وينص هذا المبدأ على ما يلي :-

* مبدأ الادقة (عدم اليقين)

(من المستحيل وغير الممكن تحديد القيم الدقيقة للإحداثيات أزواج معينة من المتغيرات الديناميكية للنظام في وقت واحد. فمن هذه المتغيرات الديناميكية الكمومية هي مترافقة لكل قانون مع بطلها البعض بالمعنى الكلاسيكي الصامتين. ويكون ما قبل ضرب حالات الادقة في قيم المتغيرين على الأقل من مرتبة h).

• أن الأمثلة الأكثر شوعاً للمتغير الكمومي هي :-

- ① الإحداثيات الديكارتية (الكارترية) للجسيم والمركبة المقابلة للزخم (p_z, z) و (p_x, x)
- ② مركبة الزخم الزاوي للجسيم وموضعه الزاوي في المستوي العمودي (J_z, ϕ)
- ③ طاقة الجسيم E والزمن t الذي تقلص به هذه الطاقة.

كذلك فإنه لا يوجد هناك تكامل (ترابط) بين الإحداثيات الكارترية لجسيم ما ومركبة زخم مختلف مثل (p_y, x) مثلاً.

* أن صغر قيمة h يعني أن مبدأ الادقة ينطبق فقط على الأنظمة ذات الإبعاد الذرية حيث لا تتأثر نتائج الميكانيك الكلاسيكي بالإحصاء العيانية (الكبرى).

• أن مبدأ الادقة ينطبق على الفوتونات بالإضافة إلى جسيمات المادة.

* نظراً كون ثابت بلانك صغير جداً فإنه مبدأ اللادقة يكون مهماً جداً فقط على الأنظمة المجهرية.

وهناك طواهر مختلفة في الانظمة الذرية ودون الذرية والتي يمكن فهمها من حيث هذا المبدأ ومنها :-

طاقة الحالة الأرضية ونصف قطر ذرة الهيدروجين

* يمكن استخدام علاقة اللادقة بين الموقع والزخم للمحول على الطاقة ونصف قطر ذرة الهيدروجين في حالتيها الأرضية حيث تكون ذرة الهيدروجين من بروتون والكافون وإذا فرضنا أن البروتون ثقيل إلى ما لا نهاية ويكون في حالة سكون فإنه الطاقة الكلاسيكية الكلية للكافون تعطى بالعلاقة :-

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

حيث r يمكن نصف قطر مدار الكافون. كلاسيكياً r تكون قيمتها صغيرة وبالتالي لا يوجد حد أدنى لقيمة E . وحسب مبدأ عدم الدقة فإنه هذا غير ممكن، وهذه نظر الميكانيك الكمي وبما أن الحجم الخطي للذرة من الرتبة r فإنه عدم الدقة في موضع الكافون هو

$$\Delta r \approx r$$

$$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{r}$$

وحسب مبدأ اللادقة فإن

$$\therefore E = \frac{h^2}{8mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{--- (41)}$$

أن النظام يكون في حالة الطاقة الدنيا (أقل طاقة) عند قيمة r تعي بالبرقة

$$\frac{dE}{dr} = 0$$

$$\therefore -\frac{h^2}{4mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$\therefore r = \frac{(4\pi\epsilon_0)h^2}{me^2}$$

النتيجة لـ r هي نفس النتيجة لنصف قطر بور a_0 والذي قيمته
 $r = a_0 = 0.53 \text{ \AA}$

نخوض عن القيمة التالية بالعلامة (41) ينتج :-

$$E = - \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} = - \frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$$

وهي طاقة الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين وهي نفسها التي حصل عليها بور وتملك القيمة :-

$$E = -13.6 \text{ eV}$$

* عدم وجود الإلكترونات داخل النواة

* كما نعلم أن حجم النواة هي من مرتبة 10^{-14} m لذلك فالكثرون ليكون محدود داخل النواة فإن عدم الدقة في موقعه يجب أن يتجاوز هذه القيمة (أكبر من هذه القيمة) ولهذا فإن الدقة في رزخم الإلكترون ستكون :-

$$\Delta p \gg \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34}}{10^{-14}} = 1.1 \times 10^{-20} \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

والرزم P يجب أن يساوي على الأقل Δp أي أن $P = 1.1 \times 10^{-20} \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{sec}}$
 ولذا فإن الإلكترون الذي يمتلك هذه القيمة الكبيرة من الرزم يمتلك كذلك طاقة حركية K أكبر بكثير من طاقة كتلة السكون $m_0 c^2$ حيث أن

$$K \simeq pc = 1.1 \times 10^{-20} \times 3 \times 10^8 = 3.3 \times 10^{-12} \text{ J} = \frac{3.3 \times 10^{-12}}{1.6 \times 10^{-13}} \text{ MeV}$$

$$K = 20.6 \text{ MeV}$$

لكن التجارب بينت أن الإلكترونات تنبعث من النواة (بأنبعاث β) بطاقات بين $2-3 \text{ MeV}$
 فمن هذه النتيجة نستنتج بأن الإلكترون لا يمكن أن يكون عنفراً من حيث النواة (بداخل النواة) حيث يجب أن يملك β عند استيوار السينوترون داخل النواة إلى بروتون والكثرون وسينوترون وأن الإلكترون وسينوترون تقذف على الفور خارج النواة

* وكذلك فإن مقدار الطاقة التي يمتلكها الإلكترون ليكون محصوراً (محدراً) في ذرة مثل ذرة الهيدروجين مثلاً هي كالآتي :-

$$\Delta x \approx 5 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34}}{5 \times 10^{-11}} = 2.11 \times 10^{-24} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

هذا المقدار من الزخم للإلكترون يقابل طاقة حركية غير نسبة للطاقة الكلية

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(2.11 \times 10^{-24})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}} = 2.446 \times 10^{-18} \text{ J} = 15.3 \text{ eV} \quad \left(\begin{array}{l} \text{قيمة} \\ \text{مقبولة} \end{array} \right)$$

~~K~~

~~هذه الطاقة هي الطاقة الحركية وليس الطاقة الكلية~~

* طاقة نقطة الصفر للمذبذب التوافقي ($E_{\min}$)

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

* أن الطاقة المذبذب التوافقي

حيث ω التردد الزاوي للمذبذب

* كلاسيكياً / أمك صممة للطاقة هي $E = 0$ كد في عند ما يكون المذبذب ساكن

حيث زخم ($p = 0$) عند الموضع ($x = 0$)

* في الميكانيكا الكمية / فإن مبدأ اللائقة لا يسمح بهذا الحالة (وضع) لأنه كلاً من الموضع والزخم سيكون معروف بدقة. فلو فرضنا أن الجسم (المذبذب) محصور في منطقة ذات حجم (a) فإن:

$$x \approx \Delta x = a$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2} \quad \left(\text{التعبير الصحيح لمبدأ اللائقة} \right)$$

$$p \approx \Delta p \approx \frac{h}{2a}$$

$$E = \frac{h^2}{8ma^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

ولكي تكون E عند أمك صممة فإن:

$$\frac{dE}{da} = 0$$

$$a = \left(\frac{h}{2m\omega} \right)^{1/2} \Rightarrow E_{\min} = \frac{h\omega}{2} \quad \left(\text{طاقة حالة أرضية} \right)$$

طاقة نقطة الصفر