الميكانـــــيك الاحصـــــــــــــــائي

المقدمة

يمكن وصف حركة الاجرام التي نلاحظها حولنا بنجاح، باستخدام قوانين نيوتن في الميكانيك الكلاسيكي مثل قوانين الزخم والطاقة والقوة على اعتبار ان هذه الاجرام محددة الابعاد في الفضاء ويمكن ملاحظتها. فنحن نعلم ان قوانين نيوتن لاقت استحسانا وقبولا منقطع النظير عندما توقعت السلوك العيني لأنظمة الميكانيك الحرارية. ولكن عندما تم تطبيقها على الاجسام المجهرية وجد انها تعطي إجابات غريبة وغير منطقية للظواهر العملية المحسوبة. فعلى سبيل المثال لم تستطيع قوانين نيوتن الإجابة على السؤال لماذا تكون الحرارة النوعية صفرا عندما تكون درجة حرارة صفرا، هذا قصور في الميكانيك الكلاسيكي ولم يحل الا بافتراض بلانك وهو ان طاقة الجسيمات يجب ان تكون مكممه وتبعا لهذا الفرض ظهرت اساسيات الميكانيك الكم.

لماذا نلجأ الى الميكانيك الاحصائي؟ الجواب هو ان النظام المجهري يتكون من اعداد فلكيه من الجسيمات ولو طبقنا قوانين نيوتن على كل جسيم في النظام فسوف نصل الى عدد لانهائي من المعادلات المطلوب حلها والتي تحتاج الى عقود كي يتم حلها بواسطة الكمبيوتر. حتى لو استطعنا إيجاد حل لها بعد هذه الفترة فسوف نجد ان النظام قد تغير. لهذا سوف نلجأ الى القوانين الإحصائية حيث تمكننا من التعامل مع اعداد لانهائية من الجسيمات المميزة وغير المميزة.

قد بدأ استخدام الطرق الإحصائية قبل ظهور اساسيات الميكانيك الكم بأعوام وذلك نظرا لان النظريات الذرية أصبحت الحجر الأساس في مجالات عده مثل التفاعلات الكيميائية. ونظرا لصغر الذرات والجزيئات فقد اقترح العلماء عديدين مثل ماكسويل و بولتزمان استخدام الطرق الإحصائية لفهم العلاقة بين سلوك الذرات والطاقة. وبالرغم من المعارضة الشديدة لهذا الاتجاه في بداية الامر ولكن لوحظ ان هذه الطريقة استطاعت ان تتوقع الخواص الحرارية كما تتوقعها الطرق الاستقرائية وهذا الاتجاه ما يسمى بالفيزياء الإحصائية او الإحصاء الديناميكي الحراري. لا تقتصر طرق التحليل الاحصائي على الجزيئات بل تشمل الذرات والالكترونات والفوتونات والفونونات وامواج المرونة في الجوامد ......الخ. وسوف نطلق عليها اسم الجسيمات وتخضع هذه الجسيمات الى ثلاث أنواع من الاحصاءات بسبب تفاوت خواصها (إحصاء ماكسويل-بولتزمان واحصاء بوز-آينشتاين واحصاء فيرمي- ديراك.

سنلاحظ هنا ان الهدف الأساس للإحصاء الديناميكي الحراري هو تقديم نظرية جسيمية من نتائجها نستطيع تغيير خواص الاتزان للنظام العيني، ولكن أساس هذه النظرية مبني على نظرية الميكانيك الكم. وان هذه النظرية يمكن تطويرها باستخدام مبادئ بسيطة لمستويات الطاقة وقوى التفاعل الداخلي بين الجزيئات.

والفكرة الرئيسية البحث عن دالة تعبر عن كثافة الاحتمال ليتم تطبيقها على تجمعات كبيره من الجسيمات المتطابقة. والفرض الرئيسي المبني علية الميكانيك الاحصائي هو (ان جميع المستويات المجهرية لمجموعة معزولة لها احتمالات متساوية). سوف نتناول في الفصل الأول بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية للميكانيك الاحصائي، وفي الفصل الثاني ندرس إحصاء ماكسويل- بولتزمان وتطبيقاته وفي الفصل الثالث يتناول إحصاء بوز-آينشتاين وتطبيقاته اما الفصل الرابع يهتم في دراسة إحصاء فيرمي-ديراك.

الفصـــــــــــل الأول

الوصف الاحصائي لنظم من الجسيمات

1-وصف حالة النظام

نفرض أي نظام مكون من الجسيمات وهذه الجسيمات مهما كانت معقده مثل (مجاميع التفاعلات الضعيفة للمتذبذب التوافقي او الغاز او السائل وغيرها) ونحن نعلم بان هذه الأنظمة تتكون من الالكترونات والذرات والجزيئات يمكن وصفها بدلالة قوانين الميكانيك الكم مثلا، يمكن وصف النظام باستخدام الدالة الموجية

$$\psi(q_i \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots q_f)$$

و هي دالة لمجموعة الاحداثيات (f) (بما في ذلك متغيرات البرم) المطلوبة لوصف النظام. (f) تمثل درجات الحرية للنظام. يتم تحديد الحالة الكمومية للنظام من خلال إعطاء قيم لمجموعة الاحداثيات الكمية(f) وبذلك الوصف الكمي يكتمل. وتكون الدالة الموجية ψمحددة في أي وقت.

مثال(1): نفترض نظام يتكون من جسيمة واحدة ثابته في موضعها وتمتلك برم ½ وزخم زاوي $\hbar$ $\frac{1}{2}$ الوصف الكمي لها بواسطة الزمن والعدد الكمي m يأخذ قيمتين (1/2-او1/2)على الموضع الثابت للجسيمة اما اسفل او اعلى المحور Z (محور الجسيمة).

مثال (2): نعتبر نظام يتكون من N من الجسيمات ثابتة في الموضع M وكل منها يمتلك برم ½ هنا N عدد كبير يمكن ان نمثله بعدد افوكادرو والعدد الكمي m لكل جسيمة يأخذ قيمتين (1/2-او1/2)و بذلك الحالة الكاملة للنظام يتم تحديدها بواسطة العدد الكمي N

$$m_i \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots m_N$$

الذي يمثل اتجاه دوران الجسم.

مثال (3): نعتبر نظام يتكون من بعد واحد للمهتز التوافقي البسيط في الموضع الموجب منX الحالة المسموح بها لهذا المتذبذب توصف بدلالة العدد الكمي n وان الطاقة تعطى بالعلاقة التالية

$$E_n = (n + \frac{1}{2}\ \hbar\omega)$$

ω تمثل التردد الزاوي للمتذبذب والعدد الكمي n يأخذ القيم ......,0,1,2

مثال (4): نظام يتألف من N من التفاعلات الضعيفة في بعد واحد للمتذبذب التوافقي البسيط الحالة الكمية للنظام توصف بواسطة العدد الكمي

$$n_i \dots\dots\dots\dots\dots n_N$$

والعدد الكمي n_i يشير للمتذبذب التوافقي والذي يأخذ القيم 0,1,2

مثال (5): نظام يتكون من جسيمة واحده (بدون برم) داخل صندوق مستطيل لوصف هذ الجسيمة نبدأ من معادلة دي برولي التي تربط طول موجة المجال الأحادي الموجي λ بالزخم p او طاقتها E حيث ان

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad , \qquad f = \frac{E}{h}$$

حيث f يمثل التردد ، h ثابت بلانك ، $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ وباستخدام العدد الموجي k حيث ان $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ والسرعة الزاوية

$\omega = 2\pi f$ نحصل على $p = \hbar k$ و $\mathcal{E} = \hbar\omega$

ويمكن وصف المجال المادي للجسيمة بالاتجاه السيني x بدالة الموجية $\psi_{(x)}$ وهي تعتمد على طاقة الجسيمة الكلية

$$\mathrm{E}_X = \frac{P_X^2}{2m} + E_P(x) \qquad (1)$$

حيث ان E_P تمثل الطاقة الكامنة السينية و $\frac{P_X^2}{2m}$ الطاقة الحركية السينية و تربط هذه الطاقة مع الدالة الموجية معادلة شرودنجر الشهيرة للأمواج المادية .

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{dx}^2} + E_P\psi_{(X)} = E_{(X)}\psi_{(X)} \qquad (2)$$

هذه المعادلة في الميكانيك الكمي تعادل معادلة نيوتن $f = \frac{dp}{dt}$ في الميكانيك الكلاسيكي او معادلة ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية ففي حالة الجسيمة الحرة الطاقة الكامنة صفر .

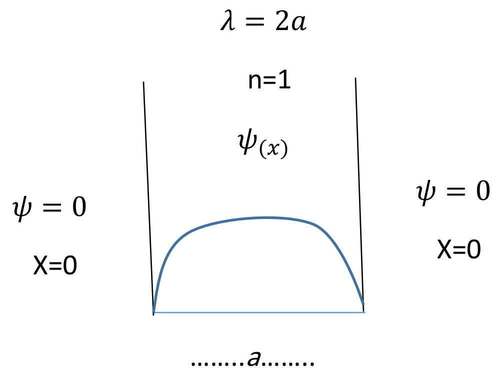
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + k^2\right)\psi = 0 \qquad (3)$$

حيث ان $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ هو العدد الكمي، يمكن حل المعادلة (3) باي من الدوال الموجية المألوفة.

$$\psi_{(X)} = Ae^{iKX}$$

$$\psi_{(X)} = Ae^{-iKX}$$

فلو اخذنا حالة جسيمة المحصورة في بئر جهد او جزيئة غاز في صندوق او الكترون محصور في قطعة معدنية داخل حاجز جهد يفوق الطاقة الحركية للإلكترون فان الالكترون يتحرك داخل المعدن ولكنه لا يتمكن من الهروب فلو فرضنا ان الدالة الموجية تتلاشى عند X=0 و x=a حيث aعرض الصندوق بالاتجاه السيني فان المعادلة (3) تحقق الدالة $\psi_{(x)} = \mathrm{c}\sin(kx)$ ، $k.a = n\pi$



لذلك فان

$$k = n.\frac{\pi}{a}$$

$$p = \hbar k = \frac{n_1 \hbar \pi}{a}$$

وهذه المعادلة تمثل الزخم المكمم كذلك فان طاقة الجسيمة الحرة بالاتجاه السيني هي $\mathrm{E}_X = \frac{P_X^2}{2m} = \frac{n_1^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

أي ان الطاقة الحركية للجسيمة الحرة مكممه أيضا. فاذا كانت الجسيمة حرة الحركة في الاتجاهات (x,y,z) في الصندوق الذي أبعاده a,b,c فان الدالة الموجية للجسيمية تصبح.

$$\psi = c\sin\frac{n_1 \pi x}{a}\sin\frac{n_2 \pi y}{b}\sin\frac{n_3 \pi z}{c} \qquad (4)$$

وهي تشبه الموجة المستقرة في تجويف مستطيل الشكل

$$p_{(x)} = \frac{n_1 \hbar \pi}{a}, p_{(y)} = \frac{n_2 \hbar \pi}{b}, p_{(z)} = \frac{n_3 \hbar \pi}{c}$$

n_1, n_2, n_3 ارقام صحيحة موجبة ويصبح الزخم الكلي (p)

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

وبذلك تصبح الطاقة الحركية للجسيمة:

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right)$$

فاذا كان الصندوق مكعب الشكل

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

وعلية من هذه المعادلة فان مستويات الطاقة تزدحم للجسيمات المحصورة في صندوق كبير لان (E تتناسب مع a^2) وتتباعد في الصندوق الصغير ملاحظة n تكون موجبة دائما.

2- المجموعة:

هي كمية من المادة عدد جسيماتها N يمكننا التعامل معها كوحدة لها خواصها المنظورة المميزة ويقارب عددها عدد افوكادروا.

3-**التجمعات الإحصائية:** هو عدد ضخم لـ n يؤول الى اللانهاية من مجموعات N_i وبذلك فان

$$i = \infty \qquad , \qquad N \to \infty = \sum N_i$$

4-**الاحتمالية:** احتمالية الحدث تعرف من النسبة بين ارقام حالة حدوث الحدث الى الرقم الكلي للحالات

الاحتمالية =ارقام حدوث الحدث/الرقم الكلي للحالات

فاذا رمينا قطعة نقود اما ان تأتي على وجه الصورة او على وجه الكتابة لذلك يكون الرقم الكلي للحالات هو2 بينما احتمالية ظهور وجه الصورة هو واحد فقط. اذن احتمالية ظهوره طبقا للقانون هو 1/2 وكذلك احتمالية ظهور الكتابة هو 1/2أيضا.

وبذلك الاحتمالية الكلية هي $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

5-**الاحتمالية التي لا تعتمد على الاحداث**

إذا كان حدثين او أكثر يمكن القول انه غير معتمده إذا كان ظهور احداهما لا يتأثر بظهور الاخر. نفترض حدثين غير معتمدين يمكن ان يكونان في نفس الوقت او بالتعاقب. نفترض ان حدث واحد يمكن ان يحدث نرمز له n_1 بطريقة مختلفة وحدث اخر يحدث نرمز له n_2 أيضا بطريقة مختلفة والعدد الكلي لطرق حدوث الحدثين الذين يحدثان في نفس وقت او بالتعاقب

$$n = n_1 . n_2$$

الان نرمز الرمز m_1 هو رقم الطريقة الملائمة للحدث الأول و m_2 هو الطريقة الملائمة للحدث الثاني وبذلك العدد الكلي للطرق الملائمة

$$m = m_1 . m_2$$

الان احتمال ظهور الحدث الاول هو $p_1 = \frac{m_1}{n_1}$

واحتمالية حدوث الحدث الثاني هي $p_2 = \frac{m_2}{n_2}$

احتمالية ظهور الاحداث المركبة $p = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2}$

$$p = p_1 \times p_2$$

هذا يوضح احتمالية ظهور حدثين في نفس الوقت او بالتعاقب (الاحداث لمركبة) يساوي حاصل ضرب الاحتماليات الفردية للأحداث غير المعتمدة. هذه النتيجة يمكن ان تمتد الى k من الاحداث غير المعتمدة

$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_k$

ويمكن كتابة الاحتماليات الفردية على النحو التالي

$$p = p_1 \times p_2 \times \ldots \ldots \ldots \ldots p_k$$

مثال: صندوق يحتوي على زوج واحد من الجوارب من كل الألوان التالية ازرق، بني، احمر، ابيض، اسود بدون النظر نختار زوج وبعد ذلك يغير هذا الزوج ونختار زوج اخر من الجوارب ماهي احتمالية اختيار الزوج الأحمر خلال الوقت؟

الحل / $p(red) = 1/5$

$$P(red\ and\ red) = 1/5 * 1/5 = 1/25$$

مثال: عند اجراء استبيان مدرسي وجد انه 9 طلاب من أصل 10 يحبون البيتزا. إذا ثلاث طلاب اختاروا بصوره عشوائية مع التبديل ماهي الاحتمالية لكل ثلاث طلاب يحبون البيتزا؟

الحل/

$$p_1 = \frac{9}{10}$$

$$p_2 = \frac{9}{10}$$

$$p_3 = \frac{9}{10}$$

$$p = p_1 \times p_2 \times p_3 = \frac{9}{10} * \frac{9}{10} * \frac{9}{10} = \frac{729}{1000}$$

مثال: عند اجراء دراسة اجتماعية وجد 72% من الناس في العراق يحبون الشاي إذا اختير ثلاث اشخاص بصوره عشوائية من المجتمع. ماهي الاحتمالية للأشخاص الثلاثة الذين يحبون الشاي؟

6- الاحتمالية المعتمدة على الاحداث

حدثين يكونان معتمدين إذا كان ظهور الحدث الأول يتأثر بالحدث الثاني لذلك فأن الاحتمالية سوف تتغير.

مثال: في أوراق اللعب تم اختيار ورقة بصوره عشوائية من 52 ورقة لعب بدون تغيير الموقع ثم اختيرت الورق الثانية. ماهي احتمالية انه في الورقة الأولى تظهر الملكة (الاختيار الأول) وفي الاختيار الثاني (الورقة الثانية) يظهر جاك (الولد)

الحل/

$$\mathrm{P(queen)} = 4/52$$

$$\mathrm{P(jack\ after\ queen)} = 4/51$$

$$\mathrm{P(queen\ and\ jack)} = 4/52 * 4/51 = 4/663$$

مثال: اناء يحتوي على 5 اخضر ،3احمر، 2ازرق ،6 اصفر من الألوان هذه الالوان تختار بصوره عشوائية من الاناء وبعد ذلك تغير المواقع بعدها يختار اللون الثاني ماهي احتمالية الأخضر والاصفر من الألوان.

الحل/

$$p_{(green)} = \frac{5}{16}$$

$$p_{(yellow)} = \frac{6}{16}$$

$$p_{(green\ and\ yellow)} = p_{(green)} * p_{(yellow)}$$

$$= \frac{5}{16} * \frac{6}{16} = \frac{15}{128}$$

7-قانون الإضافة في الاحتمالية

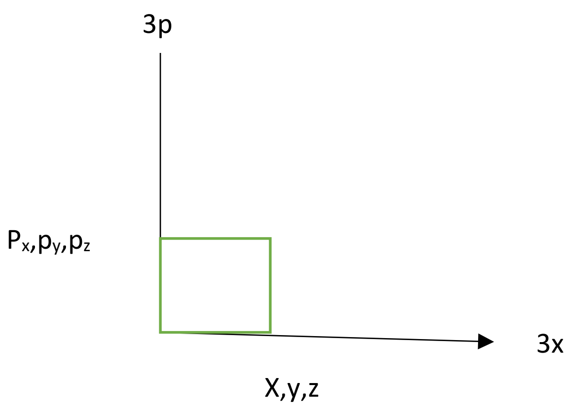
إذا كان الحدثين A,B متنافيين فان احتمال حدوث الحدثين A,B هو مجموع احتمال كل الاحداث، يقال ان الحدثين متنافيين إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الاخر في ان واحد.

ولمجموعه من الاحداث المتنافية تكون الاحتمالية

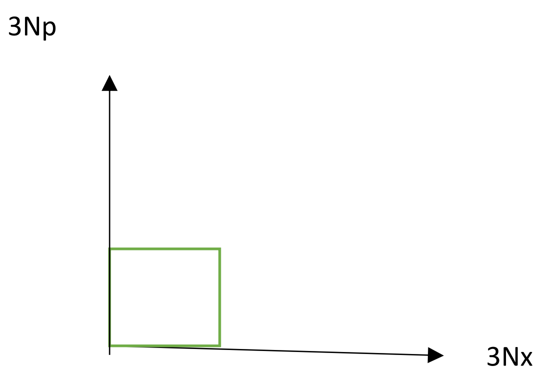
$$\mathbf{P=P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots P_K}$$

8-فضاء الطور:

هو فضاء افتراضي لوصف حالة جسيم ذي ستة ابعاد ثلاث تمثل الموقع (x,y,z) والأخرى تمثل الزخم $(p_{(x)}, p_{(y)}, p_{(z)})$ ويمكن تمثيل فضاء الطور للوحدة الواحدة على النحو التالي



ويمكن رسم فضاء الطور لنظام كلي



N عدد الوحدات في النظام ، الحجم بصورة الاعتيادية يعبر عنه

$$dv = dxdydz$$
$$x \to x + dx$$
$$y \to y + dy$$
$$z \to z + dz$$

يعبر عن الحجم في فضاء الطور بالرمز Γ

$$\mathrm{d}\Gamma = dxdydzdp_x dp_y dp_z$$

$$\mathrm{d}\Gamma_{6N} = dx_1 dy_2 dz_3 dp_{x1} dp_{y2} dp_{z3} \dots dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \dots dx_N dy_N dz_N dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN}$$

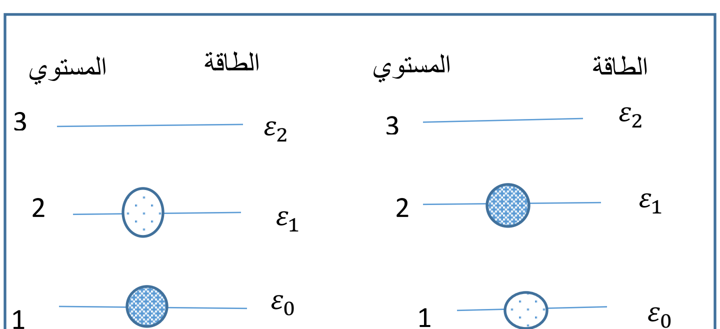
$$\mathrm{d}\Gamma_{6N} = \prod_{i=1}^{N} dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \qquad (5)$$

9-الحالات المجهرية:

نستعرض التعريف الاحصائي باستخدام التعريف الاحصائي للحالة المجهرية ومن ثم نعرض حساب الانتروبي لأنظمة بسيطة تحتوي على عدد بسيط من الجسيمات ومستويات الطاقة. وبما ان الانتروبي هو مقياس لعشوائية النظام وذكرنا ان عشوائية جزيئات الغاز اكبر من عشوائيتها في الحالة السائلة (لنفس المادة) وعشوائية الحالة السائلة اكبر من عشوائية الحالة الصلبة (لنفس المادة) وهذا ناتج عن ترتيب الجزيئات بالمادة .اول من اقترح الربط بين مبدأ الانتروبي (S) وبين الحالات المجهرية الكلية للنظام Ω هو العالم بولتزمان.

$$\boldsymbol{S = K_B \ln \Omega} \qquad (6)$$

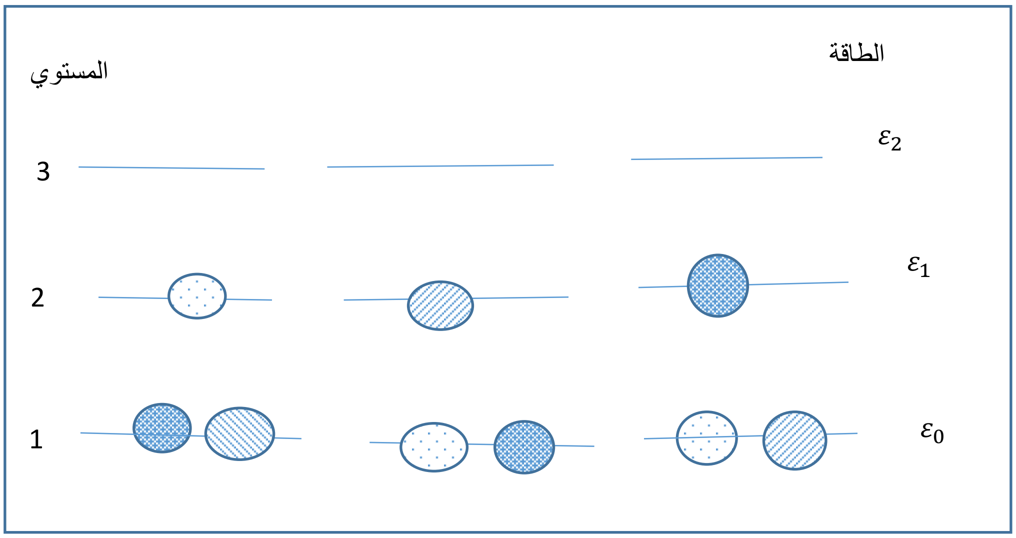
K_B ثابت بولتزمان وان S و Ω يعتبران خاصية من خواص النظام المعادلة أعلاه هي معادلة افتراضية ليست لها اشتقاق نظري لذلك سوف نفترض انها حقيقية ودرجة أهميتها سوف تعتمد على مقارنة نتائجها مع النتائج العملية المدونة. قبل ان نبدأ بتعريف معنى الحالة المجهرية للنظام دعونا نوضح أولا ماذا تعني كلمة **حالة النظام.** **حالة النظام هي كيفية ملء مستويات الطاقة.** ولتوضيح ذلك نعتبر نظاما بسيطا كما هو موضح في الشكل (1) يتكون من ثلاث مستويات، E_i, i=0,1,2 وجسمين مميزين. سوف نعرف حالة النظام بالأرقام التالية(1,1,0) وهذه الأرقام من اليسار الى اليمين تدل على انه يوجد جسيم في مستوي الطاقة الأول ε_0 وجسيم في مستوي الطاقة الثاني ε_1 والمستوي الثالث للطاقة فارغ ε_2. وفي حالة انه تم اثارة أحد الجسيمين نحصل على حالات النظام الممثلة بالأرقام (0,1,1) او (1,0,1). والشكل الاتي يمثل الحالتان المحتملتان لحالة النظام (1,1,0)



اذن الحالة المجهرية: هي ترتيب الــــيـــ المميزة خلال حاله معرفة(معطاة) للنظام

مثال (1): ماهي عدد الحالات المجهرية لحالة النظام(2,1,0) الذي يتكون من ثلاث مستويات للطاقة وثلاث جسيمات مميزة؟

الحل/ نقوم بوضع جسمين في المستوي الأول وجسيم في المستوي الثاني وترك المستوي الثالث فارغ. وبتبديل الاجسام الثلاثة على المستويات الطاقة الأولى والثانية فقط، نجد اننا سنحصل على ثلاث حالات مجهرية فقط. هذا مع اهمال ترتيب الجسيمات في كل المستوى. كما في الشكل الاتي:



اذن الحالة العيانية: تظهر نتيجة ترتيبات مختلفة وكبيره جدا للحالات المجهرية.

قبل الشرح سوف نسترجع احدى النظريات الإحصائية المهمة وهي النظرية مع وجود شرط $\sum_j N_j$ فان عدد طرق توزيع N من الجسيمات على j من المستويات بحيث يوضع n_1 من الجسيمات في المستوي الأول وn_2 من الجسيمات في المستوي الثاني وهكذا الى ان نصل الى الوضع n_j من الجسيمات في المستوي الأخير j هو

$$w\{n_i\} = \frac{N!}{n_1\,!n_2!n_3!\ldots\ldots n_j!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{j} n_i!} \qquad (7)$$

لأثبات ذلك: نبدأ أولا بالمستوي الأول فنجد عدد طرق الاختيار n_1 من N ووضعها في المستوي

$$w_1 = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1\,!\,(N-n_1)!}$$

وبالمستوي الثاني عدد الطرق لاختيار n_2 من $(N-n_1)$ ووضعها في هذا المستوي هو

$$w_2 = \binom{N-n_1}{n_2} = \frac{(N-n_1)!}{n_2\,!\,(N-n_1-n_2)!}$$

وبالمستوي الثالث نجد ان عدد الطرق لاختيار n_3 من $(N-n_1-n_2)$ ووضعها في هذا المستوي هو

$$w_3 = \binom{N-n_1-n_2}{n_3} = \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3\,!\,(N-n_1-n_2-n_3)!}$$

ونستمر على هذا النمط الى ان نصل الى المستوي الأخير حيث ان هذه الاختيارات منفصلة فان العدد الكلي يصبح

$$w\{n_i\} = w_1 \times w_2 \times w_3 \times \dots w_j = \frac{N!}{n_1\,!n_2!n_3!\dots\dots n_j!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{j} n_i!}$$

حيث ان الرمز $\prod$ يدل على المضروب اللانهائي لأعداد بمعنى ان

$$\prod_{i=1}^{r} n_1! = n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!$$

مثال / ماهي عدد الحالات المجهرية لحالة النظام (0,1,2,3,4) .

الحل / من الحالة (0,1,2,3,4) نجد ان عدد المستويات خمسة وعدد الجسيمات N سوف يتم حساب الحالات المجهرية على النحو الاتي:

$$N = \sum_{n_{i=1}}^{5} n_i = 4+3+2+1$$

وباستخدام القانون الاحصائي نجد ان الحالات المجهرية لهذه الحالة هي:

$$w\{n_i\} = \frac{N!}{n_1\,!\,n_2!\,n_3!\,n_4!\,n_5!} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2! \times 1! \times 0!} = 12600$$

ولحساب الانتروبي لنفس المثال

$$\mathrm{S = K_B \ln w\{n_i\} = 1.38 \times 10^{-23} JK^{-1} \times \ln 12600 = 1.30 \times 10^{-22} JK^{-1}}$$

ان قيمة الانتروبي هنا صغيره ولكن لو ضربنا هذا الرقم بعدد أفوكادرو وهو عدد الجسيمات في المول الواحد وقسمناه على عدد الجسيمات في المثال N=10 فأننا سنحصل على الانتروبي لكل مول من الجسيمات وهو

$7.8\ \mathrm{JK^{-1}Mol^{-1}}$

سوف نتحقق من الخاصية الاولى للانتروبي $\lim_{T\to 0} S = 0$

عند درجة الحرارة المنخفضة والتي تقترب من درجة الصفر المطلق $T \to 0$ نجد ان جميع الجسيمات تتجمع في المستوي الأرضي (ادنى مستوي) وحينها تصبح الجسيمات في مستوي واحد فان عدد الحالات المجهرية الكلية تصبح واحد

$$\lim_{T\to 0} S = K_B \ln \Omega = K_B \ln 1 = 0$$

وهذا يدل على ان التعريف الاحصائي متوافق مع القانون الثالث في الثرموداينمك.

الخاصية الثانية للانتروبي: الخاصية التجميعية للانتروبي

وتعني انه إذا تضاعف حجم النظام يتضاعف الانتروبي بنفس القيمة لدراسة هذه الخاصية سوف نضاعف نظام بسيط (1,1,0) الذي يتكون من ثلاث مستويات وجسيمين مميزين. المستوي الثالث يترك فارغ إذا تم مضاعفة هذا النظام البسيط سوف تتضاعف الجسيمات وبذلك نحصل على أربع حالات مجهرية. بتالي فان الانتروبي لجسيمين هو

$$S = K_B \ln 2$$

و لأربع جسيمات $S = K_B \ln 4 = K_B \ln 2^2 = 2K_B \ln 2$

ولعدد N من النسخ $S = K_B \ln 2^N = NK_B \ln 2$

ومن هذا المثال تتضح صفة تضاعف الحلات المجهرية وتجميع الانتروبي

$$\Omega_{Total} = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$S = S_1 + S_2$$

الفصل الثـــــــــــاني

إحصاء ماكسويل – بولتزمان

ان الميكانيك الاحصائي يحاول ايجاد العلاقة بين الصفات العيانية والصفات المجهرية لمجموعة من الجسيمات وهو يدرس سلوك الاكثر احتمالا لهذه الجسيمات ويتحكم في الميكانيك الاحصائي مجموعة من القوانين تدعى قوانين التوزيع الاحصائي حيث يستخدم في ايجاد الطريقة الاكثر احتمالا لتوزيع كمية معينة من الطاقة بين عدد من الجسيمات. إذا كانت الجسيمات متشابهة لها اي برم كان لكنها متباعدة بعضها عن البعض بمسافات كافية بحيث يمكن تمييزها ومثال على ذلك هي الجزيئات الغازية وهذه الجسيمات تخضع لتوزيع ماكسويل –بولتزمان.

مميزات النظام الخاضع لإحصاء ماكسويل –بولتزمان:

1-وحدات النظام متماثلة متميزة عن بعضها.

2-يخضع لمبدأ الميكانيك الكلاسيكي.

3-يطبق لنظام مثالي معزول.

1-توزيع الطاقات

لو اخذنا مجموعة من الجزيئات (N) ذات طاقة $E_1, E_2, E_3, ...E_i$ والمطلوب ايجاد التوزيع الاكثر احتمالا للجزيئات بين الطاقات المختلفة فلدينا قاعدة اساسية في الميكانيك الاحصائي **تنص على انه كلما ازاد العدد (ω) بالطرق المختلفة لتوزيع الجزيئات بين الخلايا كلما كان احتمال التوزيع اكبر.**

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 = N \qquad (1)$$

ان مفهوم الطاقة تم إدخاله في الإحصاءات الكلاسيكية حيث يتم توزيع الانظمة على الطاقات المختلفة مثل

$$E_1, E_2, E_3 \dots \dots \dots E_i \dots E_n$$

وبذلك فان الطاقة الكلية للنظام

$$E_{Total} = \sum_{i=1}^{N} E_i \qquad (2)$$

لتوضيح ذلك يمكن ان نقسم طاقة النظام على شكل شرائح او رفوف متقاربه جدا نرمز لها بالرمز(S) وبذلك تكون طاقة هذه الشريحة E_S لكل رف من الرفوف احتمالاته الممكنة فتمثل بمجموعة من الصناديق على كل رف ويرمز لها بالرمز(g_S) في الشريحة (S) ويسمى وزن الشريحة او درجة انحلال الشريحة وعدد الجسيمات

في كل خلية تمثل بكرات داخل هذه الصناديق تمثل بالعدد (n_s) ويسمى رقم الاشغال في الشريحة s. رقم الاشغال الكلي يعطى بالعلاقة الاتية:

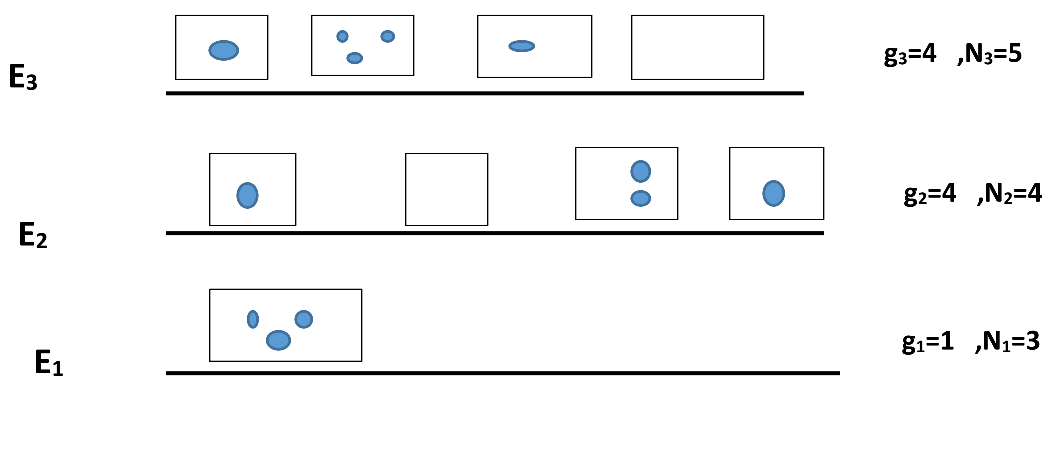
$$\sum_{s=1}^{n} n_s = N_{Total} \qquad (3)$$

وبذلك تكون طاقة النظام في الشريحة (s) تعطى بالعلاقة التالية

$$E = (n_s * E_s)$$

وعلية تكون الطاقة الكلية للمجموعة

$$\sum_{s=1}^{n} n_s * E_s = E_{Total} \qquad (4)$$



الشكل(1)

مثلا لو كان لدينا أربع جزيئات مثل abcd، فهنالك أربع وعشرون طريقة ترتيب لهذه الجسيمات الاربع حسب قيمة المقدار

$$4!=4*3*2*1=24$$

وهذه الطرق هي:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadc	dacb
acbd	bdac	cbad	dbac

acdb	bdca	cbda	dbca
adbc	bcda	cdab	dcab
adcb	bcad	cdba	dcba

وعموما فان الترتيب العام لمجموعة ارقام النظام في شريحة الطاقة يشير الى الحالة الظاهرية وبذلك يعطي الترتيب المعين للمجموعة في داخل النظام حالة الطاقة التي تشير الى الحالة المجهرية وبذلك الأرقام الكبيرة للحالة المجهرية تقابل حالة ظاهرية.

عدد طرق التوزيع او الاختيارات هو (C) لأشغال اول شريحة طاقة

$$C_{n_1}^{N} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \qquad (5)$$

لأشغال الشريحة الثانية

$$C_{n_2}^{(N-n_1)} = \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!} \qquad (6)$$

وبذلك فأن عدد الاختيارات الكلية يعطى بالعلاقة التالية

$$C_{n_1}^{N} \times C_{n_2}^{(N-n_1)} \times C_{n_3}^{(N-n_1-n_2)} = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} \times \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!} \times \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!\,(N-n_1-n_2-n_3)!}$$

هذا الاختيار الكلي لثلاث شرائح طاقة

مثال: ما هو عدد طرق اختيار 2 وحده من 5 وحدات لأشغال اول شريحة.

الحل/

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times (3 \times 2 \times 1)}{2(3 \times 2 \times 1)} = 10$$

مثال: 5 وحدات نختار 2 لأشغال اول شريحة طاقة ثم نختار من الباقي 2 لأشغال الشريحة الثانية فما هو عدد الاختيارات لأشغال الشريحة الثانية.

الحل/

$$C_{n2}^{(N-n_1)}=\frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!}\Leftrightarrow C_2^{(5-2)}=\frac{(5-2)!}{2!\,(5-2-2)!}=\frac{3!}{2!}=3$$

مثال: احسب مجموع الاختيارات إذا كان لديك 100 وحده نختار 10 وحدات لأشغال الشريحة الأولى و10 من الباقي لأشغال الشريحة الثانية و30 من الباقي لأشغال الشريحة الثالثة و40 من الباقي لأشغال الشريحة الرابعة.

مثال: اشتق احتمالية التوزيع في إحصاء ماكسويل- بولتزمان

الحل/

رقم طرق الاختيار لـ n من الجسيمات لشريحة الطاقة الأولى من العدد الكلي من الجسيمات يعطى بالمعادلة التالية

$$C_{ni}^{N}=\frac{N!}{n_i!\,(N-n_i)!}$$

وعدد الاختيارات للشريحة الثانية هو $C_{n2}^{(N-n_1)}=\frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}$

وبذلك فان عدد الاختيارات الكلية لتوزيع الجسيمات على ثلاث شرائح طاقة يعطى بالعلاقة التالية

$$w=\frac{N!}{n_1\,!\,n_2!\,n_3!}$$

يمكن ان نضع n_s على g_s فيصبح $(g_s^{n_s})$ وبذلك يكون الترتيب الكلي لـ n_s جسيمة على الشرائح هو

$$w=\frac{N!}{n_1\,!\,n_2!\,n_3!\,\dots\dots n_s!}(g_1^{n_1}\times g_2^{n_2}\times\dots.\,g_s^{n_s}\ \ )$$

$$w=Ni\prod_{1}^{s}(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!})$$

وبصورة عامة لاستخراج الترتيب الدقيق يمكن ان نضع رقم الاشغال n_s على وزن الشريحة وبذلك يكون $g_s^{n_s}$ وعليه تكون طرق الترتيب لرقم الاشغال في الشريحة.

$$w = \frac{N!}{n_1\,!\,n_2!\,n_3!\dots\dots n_s!}\left(g_1^{n_1} \times g_2^{n_2} \times \dots . g_s^{n_s}\right) \tag{7}$$

وزن التوزيع المجهري   وزن التوزيع الظاهري

$$w = Ni\prod_{1}^{s}\left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right) \tag{8}$$

هذا التعبير لاحتمالية التوزيع الدقيق لماكسويل- بولتزمان

مثال: اربع جسيمات (a,b,c,d) تتوزع على شريحتين طاقة، جسيمتين في الشريحة الأولى وجسيمتين في الشريحة الثانية مع ثلاث خلايا (وزن) في الشريحة الأولى واربع خلايا في الشريحة الثانية ماهي عدد الحالات المجهرية.

الحل /عدد الجسيمات   N=4

$$n_1 = 2 \rightarrow g_1 = 3$$

$$n_2 = 2 \rightarrow g_2 = 4$$

$$w = Ni\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right) = 4! * \left(\frac{3^2}{2!} \times \frac{4^2}{2!}\right)$$

$$= 4! * \left(\frac{9}{2} \times \frac{16}{2}\right) = 864$$

مثال: نفترض خليتين i و j في فضاء الطور وأربع جسيمات موزعة على الخليتين احسب التوزيع الدقيق او جد الحالات المجهرية والظاهرية (الجاهرية).

الحل/

N_i	4	3	2	1	0
N_J	0	1	2	3	4

$$w = Ni\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right)$$

$$w_1 = 4! * \left(\frac{1^4}{4!} \times \frac{1^0}{0!}\right) = 1$$

$$w_2 = 4! * \left(\frac{1^3}{3!} \times \frac{1^1}{1!}\right) = 4$$

$$w_3 = 4! * \left(\frac{1^2}{2!} \times \frac{1^2}{2!}\right) = 6$$

$$w_4 = 4! * \left(\frac{1^1}{1!} \times \frac{1^3}{3!}\right) = 4$$

$$w_5 = 4! * \left(\frac{1^0}{0!} \times \frac{1^4}{4!}\right) = 1$$

$$w = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

عدد الحالات المجهرية 16 يقابلها 5 حالات جاهرية او (ظاهرية)

مثال: ستة جسيمات مميزه موزعة على ثلاث مستويات طاقة غير متحللة (g_s=1) المستوي الأول طاقته صفر والمستوي الثاني يمتلك طاقة مقدارها E والمستوي الثالث 2E. احسب

1-العدد الكلي للحالات المجهرية

2-احسب عدد الحالات المجهرية التي تحتوي على ثلاث جسيمات في المستوي الأول و2 في المستوي الثاني وواحده في المستوي الثالث.

3- جد طاقة أعظم توزيع.

4- احسب العدد الكلي للحالات المجهرية إذا كان المجموع الكلي للطاقة لست جسيمات تساوي 5E.

الحل/

الأول	6	5	4	4	3	3	2
الثاني	0	1	2	1	2	3	2
الثالث	0	0	0	1	1	0	2
عدد حالات التوزيع	(3)	(6)	(6)	(3)	(6)	(3)	(1)

-1

$$w_1 = 6! * \left(\frac{1}{6!} \times \frac{1}{0!} \times \frac{1}{0!}\right) = 1 \times 3 = 3$$

$$w_2 = 6! * \left(\frac{1}{5!} \times \frac{1}{1!} \times \frac{1}{0!}\right) = 6 \times 6 = 36$$

$$w_3 = 6! * \left(\frac{1}{4!} \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{0!}\right) = 15 \times 6 = 90$$

$$w_4 = 6! * \left(\frac{1}{4!} \times \frac{1}{1!} \times \frac{1}{1!}\right) = 30 \times 3 = 90$$

$$w_5 = 6! * \left(\frac{1}{3!} \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{1!}\right) = 60 \times 6 = 360$$

$$w_6 = 6! * \left(\frac{1}{3!} \times \frac{1}{3!} \times \frac{1}{0!}\right) = 20 \times 3 = 60$$

$$w_7 = 6! * \left(\frac{1}{2!} \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2!}\right) = 90 \times 1 = 90$$

$$W_{Total} = 729$$

-2

$$w = Ni \prod_{i=1}^{n} (\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}) = 6! * \left(\frac{1}{3!} \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{1!}\right) = 60$$

3- اعظم طاقة في حالة (2,2,2)

$$2 \times 0 + 2 \times E + 2 \times 2E = 6E$$

4- عدد الحالات المجهرية التي تحقق الطاقة 5E

$$n_1E_1 + n_2E_2 + n_3E_3 = 5E$$

$$3 \times 0 + 1 \times E + 2 \times 2E = 5E, W = 6! * \left(\frac{1}{3!} \times \frac{1}{1!} \times \frac{1}{2!}\right) = 60$$

$$2 \times 0 + 3 \times E + 1 \times 2E = 5E, W = 6! * \left(\frac{1}{2!} \times \frac{1}{3!} \times \frac{1}{1!}\right) = 60$$

$$1 \times 0 + 5 \times E + 0 \times 2E = 5E, W = 6! * \left(\frac{1}{1!} \times \frac{1}{5!} \times \frac{1}{0!}\right) = 6$$

$$W = 126$$

2- دالة التوزيع لماكسويل- بولتزمان

لغرض اشتقاق دالة التوزيع لماكسويل – بولتزمان نفترض هناك بعض القيم المعينة لأرقام الاشغال للوزن (W) للترتيب الدقيق وهذا الترتيب مع أعظم وزن يعطي احتمالية التوزيع للمجموعة.

1- نجد رقم الاشغال الضروري لأعظم وزن من خلال الشرط

$w = w_{max}$

الدالة تكون اعظم ما يمكن عندما يكون ميلها يساوي صفر $dw = \sum_s \frac{dw}{dn_s} dn_s = 0$

لنظام يتكون من N من الجسيمات فان الطاقة الكلية له تساوي

$$dE = \sum E_s dn_S \,, \quad dE = 0$$

$$\sum dn_s = dN = 0$$

$$w = N! \prod_{1}^{s} (\frac{g_s^{n_s}}{n_s!})$$

عند اخذ $\log W$ فالضرب يتحول الى جمع فتصبح المعادلة أعلاه بالشكل التالي

$$\log w = \log N! + \sum_s \log \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \tag{9}$$

نلاحظ العلاقات السابقة كلها تساوي صفر لذلك يمكن توحيدها بعلاقة واحدة باستعمال طريقة مضروبات لاكرانج. $(1, \propto, \beta)$

أي نضرب $d \log w$ بالعامل (1)

نضرب dN بالعامل $(\propto)$

نضرب dE بالعامل (β)

$$1\, d \log w + \alpha dN + \beta dE = 0 \tag{10}$$

$$\sum_s \frac{d \log w}{dn_s} dn_s + \alpha \sum_s dn_S + \beta \sum_S \epsilon_s dn_s = 0$$

$$\sum (\frac{d \log w}{dn_s} + \alpha + \beta \epsilon_s)\, dn_s = 0 \tag{11}$$

$$(\frac{d \log w}{dn_s} + \alpha + \beta \epsilon_s) = 0 \tag{12}$$

$$\log w = \log N! + \sum_s n_s \log g_s - \sum_s \log n_s! \qquad (13)$$

عند التعامل مع $\log N!$ الأفضل استخدم تقريب ستيرلنغ الذي يصلح للأرقام الكبيرة حتى تكون نسبة الخطأ قليلة جدا اي للأرقام الصغيرة فيساوي صفر

$$\log N! = N \log N - N \qquad (14)$$

$$\log 100! = 100 \log 100 - 100 \cong 100$$

$$\log 10! = 10 \log 10 - 10 = 0$$

نرجع للمعادلة رقم (13) ونطبق عليها تقريب ستيرلنغ فنحصل على

$$\log w = N \log N - N + \sum_s n_s \log g_s - \sum_s n_s \log n_s + \sum_s n_s \qquad (15)$$

ثم نشتق المعادلة رقم (15) فنحصل على

$$d \log w = dn_s \log g_s - dn_s \log n_s - n_s * \frac{1}{n_s} + dn_s$$

$$\frac{d \log w}{dn_s} = \log g_s - \log n_s - n_s * \frac{1}{n_s} + 1$$

$$\frac{d \log w}{dn_s} = \log g_s - \log n_s \qquad (16)$$

$$\frac{d \log w}{dn_s} = \log \frac{g_s}{n_s}$$

نعوض هذا المقدار في المعادلة (11)

$$\log \frac{g_s}{n_s} + \alpha + \beta \epsilon_s = 0 \qquad (17)$$

$$\log \frac{g_s}{n_s} = -(\alpha + \beta \epsilon_s)$$

$$\frac{g_s}{n_s} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_s)} \qquad (18)$$

$$g_s = n_s e^{-(\alpha + \beta \epsilon_s)}$$

نقلب المعادلة لنحصل على

$$n_s = g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_s)} \tag{19}$$

التوزيع العام لوحدات الطاقة المختلفة على شرائح الطاقة المختلفة الان اذا كان $g_s = 1$ تصبح

$$n_s = e^{(\alpha+\beta\epsilon_s)}$$

هذه المعادلة تعطي التوزيع الدقيق لوحدات الطاقة في الشريحة الواحدة.

3-إيجاد مضروب لاكرانج (β)

نفترض وجود نظامين A'', A' يحتويان N'', N' وضع النظامان في تماس حراري بحيث يحدث تبادل طاقي بينهما الى ان يصلان الى حالة التوازن الحراري عندما تكون درجة الحرارة متشابهة والطاقة الكلية للنظامين E تكون مستقرة او ثابتة.

$A'', \qquad A'$

$N''\,, \qquad N'$

$dN' = 0\,, \quad dN'' = 0\,, d\epsilon = 0$

للشرائح

$dN'_S\,, \qquad dN''_S$

للطاقات

$\epsilon'_S\,, \qquad \epsilon''_S$

$$E = \sum_S \epsilon'_S n'_s + \sum_s \epsilon''_S n''_s \tag{20}$$

$$N = \sum_S n_s \quad, dN' = \sum_s dn'_s \quad, dN'' = \sum_s dn''_s$$

$$dE = \sum_S \epsilon'_S\, dn'_s + \sum_s \epsilon''_S dn''_s = 0 \tag{21}$$

$\beta \quad \alpha$

$$w_{Total} = w' * w'' \tag{22}$$

$$\log w_{Total} = \log w' * \log w'' \tag{23}$$

$$\log w_{Total} + \alpha' dN' + \alpha'' dN'' + \beta d\epsilon = 0 \tag{24}$$

$$\log w' = \sum_s \frac{d \log w'}{dn'_s} dn'_s \quad, \log w'' = \sum_s \frac{d \log w''}{dn''_s} dn''_s$$

نعوض القيم المستخرجة لـ $d\epsilon$, dN , $\log w$ في المعادلة (23)

$$\sum_s \frac{d\log w'}{dn'_s} dn'_s + \sum_s \frac{d\log w''}{dn''_s} dn''_s + \alpha' \sum_s dn'_s \quad + \alpha'' \sum_s dn''_s$$

$$+\beta \sum_S \epsilon'_S \, dn'_s + \beta \sum_s \epsilon''_S dn''_s = 0 \qquad (25)$$

نفصل النظام الأول على الثاني

$$\left(\sum_s \frac{d\log w'}{dn'_s} + \alpha' + \beta\epsilon'_S\right) dn'_s + \left(\sum_s \frac{d\log w''}{dn''_s} + \alpha'' + \ \beta\epsilon''_S\right) dn''_s$$

$$\frac{d\log w'}{dn'_s}\alpha' + \beta\epsilon'_S = 0$$

$$\frac{d\log w''}{dn''_s}\alpha'' + \ \beta\epsilon''_S = 0$$

$$\therefore\ \beta = f(T)$$

كلا التوزيعان يعتمدان على الثابت β وهذا يعني ان β دالة لدرجة الحرارة لأنه ثابت نفس درجة الحرارة.

اعتماد β على تغير الطاقة

ان تغير الطاقة ينتج من إضافة كمية من الحرارة dQ الى النظام وإنجاز شغل(pdv) حيث p يمثل الضغط الذي يؤثر على النظام من المحيط و dv التغير بالحجم وبموجب قانون الثرموداينمك الأول.

$$dQ = dE + dW \qquad (26)$$

$$dE = dQ - pd\mathrm{v}$$

والطاقة تعطى بالعلاقة التالية

$$dE = d\sum_S E_s n_s = \sum \underbrace{E_S dn_s}_{dQ} + \sum \underbrace{n_s dE_S}_{-pdv}$$

وبمقارنة معادلتي الطاقة بشكليها نستنتج ان التغير بالطاقة وسببه التغير في حجم النظام وعليه فان المقدار

$$\sum n_s dE_S = -pd\mathrm{v}$$

$$\sum E_s dn_s = dQ$$

في حالة عدم التغير في الحجم نحصل على

$$d\log W + \underset{\underset{0}{\Downarrow}}{\alpha dN} + \beta dQ = 0 \tag{28}$$

لان أي زيادة في الطاقة يجب ان يكون راجعا (dQ) وفي حالة الحرارة المجهزة لأي مجموعة مع ثبوت عدد الوحدات $dN = 0$

$$\mathrm{dlog}\, W = -\beta dQ \tag{29}$$

$$\therefore dQ = -\frac{d\log w}{\beta}$$

$$\frac{dQ}{T} = dS \tag{30}$$

$$dS = -\frac{d\log W}{T\beta} \tag{31}$$

$$dS = Kd\log w \tag{32}$$

$$K = -\frac{1}{T\beta}$$

$$\therefore \ \beta = -\frac{1}{TK} \tag{33}$$

4- معدل طاقة النظام

من النظرية الحركية للغازات فان معدل الطاقة النظام تمتلك قيمة مشتقة من معادلة الغاز المثالي والتي تساوي

$$\bar{E} = \frac{3}{2}KT \tag{34}$$

$$K = \frac{R}{N_a} \qquad ,\epsilon_{Total} = \sum_s n_s \epsilon_S \qquad ,N = \sum_s n_s$$

$$E_{Total} = \sum_s \epsilon_S \, g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_S)} \tag{35}$$

$$\bar{E} = \frac{E_{Total}}{N} = \frac{\sum_s \epsilon_S g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_S)}}{\sum_S g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_S)}} \tag{36}$$

وان العامل e^{α} عامل يمكن التخلص منه. ولأجل حساب المقدار في المعادلة السابقة نكتب g_s كدالة لطاقة الشريحة (dE_s) ولهذا نفرض ان الحجوم المتساوية من فضاء الطور تحتوي على عدد متساوي من حالات الطاقة ، لذلك سوف نفرض ان كل وحدة حجم في فضاء الطور تحتوي على العدد B من حالات الطاقة.

وعلية فان جزء من فضاء الطور يحتوي على عدد من حالات الطاقة تعطى بالعلاقة التالية.

$$d\Gamma \;\Rightarrow Bd\Gamma$$

$$g_s = B(d\Gamma)_S \qquad (37)$$

$$\Delta\Gamma = \int (d\Gamma)_s = \int_x^{\cdot} \int_y^{\cdot\cdot} \int_z^{\cdots} dp_x dp_y dp_z dx dy dz \qquad (38)$$

التكامل فقط للفضاء العادي

$$\Delta\Gamma_s = dp_x dp_y dp_z * V$$

أي ان الغاز يتحرك في حجم ثابت والذي هو جزء من فضاء الطور والجزء الاخر يمثل فظاء الزخم. الان يمكن كتابة التغير في الزخم بالإحداثيات الكروية.

$$dV = dxdydz = 4\pi r^2 dr$$

$$\Delta\Gamma_s = 4\pi p^2 dp * V \qquad (39)$$

$$g_s = 4\pi p^2 dp * V$$

$$E = \frac{P^2}{2m}\;, P^2 = 2mE\;\;, P = \sqrt{2mE}\;\; \Rightarrow P = (2m)^{\frac{1}{2}}\,(E)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_s = 4\pi 2mE(2m)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (E)^{-\frac{1}{2}} dE.VB$$

$$g_s = 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE.VB \qquad (40)$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة رقم (36) فنحصل على التكامل التالي

$$\bar{E} = \frac{E_{Total}}{N} = \frac{3}{2}KT = \frac{\int_0^\infty 2\pi\big(2M\big)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}} e^{\beta E} dE.VB}{\int_0^\infty 2\pi\big(2M\big)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{\beta E} dE.VB} = \frac{\int_0^\infty E^{\frac{3}{2}} e^{\beta E} dE}{\int_0^\infty E^{\frac{1}{2}} e^{\beta E} dE} \qquad (41)$$

هذا التكامل الذي حدوده مقربة الى اللانهاية (لان الطاقات المتوفرة للوحدات من قيمه دنيا الى قيمه عليا هي اللانهاية) وان هذا التكامل من نوع كاما، لذلك سوف نفترض

$$X = \frac{E}{KT} \quad , \qquad E = X(KT) \qquad , dE = dX(KT)$$

نعوض هذه المتغيرات في التكامل أعلاه

$$\int_0^\infty E^{\frac{3}{2}} e^{\beta E} dE = \int_0^\infty e^{-X} (KT)^{\frac{3}{2}} * X^{\frac{3}{2}} * KTdx = (KT)^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = (KT)^{\frac{5}{2}} * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= (KT)^{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

وبنفس الطريقة نحسب المقام ونعوضها في المعادلة رقم (41)

$$\bar{E} = \frac{E_{Total}}{N} = \frac{3}{2}KT = \frac{(KT)^{\frac{5}{2}}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{(KT)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2}KT = -\frac{3}{2\beta}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}KT = -\frac{3}{2}\frac{1}{\beta}}$$

5- حساب (α)

من دالة التوزيع لماكسويل- بولتزمان يمكن حساب مضروب لانكراج α

$$n_s = g_s e^{\alpha - \frac{\epsilon_S}{KT}}$$

$$\sum n_s = \sum_s g_s e^{\alpha - \frac{\epsilon_S}{KT}} = e^{\alpha} \sum_s g_s e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}}$$

$$N = e^{\alpha} \sum_s g_s e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}}$$

$$\therefore e^{\alpha} = \frac{N}{\sum_s g_s e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}}} \qquad (42)$$

$$g_s = 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon . VB$$

$$e^{\alpha} = \frac{N}{\int 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} dE . VB e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}}}$$

$$\int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2}} e^{\beta\epsilon} dE = (KT)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = (-\beta)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$e^{\alpha} = \frac{N}{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}.VB(KT)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$e^{\alpha} = \frac{N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}.VB} \qquad (43)$$

$$\alpha = \log\frac{N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}.VB} \qquad (44)$$

الان يمكن كتابة معادلة ماكسويل- بولتزمان بالصيغة التفاضلية

$$n_s = g_s e^{\alpha-\frac{\epsilon_S}{KT}}$$

$$dn_s = Bd\Gamma e^{\alpha+\beta\epsilon_s}$$

$$n_\epsilon(\epsilon)d\epsilon = e^{\alpha+\beta\epsilon_s}2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon.VB \qquad (45)$$

نعوض قيمتي e^{α} و β سوف نحصل على

$$n_\epsilon(\epsilon)d\epsilon = \frac{N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}.VB} * 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}e^{\beta\epsilon_s}d\epsilon.VB$$

$$n_\epsilon(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi KT)^{\frac{3}{2}}} * e^{-\frac{E}{KT}}\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon \qquad (46)$$

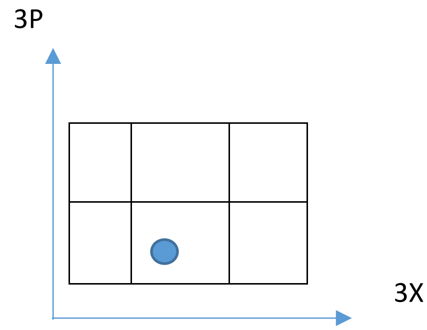
حيث ان$n_{(\epsilon)}d\epsilon$ تمثل عدد وحدات النظام التي تشغل شريحة الطاقة التي مداها يقع بين القيمة E وE+dE

6- تطبيقات إحصاء ماكسويل - بولتزمان

1- حساب معدل الصفات والأنظمة

لحساب معدل صفات الوحدات والأنظمة نعرف دالة الاحتمال $F(X,P)$.

الوحدات في النظام تكون في حالة عشوائية مستمرة في الفضاء



الدالة $F(X,P)$ هي احتمالية ايجاد نقطة التي تمثل حالة وحده ضمن حجم فضاء الطور $d\Gamma$

$$F(X,P)d\Gamma = \frac{dn}{N} \qquad (47)$$

$$0F(X,P)d\Gamma = \frac{Bd\Gamma e^{\alpha+\beta E_s}}{N} \qquad (48)$$

مثال / اثبت ان $\mathrm{P} = \prod_i^N F_i = (\frac{e^\alpha \beta}{N})^N e^{-\epsilon}/_{KT}$

$$Fd\Gamma = \frac{dn}{N}$$

$$\frac{dn}{N} = \frac{Bd\Gamma e^{\alpha+\beta\epsilon_s}}{N}$$

$$\mathrm{P} = \prod_i^N F_i = F_1F_2F_3 \ldots\ldots\ldots F_N$$

$$\mathrm{P}d\Gamma_{6N} = \frac{\beta d\Gamma_1}{N}e^\alpha . e^{\beta\epsilon_1} * \frac{\beta d\Gamma_2}{N}e^\alpha . e^{\beta\epsilon_2} * \frac{\beta d\Gamma_3}{N}e^\alpha . e^{\beta\epsilon_3}$$

$$e^\alpha . e^\alpha . e^\alpha \ldots\ldots\ldots.. = (e^\alpha)^N$$

$$\left(\frac{\beta}{N}\right).\left(\frac{\beta}{N}\right).\left(\frac{\beta}{N}\right)\ldots\ldots\ldots. = \left(\frac{\beta}{N}\right)^N$$

$$\mathrm{P} = (\frac{e^\alpha\beta}{N})^N e^{-\epsilon}/_{KT}$$

لحساب معدل صفة من صفات الوحدات) مثلا الصفة Y) هو

$$\overline{Y} = \frac{\int_{\Gamma}^{.} \overline{Y}(X,P)\, F(X,P) d\Gamma}{\int_{\Gamma}^{.} F(X,P) d\Gamma} = \frac{\sum_i Yi}{\sum_i Fi} \quad (49)$$

نعوض عن قيمة F في المعادلة

$$F(X,P)d\Gamma = \frac{dn}{N}$$

$$F(X,P) = \frac{Be^{\alpha+\beta\epsilon_s} d\Gamma}{N}$$

$$\overline{Y} = \frac{\int_{\Gamma}^{.} \overline{Y}(X,P) \frac{B}{N} e^{\alpha} . e^{\beta\epsilon_s}\, d\Gamma}{\int_{\Gamma}^{.} \frac{B}{N} e^{\alpha} . e^{\beta\epsilon_s} d\Gamma} = \frac{\int_{\Gamma}^{.} \overline{Y}(X,P) . e^{-\frac{\epsilon_s}{KT}}\, d\Gamma}{\int_{\Gamma}^{.} e^{-\frac{\epsilon_s}{KT}} d\Gamma}$$

2-إيجاد صفات الغاز المثالي

من معادلة توزيع ماكسويل –بولتزمان

$$n_s = g_s e^{\alpha+\beta\epsilon_S}$$

$$dn_s = Bd\Gamma e^{\alpha+\beta\epsilon_s}$$

سوف نكتب dn بدلالة الزخم والطاقة والسرعة

$$dn = n_p(p)dp \;, \qquad dn = n_\epsilon(\epsilon)d\epsilon \;, \qquad dn = n_v(v)dv$$

$$p = p + dp \;, \qquad E = E + dE \;, \qquad V = V + dV$$

الان يمكن استخراج العلاقات التالية

1- $dn = n_p(p)dp = \frac{4\pi N}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-P^2}{2mKT}} p^2 dp$ (50)

2- $n_v(v)dv = 4\pi N(\frac{m}{2\pi k})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV$ (51)

3-$n_\epsilon(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi KT)^{\frac{3}{2}}} * e^{-\frac{\epsilon}{KT}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon$ (52)

$$1 - n_p(p)dp = \underbrace{4\pi p^2 dp * VB}_{g} \underbrace{\frac{N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}.VB}}_{e^{\alpha}} e^{\frac{-P^2}{2m\,KT}}$$

$$n_p(p)dp = \quad e^{\frac{-P^2}{2m\,KT}} p^2 dp$$

نكتب هذه المعادلة بدلالة السرعة

$$p = mv \ \ , p^2 = m^2v^2, dp = mdv$$

$$n_v(v)dv = \frac{4\pi N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} m^2v^2.mdV = \frac{4\pi N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}} m^3\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, v^2 dV$$

$$\therefore n_v(v)dv = 4\pi N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV$$

الان نحول الاحداثيات الكروية الى الاحداثيات الاسطوانية وكما يلي

$$4\pi v^2 dV = dv_x\, dv_y\, dv_z$$

فتصبح المعادلة أعلاه

$$n_v(v)dv = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 v_y^2 v_z^2)}{2kT}} dv_x\, dv_y\, dv_z$$

نكتب هذا المقدار بدلالة مركبات السرعة وكما يلي

$$n_v(v)dv = n_3(v_x v_y v_z) dv_x dv_y dv_z$$

كتبت بصيغة مركبات السرعة لسبب انه كم وحدة بالنظام تمتلك مركبة سرعة في لحظة معينة باتجاه X في مدى $v_X \rightarrow v_x + dv_x$

يمكن إيجاد عدد الوحدات $n(v_x)dv_x$ من المعادلة رقم (50)

$$n_3\big(v_x v_y v_z\big) dv_x dv_y dv_z = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 v_y^2 v_z^2)}{2kT}} dv_x\, dv_y\, dv_z \qquad (53)$$

إذا كان لدينا ثلاث متغيرات *(x,y,z)* وأردنا ان نثبت أحدهما ونجعل الاخرين قيم معلومة فنستخدم التكامل

$$\int_{v_y=-\infty}^{\infty}\int_{v_z=-\infty}^{\infty} n_3(v_x v_y v_z)dv_x dv_y dv_z = n(v_x)dv_x$$

السرعة تأخذ القيم من $\infty \rightarrow 0$بينما مركبات السرعة تأخذ القيم من $\infty \rightarrow \infty -$ لانها قيم عددية.

$$n(v_x)dv_x = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_Z^2}{2kT}}dv_Z\, e^{-\frac{mv_X^2}{2kT}}dv_x.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Longrightarrow \frac{\pi}{a} = a = -\frac{m}{2kT}$$

$$n(v_x)dv_x = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \frac{\pi 2kT}{m} e^{-\frac{mv_X^2}{2kT}}dv_x$$

$$n(v_x)dv_x = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_X^2}{2kT}}dv_x \qquad (54)$$

$$F_{(V_x)}dv_x = \frac{n(v_x)dv_x}{N}$$

$$F_3(v_x v_y v_z) = \frac{n_3(v_x, v_y, v_z)}{N}$$

$$F_{(V_x)} = \frac{n(v_x)}{N}$$

$$F_P(P) = \frac{n_P(P)}{N}$$

1-نحسب معدل السرعة V حسب التعريف التالي

$$\bar{Y} = \int YFd\Gamma \qquad (55)$$

$$\bar{\bar{V}} = \int VF_V(V)dV$$

$$n_v(v)dv = 4\pi N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dV \div N$$

$$F_V(V)dV = \frac{n_v(v)dv}{N} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dV \qquad (56)$$

$$\bar{\bar{V}} = \int_0^\infty v4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dV$$

$$\bar{\bar{V}} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty V^3e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dV$$

هذا التكامل من نوع كاما الذي يحل بالطريقة التالية

$$\int_0^\infty X^n\, e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$$

$$\int_0^\infty V^3e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dV = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{3+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right) = \frac{1}{2(\alpha)^2}\Gamma(2) = \frac{1}{2(\alpha)^2}$$

$$\alpha = \frac{m}{2kT}\ ,\alpha^2 = \frac{m^2}{4K^2T^2}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1 * 0! = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 * 1 * 0! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

$$\bar{V} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} * \frac{4K^2T^2}{2m^2}$$

$$\bar{V} = \frac{16\pi}{2}\frac{K^2T^2}{m^2}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} * (\frac{m}{2\pi kT})$$

$$\bar{V} = 4\frac{KT}{m}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} = 4\left(\frac{KT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{KT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{KT}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad (57)$$

2- حساب معدل مربع السرعة $\overline{V^2}$

$$\bar{V} = \int V^2F_V(V)dV$$

$$\bar{\bar{V}} = \int_0^\infty v^2 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty V^4 e^{-av^2} dv = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} * \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{2kT}{m}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$4\pi * \frac{kT}{m}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} * \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{3KT}{m}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{\overline{V^2}}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} \qquad (58)$$

3- حساب السرعة الأكثر احتمالا V_m

نقصد بالسرعة الأكثر احتمالا السرعة العادية التي تتحرك بها الجزيئات داخل الفضاء.

$$F_V(V)dV = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV$$

نفاضل المعادلة ونجعل التفاضل مساويا للصفر

$$dF_V(V)dV = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 2v - V^2 \frac{2mV}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dV$$

$$\frac{dF_V(V)}{dV} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2V - \frac{V^3 m}{KT}\right)$$

$$\left(\frac{dF_V(V)}{dV}\right)_{Max} \quad Where \quad \frac{dF(V)}{dV} = 0$$

$$\left(2V - \frac{V^3 m}{KT}\right) = 0 \Longrightarrow V\left(2 - \frac{V^2 m}{KT}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{V^2 m}{KT} = 2$$

$$\therefore\ V^2=\frac{2KT}{m}\Longrightarrow\quad V_m=\sqrt{\frac{2KT}{m}} \tag{59}$$

3-مبدا التوزيع المتساوي للطاقة

اذا امكن ان نعبر عن طاقة الوحدة بشكل مربعات الاحداثيات (احداثيات فضاء الطور) فان معدل الطاقة المصاحبة لكل احداثي مربع هو $\frac{1}{2}KT$

1- ان معدل طاقة وحدة النظام المثالي هي $\epsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_x^2}{2m}$

اذن حسب مبدأ التوزيع المتساوي للطاقة تكون الطاقة المصاحبة لكل احداثي هو $\epsilon=\frac{1}{2}KT$

$$\bar{\epsilon}=\frac{1}{2}KT+\frac{1}{2}KT+\frac{1}{2}KT=\frac{3}{2}KT$$

2- لنظام يتكون من متذبذبات بسيطة مستقلة كل منها يتذبذب بثلاثة ابعاد فان طاقة المتذبذب الواحد هي

$$\epsilon=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}mv_z^2+\frac{1}{2}\mu x^2+\frac{1}{2}\mu y^2+\frac{1}{2}\mu z^2$$

حسب التوزيع المتساوي للطاقة فان $\epsilon=6\times\frac{1}{2}KT=\frac{3}{2}KT$

3- نبرهن على ان معدل الطاقة المصاحبة لحركة وحدة نظام مثالي مقيده باتجاه (X) هو $\bar{\epsilon}=\frac{1}{2}KT$

$$\overline{Y}=\frac{\int_\Gamma^{\cdot} Y(X,P)\,F(X,P)d\Gamma}{\int_\Gamma^{\cdot} F(X,P)d\Gamma}\qquad,\qquad F(X,P)d\Gamma=\frac{dn}{N}$$

نعوض عن قيمة F في المعادلة

$$F(X,P)d\Gamma=\frac{dn}{N}$$

$$\overline{Y}=\frac{\int_\Gamma^{\cdot} Y(X,P)\frac{dn}{N}d\Gamma}{\int_\Gamma^{\cdot}\frac{dn}{N}d\Gamma}=\frac{\int_\Gamma^{\cdot} Y(X,P).\,e^{-\frac{E_s}{KT}}d\Gamma}{\int_\Gamma^{\cdot} e^{-\frac{E_s}{KT}}d\Gamma}$$

$$\bar{\epsilon}_x = \left(\frac{\overline{p_x^2}}{2m}\right) = \frac{\int\int\int\int\int\int \frac{p_x^2}{2m} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mKT}} dxdydzdp_x\, dp_y dp_z}{\int\int\int\int\int\int e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mKT}} dxdydzdp_x\, dp_y dp_z} \tag{60}$$

نحصل من هذا المقدار على ستة تكاملات خمس متماثلة فنحذفها ويبقى واحد هو

$$\bar{\epsilon}_x = \left(\frac{\overline{p_x^2}}{2m}\right) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x^2}{2m} e^{-\frac{p_x^2}{2mKT}} dp_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2mKT}} dp_x} \tag{61}$$

هذا التكامل من نوع كاما يمكن كتابته بالصيغة التالية

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 e^{-ap^2} dp_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2} dp_x}$$

$$\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 e^{-ap^2} dp_x = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2(\frac{1}{2mkT})^{\frac{3}{2}}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2} dp_x = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2(\frac{1}{2mkT})^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi}$$

نعوض المقدارين في المعادلة (61) فنحصل على

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{(2mkT)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}{8m} * \frac{2}{(2mkT)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}KT$$

5- دالة التجزئة *(Z)*

من احتمالية التوزيع لإحصاء ماكسويل – بولتزمان يمكن اشتقاق دالة التجزئة

$$W = Ni\prod_{1}^{s}\left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right)$$

$$\log W = N\log N - N + \sum_s n_s \log g_s - \sum_s n_s \log n_s + \sum_s n_s$$

$$\log W = N\log N + \sum_s n_s(\log g_s - \log n_s)$$

$$\log W = N\log N + \sum_s n_s \log\frac{g_s}{n_s} \tag{62}$$

$$n_s = g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_s)} \leftrightarrow \frac{n_s}{g_s} = e^{(\alpha+\beta\epsilon_s)} \leftrightarrow \frac{g_s}{n_s} = e^{-(\alpha+\beta\epsilon_s)}$$

$$\log W = N\log N + \sum_s n_s \log e^{-(\alpha+\beta E_s)} = N\log N + \sum_s n_s(-\alpha - \beta\epsilon_s)$$

$$\log W = N\log N - \alpha\sum_s n_s - \beta\sum n_s\,\epsilon_s$$

$$\log W = N\log N - \alpha N - \beta\epsilon \tag{63}$$

$$e^{\alpha} = A \;\;\Rrightarrow\;\; \alpha = \log A$$

$$\log W = N\log N - N\log A - \beta\epsilon$$

$$\log W = N\log\frac{N}{A} - \beta\epsilon$$

$$\therefore Z = \frac{N}{A} \leftrightarrow Z = \frac{\sum_s n_s}{A} = \frac{\sum_s g_s e^{\alpha+\beta\epsilon_s}}{e^{\alpha}} = \sum_s g_s e^{\beta\epsilon_s}$$

$$Z = \sum_s g_s e^{-\frac{\epsilon_s}{KT}} \tag{64}$$

تعريف Z المستخدم في الحسابات

6-ربط الدالة Z مع الانتروبي

$$\log W = N\log Z - \beta\epsilon \tag{65}$$

$$S = K\ln\Omega \qquad , \;\; \Omega \leftrightarrow \mathrm{W}$$

نضرب المعادلة (65)*في* K فنحصل على

$$K\log W = KN\log Z + \frac{K\epsilon}{KT}$$

$$S = KN\log Z + \frac{\epsilon}{T} \tag{66}$$

وهي اول علاقة ثرموديناميكية بدلالة Z

7-إيجاد الطاقة الحرة بدلالة Z

من القانون الأول في الثرموداينمك

$$dE = dQ - dW \quad , \frac{dQ}{T} = dS$$

نكتب القانون الموحد الذي يجمع القانونين الأول والثاني في الثرموداينمك

$$dE = Tds - pdv$$

$$F = U - TS = E - TS$$

$$F = E - T\left\{KN\log Z + \frac{E}{T}\right\}$$

$$F = -T\,KN\log Z \qquad (67)$$

8- حساب الطاقة الداخلية بدلالة Z

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{\sum_S n_s \epsilon_S}{\sum_S n_s} = \frac{\sum_s g_s \epsilon_S e^{\alpha+\beta\epsilon}}{\sum_S g_s e^{\alpha+\beta\epsilon}} = \frac{\sum_s g_s \epsilon_S e^{\beta\epsilon}}{\sum_S g_s e^{\beta\epsilon}} = \frac{\sum_s g_s \epsilon_S e^{\beta\epsilon}}{Z}$$

$$Z = \sum_s g_s e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}}$$

$$\frac{dZ}{dT} = \sum_s g_s e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}}\left(+\frac{\epsilon_S}{K}\frac{1}{T^2}\right) = \frac{1}{KT^2}\sum_s g_s \epsilon_S e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}} \qquad (68)$$

نضرب المعادلة (68*) في* KT^2 فنحصل على

$$KT^2 \frac{dZ}{dT} = \sum_s g_s E_S e^{-\frac{\epsilon_S}{KT}} \qquad (69)$$

$$\bar{E} = \frac{KT^2 \frac{dZ}{dT}}{Z}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dy} = \frac{d\log x}{dy} \rightarrow d\log x = \frac{dx}{x}$$

$$\bar{E} = KT^2\left(\frac{d\log Z}{dT}\right)_V \qquad (70)$$

هذه المعادلة تمثل معدل الطاقة لوحده واحده

$$E = N\bar{E} = NKT^2\left(\frac{d\log Z}{dT}\right)_V \qquad (71)$$

هذه المعادلة تمثل الطاقة الكلية او الطاقة الداخلية بدلالة Z

طريقة أخرى لحساب Z

$$Z=\sum_{s} g_s e^{-\frac{\epsilon_s}{KT}}$$

طاقة النظام الكلاسيكي تكون مستمرة وتبدأ من الصفر الى اللانهاية

$$Z=\int_{0}^{\infty} 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}\, VBe^{-\frac{\epsilon}{KT}}d\epsilon$$

$$Z=2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}VB\int_{0}^{\infty}\epsilon^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\epsilon}{KT}}dE=2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}VB*(KT)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Z=(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}VB \qquad (72)$$

9-مكونات دالة التجزئة

$$Z=\sum_{s} g_s e^{-\frac{\epsilon_s}{KT}} \quad ,g_s=1$$

إذا كانت الطاقة المتوفرة للوحدات بأشكال مختلفة مثلا الحركية والاهتزازية والدورانية وعليه يمكن كتابة الطاقة لأكثر من شكل واحد

$$E_T=E_{1\ell}+E_{2j}+E_{3\mathrm{M}}$$

ℓ, j, M تمثل مستويات الطاقة او الرقم الكمي

$$Z=\sum_{\ell,j,\mathrm{M}} g_s e^{-\frac{(E_{1\ell}+E_{2j}+E_{2\mathrm{M}})}{KT}}=\sum_{\ell,j,\mathrm{M}} g_s(e^{-\frac{(E_{1\ell})}{KT}}*e^{\frac{-E_{2j}}{KT}}*e^{\frac{-E_{3\mathrm{M}}}{KT}})$$

$$Z=Z_1\, Z_2\, Z_3$$

كل Z يعود لشكل من اشكال الطاقة.

10- الحرارة النوعية

ان مبدأ التوزيع المستمر للطاقة يفيد في حساب الحرارة النوعية للأنظمة، نرمز لدرجة الحرية بالرمز F

$$E=F\frac{1}{2}KT \qquad (73)$$

طاقة غرام واحد من جزيئات الغاز عند درجة حرارة T

$$E=N_aF\frac{1}{2}KT \qquad (74)$$

$$C_V = \frac{1}{2} N_a K F$$

$$C_V = \frac{1}{2} R F \qquad (75)$$

1- لغاز احادي الذرات توجد ثلاث مركبات للطاقة الحركية الانتقالية لذلك $F = 3$

$$C_V = \frac{3}{2} R \qquad (76)$$

2- لجزيئات الغاز ثنائي الذرات هناك خمس درجات حرية (ثلاثة انتقالية + اثنان دورانية) $F = 5$

$$C_V = \frac{5}{2} R \qquad (77)$$

3- لجزيئات غاز ثلاثي الذرات او لذره او جزيئة في صلب $F = 6$

$$C_V = \frac{6}{2} R = 3R \qquad (78)$$

1- للغاز المثالي احادي الذرات

$$C_P - C_V = R \rightarrow C_P - \frac{3}{2} R = R \rightarrow C_P = \frac{5}{2} R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5}{2} R}{\frac{3}{2} R} = \frac{5}{3}$$

2-الحرارة النوعية لجزيئات الغاز ثنائي الذرات (لنظام مثالي)

$$C_V = \frac{5}{2} R$$

$$C_P - C_V = R \rightarrow C_P - \frac{5}{2} R = R \rightarrow C_P = \frac{7}{2} R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{7}{2} R}{\frac{5}{2} R} = \frac{7}{5}$$

3-الحرارة النوعية لنظام مثالي ثلاثي الذرة او لذرة او جزيئة صلب

$$C_P - 3R = R \rightarrow C_P = 4R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{4R}{3R} = \frac{4}{3}$$

مثال: نظام كلاسيكي يتوفر لوحداته أربعة مستويات للطاقة وكما يلي

$E_4 = 6\mathrm{KT}, E_3 = 4KT, E_2 = 2KT, E_1 = KT$ وأرقام الاشغال لهذه المستويات

$n_4 = 1, n_3 = 3, n_2 = 5, n_1 = 2$ جد السعة الحرارية للنظام بدرجة حرارة *300k*.

الحل/

$$E = \sum_S n_s E_S = n_1 E_1 + n_2 E_2 + n_3 E_3 + n_4 E_4$$

$$E = 2KT + 10KT + 12KT + 6KT = 30KT$$

$$C_V = \frac{dE}{dT} = 30K$$

الفصل الثالث

إحصاء بوز-آينشتاين

ان الجسيمات التي تتبع إحصاء بوز- أينشتاين هي جسيمات متماثلة وغير متميزة تسمى بوزونات (الفوتونات او الميزونات) التي عزمها او برمها يساوي صفر او عدد صحيح من $\hbar$ وهي تخضع للميكانيك الكمي لا تتقيد بمبدأ باولي أي بإمكان أي خلية في فضاء الطور ان يشغلها عدد من الجسيمات ويطبق هذا الإحصاء على نظام مثالي معزول .

1-الاحتمالية الثرموداينمكية لإحصاء أينشتاين

بالرغم من ان البوزونات متماثلة الا انه من المفيد ان نشتق الاحتمالية لجسيمات متميزة مثل a ,b ,c ولكن سوف نقسم الاحتمالية الناتجة على مضروب $N_i!$ لكون الجسيمات غير متميزة ولكونها لا تخضع لمبدأ باولي لذلك فبإمكان أي خلية طور استيعاب أي عدد من الجسيمات. فلو فرض (N_i) بوزونات موزعة على g_i من خلايا الفضاء والتي طاقتها E_i عند المستوي i ولإيجاد g_i خلية بحيث وضع (g_i-1) جدار.

لإيجاد عدد المرات (ω_i) لتوزيع N_i من البوزونات على g_i خلية نتصور ان هناك ($N_i + g_i - 1$) من المواقع تقع على خط مستقيم. حيث نضع اما جدار او بوزون على هذا الموقع.

مثال (1): اذا كان لدينا N_i=4 وg_i=3 ما هو عدد المواقع المشغولة وما هو عدد الجدران.

$(N_i + g_i - 1)=4+3-1=6$

عدد الجدران $g_i-1= 3-1=2$

1	2	3	4	5	6
●	●		●		●

مجموع طرق التوزيع هي:

$$\omega_{B.E} = \frac{(N_i+g_i-1)!}{Ni!(g_i-1)!} \qquad (1)$$

هذه المعادلة تبين طرق توزيع الجسيمات على الخلايا والخلايا على المستويات وتوزيع الجدران ما بين الخلايا.

مثال(2): يحتوي مستوي الطاقة i على ثلاث خلايا(شرائح) $g_i=3$ ومن جسيمتين $N_i=2$ احسب التوزيعات الممكنة.

$$\omega_{B.E} = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} = \frac{(2 + 3 - 1)!}{2!\,(2 \times 1)!} = 6$$

1	2	3	4	5	6
● ●			●		●
	● ●		●	●	
		● ●		●	●

توزيع بوز-آينشتاين لثلاث خلايا بدون تحديد عددها في كل خلية.

مثال (3): احسب الاحتمالية لمستوي يحتوي على خلية واحده وغير متحللة. يعني $g_i = 1$

$$\omega_{B.E} = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} = \frac{N!}{N_i!\,(g_i - 1)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

2-اشتقاق دالة التوزيع بوز- آينشتاين

$$\omega_{B.E} = \prod_s \frac{(n_s + g_s - 1)!}{n_s!\,(g_s - 1)!}$$

الان نفترض ان

$$N = Constant \qquad , E = Constant \qquad , w = Maximum$$

$$dN = 0 \quad , \qquad dE = 0 \; , \qquad logw = Max \quad , \quad dlogw = 0$$

$$\log w_{B.E} = \sum_S [\log\big((g_s - 1) + n_s\big)! - \log[(g_s - 1)! - \log n_s\,!] \qquad (2)$$

وباستعمال تقريب ستيرلنغ نحصل على

$$\log w_{B.E} = \sum_S [((g_s - 1) + n_s)\log\big((g_s - 1) + n_s\big) - ((g_s - 1) + n_s) -$$

$$(g_s - 1)\log(g_s - 1) + (g_s - 1) - n_s \log n_s + n_s] \qquad (3)$$

$$\log w_{B.E} = \sum_{s}[(g_s - 1) + n_s)\log\big((g_s - 1) + n_s\big) - (g_s - 1)\log(g_s - 1) - n_s \log n_s]$$

$$\frac{\mathrm{d}\log w_{B.E}}{\mathrm{dn}_s} = \frac{(g_s - 1) + n_s}{(g_s - 1) + n_s} + \log\big((g_s - 1) + n_s\big) - 0 - n_s \frac{1}{n_s} - \log n_s$$

$$\frac{\mathrm{d}\log w_{B.E}}{\mathrm{dn}_s} = 1 + \log\big((g_s - 1) + n_s\big) - 1 - \log n_s$$

$$\frac{\mathrm{d}\log w_{B.E}}{\mathrm{dn}_s} = \log\frac{(g_s - 1) + n_s}{n_s} \qquad (4)$$

نهمل الرقم 1- لا يؤثر لان g و n كبيران

$$\frac{\mathrm{d}\log w_{B.E}}{\mathrm{dn}_s} = \log\frac{g_s + n_s}{n_s} \qquad (5)$$

نعوض هذه النتيجة في معادلة مضروبات لانكراج

$$\textstyle\sum_s \left(\frac{\mathrm{d}\log w_{B.E}}{\mathrm{dn}_s} + \alpha + \beta\epsilon\right) dn_s = 0 \qquad (6)$$

$$\log\tfrac{g_s + n_s}{n_s} + \alpha + \beta\epsilon = 0 \qquad (7)$$

$$\log\frac{g_s + n_s}{n_s} = -(\alpha + \beta\epsilon)$$

$$\frac{g_s + n_s}{n_s} = e^{-(\alpha + \beta\epsilon)} \qquad (8)$$

$$\frac{g_s}{n_s} + 1 = e^{-(\alpha + \beta\epsilon)}$$

$$\tfrac{g_s}{n_s} = e^{-(\alpha + \beta\epsilon)} - 1 \qquad (9)$$

$$\therefore n_s = \tfrac{g_s}{e^{-(\alpha + \beta\epsilon)} - 1} \qquad (10)$$

يمكن كتابة معادلة (10) بصوره أخرى

$$\beta = -\frac{1}{KT} \qquad , e^{\alpha} = A$$

$$n_s = \frac{g_s}{\frac{1}{A} e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1} \qquad (11)$$

3- غاز بوز- أينشتاين

بما ان جزيئات الغاز الاعتيادي تمتلك زخم > $\hbar = \left(\frac{h}{2\pi}\right)$ والجزيئات هي البوزونات

$$n_s = \frac{g_s}{\frac{1}{A} e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1}$$

وزن شريحة الطاقة التي تشغل حجما مقداره $g = Bd\Gamma \Longrightarrow \frac{d\Gamma}{\hbar^3}$

حجم فضاء الطور للمدى $\epsilon + d\epsilon$ يعطى بالمعادلة التالية

$$d\Gamma = 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon V \qquad (12)$$

عدد حالات الطاقة المتوفرة في هذا المدى

$$g_\epsilon d\epsilon = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon V}{\hbar^3} \qquad (13)$$

هذه المعادلة تمثل كثافة الحالات g_ϵ

لذلك فان عدد الجزيئات التي تمتلك طاقة مقدارها يقع بين $\epsilon + d\epsilon$ هو

$$n_\epsilon d\epsilon = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon V}{\hbar^3 \frac{1}{A} e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1} \qquad (14)$$

4- تكثف أينشتاين

$$n_s = \frac{g_s}{e^{-(\alpha+\beta E)} - 1} \qquad , A = e^{\alpha} \Longrightarrow e^{-\alpha} = \frac{1}{A}$$

$$\int n_\epsilon d\epsilon = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} V \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon}{\hbar^3 \frac{1}{A} e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1}$$

$$N = \int \frac{g_\epsilon d\epsilon}{\frac{1}{A} e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1}$$

في حالة $(g_{\epsilon=0})$

مستوي الطاقة الصفري لا ينقسم الى مستويات أخرى ورياضيا يساوي صفر ويكون وزن المستوي مساويا للواحد $g_{(0)} = 1$

$$N = \int_0^\infty \frac{g_{(0)} dE}{\frac{1}{A} e^{\frac{E}{KT}} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{A} - 1} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{g_E dE}{\frac{1}{A} e^{\frac{E}{KT}} - 1}}_{\text{لبقية المستويات}} \qquad (15)$$

$$N = N_0 + N^1$$

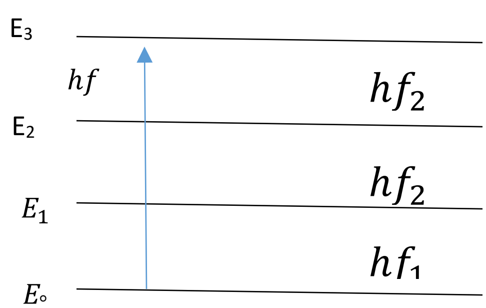
N^1 عدد والوحدات التي طاقتها أكبر من الصفر

5- تطبيقات إحصاء أينشتاين

1- الغاز الفوتوني

من اهم تطبيقات إحصاء بوز-أينشتاين هو تحليل الاشعاعات الكهرومغناطيسية المحصورة في تجويف بحالة اتزان حراري بين الاشعاعات وذرات مادة التجويف. ويسمى هذا الاشعاع بإشعاع الجسم الأسود حيث ان ذرات الجدران تمتص وتشع الفوتونات حتى تصل الى حالة الاتزان حينئذ تكون سرعة الامتصاص تساوي سرعة الانبعاث ويكون لطيف هذا الاشعاع توزيع للطاقة بدرجة حرارة الاتزان للجسم الأسود وهي لا تعتمد على طبيعة المادة. وبما ان الاشعاعات الكهرومغناطيسية تتصرف عند تفاعلها مع المادة كما لو كانت جسيمات طاقتها (hf) وزخم $\frac{h}{\lambda}$ او $\frac{hf}{c}$ وسوف نفترض ان هذه الفوتونات المتزنة داخل التجويف تتصرف كغاز يخضع لإحصاء بوز-أينشتاين. نفترض انها لا تتفاعل مع بعضها تتأثر فقط بذرات الجدار. وبما ان الفوتونات غير متميزة وان عددها غير ثابت $EdN \neq 0$ فبامكان فوتون طاقته hf ان يهيج ذره من مستوى استقرارها E_0
بحيث عند عودتها الى وضع الاستقرار ينبعث عدد من الفوتونات بطاقات hf_1, hf_2, hf_3..........
بحيث ان طاقة الفوتون المتهيج يساوي مجموع طاقات الفوتونات المنبعثة.

$$hf = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \ldots$$



$$dN \neq 0 \quad , \quad E = hf \quad , \quad \frac{hc}{\lambda}$$

$$\alpha dN = 0 \quad , \quad \alpha = 0$$

$$n_s = \frac{g_s}{e^{-(\alpha+\beta E)} - 1} \Longrightarrow n_s = \frac{g_s}{e^{\frac{E}{KT}} - 1}$$

$$dn = dn(\lambda)d\lambda = \frac{g(\lambda)d\lambda}{e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1} \qquad (16)$$

$dn(\lambda)d\lambda$ تمثل عدد الفوتونات او عدد المستويات في مدى الاطوال الموجيه المحصوره بين $\lambda + d\lambda$ و λ.

كثافة الحلات بدلالة الطول الموجي تعطى بالعلاقة التالية

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{4\pi d\lambda}{\lambda^4} \qquad (17)$$

وبما ان استقطاب الموجة باتجاهين (x,y) نضرب المعادلة (17) * 2

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi d\lambda}{\lambda^4} \qquad (18)$$

معادلة توزيع بوز-أينشتاين لطول الموجي

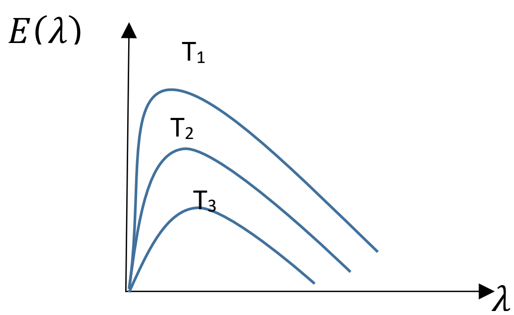
$$n_\lambda(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi d\lambda}{\lambda^4} * \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} \qquad (19)$$

نضرب طرفي المعادلة (19) بـ $\frac{hc}{\lambda}$

$$\frac{hc}{\lambda} dn_\lambda(\lambda)d\lambda = d\epsilon(\lambda)d\lambda$$

$$\boldsymbol{\epsilon(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} * \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} d\lambda} \qquad (20)$$

المعادلة (20) تمثل معادلة بلانك لإشعاع الجسم الأسود



الشكل يمثل التوزيع الطيفي لطاقة الغاز الفوتوني $T_1 > T_2 > T_3$

1- في حالة الاطوال الموجية الكبيرة فان $e^x = 1 + x$

$$x = \frac{hc}{\lambda KT}$$

سوف تصبح معادلة بلانك بالصورة التالية:

$$\boldsymbol{E(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} * \frac{1}{(1+\frac{hc}{\lambda KT}-1)} d\lambda \Rightarrow d\epsilon(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi KTd\lambda}{\lambda^4}} \qquad \mathbf{(21)}$$

المعادلة (21) تمثل معادلة رايلي جينز للإشعاع الجسم الأسود

2- في حالة الطوال الموجية الصغيرة تصبح $\frac{hc}{\lambda KT}$ كبيره يمكن اهمال (1) فنحصل على معادلة فين لاشعاع الجسم الأسود

$$\boldsymbol{\epsilon(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda KT}} d\lambda} \qquad (22)$$

نتأمل فتحه صغيره في الفجوة بحيث يبقى الاشعاع في الفجوة في حالة اتزان، مساحة الفتحة وحده واحده كم فوتون ينفذ من خلال الفتحة ؟ عدد الفوتونات التي تصطدم بالجدار في وحدة الحجم $\bar{n} = \frac{1}{4} n\bar{v}$

$\bar{n}$ معدل الوحدات n عدد الوحدات لوحدة الحجم، $\bar{v}$ معدل السرعة، عند الانتقال من الغازات الى الفوتونات فالسرعة تتحول الى سرعة الضوء.

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{n_\lambda(\lambda)d\lambda c}{4} \qquad (23)$$

n_{rad} عدد الفوتونات النافذه من الفتحة، $n_\lambda(\lambda)d\lambda$ تمثل عدد الفوتونات في المدى $\lambda + d\lambda$ و λ في وحدة الحجم في الفجوه نضرب طرفي المعادلة (23) بالطاقة $\frac{hc}{\lambda}$

$$\boxed{n_{rad}(\lambda)d\lambda = n_\lambda(\lambda)d\lambda\frac{c}{4} = \frac{hc}{\lambda} * \frac{8\pi d\lambda}{\lambda^4} * \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1} * \frac{c}{4}}$$

$$\frac{hc}{\lambda} n_{rad}(\lambda)d\lambda = \epsilon_{rad}(\lambda)d\lambda \qquad (24)$$

$$\epsilon_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi hc^2 d\lambda}{\lambda^5(e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1)} \qquad (25)$$

تمثل الفوتونات المنبعثة من داخل الفجوة الى الخارج.

لحساب الطاقة الكلية الاشعاعات داخل الفجوة للجسم الأسود يتم حسابها من معادلة بلانك

$$E_{Total} = \int_0^{\infty} E_{(\lambda)} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} * \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} d\lambda \qquad (26)$$

$$t = \frac{hc}{\lambda KT} \quad , \quad \lambda = \frac{hc}{tKT} \quad , \quad d\lambda = -\frac{hc}{KTt^2}\, dt$$

نعوض في المعادلة (26)

$$E = 8\pi hc \int_0^{\infty} \frac{t^5 K^5 T^5}{h^5 c^5 KTt^2} \frac{hc}{(e^t - 1)} dt$$

$$E = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{KT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{t^3}{(e^t - 1)} dt \quad , \int_0^{\infty} \frac{t^3}{(e^t - 1)} dt = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\epsilon_{rad} = \frac{8\pi^5 K^4}{15 c^3 h^3} T^4 \qquad (27)$$

نضرب معادلة (27) في $\frac{c}{4}$ فنحصل على

$$\epsilon_{rad} = \frac{2\pi^5 K^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

$$\epsilon_{rad} = \sigma T^4 \qquad (28)$$

المعادلة تمثل طاقة الاشعاع المنبعث لوحدة المساحة لوحدة الزمن لجسم عند درجة حرارة T وبدورها تمثل قانون ستيفان –بولتزمان حيث ان الطاقة المنبعثة من الجسم الأسود تتناسب مع درجة الحرارة للأساس أربعة.

2- الغاز الفونوني وكيفية حساب السعة الحرارية

الفونون هو الطاقة المصاحبة للموجات الميكانيكية التي تنشر في المواد (أي اهتزازات جزيئات المادة) و لا تنتقل في الفراغ و الفونون يشبه الفوتون، للموجه الميكانيكية ثلاث اتجاهات استقطاب (x,y,z) اثنين مستعرضة وواحد طولي (أي كل موجة تمثل ثلاث فونونات)الرقم البرمي للفونون ..... $0,1,2,$ لذلك يخضع لإحصاء بوز-أينشتاين سرعة الفونونات يرمز لها بالرمز V لأنها موجات ميكانيكية وطاقتها hf بينما الفوتونات سرعتها c وطاقتها hf الفرق بينهما في التردد f

$$n_s = \frac{g_s}{e^{-(\alpha+\beta E_S)-1}}$$

في لحظة زمنية معينة سوف يكون$\alpha = 0, \alpha dN = 0 \ \ , dN = 0 \ \ , N = Constant$

$$dn = \frac{Bd\Gamma}{e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1}$$

$$n_{(\epsilon)} d\epsilon = \frac{g_{(\epsilon)} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1}$$

طاقة الفونون E=hf وبالتحويل من فضاء الطاقة الى فضاء التردد.

$$n_f(f)df = \frac{g_{(f)} df}{e^{\frac{hf}{KT}} - 1} \tag{29}$$

فرض ديباي ان الموجه لما تهتز بتردد اقصى ما يمكن (f_m)أي ان.

$$g_{(f)} \sim f^2$$

$$g_{(f)} = cf^2 \qquad (F < F_m)$$

$$g_{(f)} = 0 \qquad (F_m < F)$$

$$n_f(f)df = \frac{cf^2 df}{e^{\frac{hf}{KT}} - 1} \tag{30}$$

لإيجاد الثابت C نفرض نظام يحتوي على N من الوحدات و بما ان هناك ثلاث أنماط اهتزازيه فيكون مجموع الفوتونات في النظام 3N .

$$3N = \int_0^{F_m} g_f df = \int_0^{f_m} cf^2 df = \frac{c}{3} f_{(m)}^3$$

$$3N = \frac{c}{3} f_{(m)}^3 \Longrightarrow 9N = Cf_{(m)}^3 \Longrightarrow$$

$$C = \frac{9N}{f_{(m)}^3} \tag{40}$$

$$\therefore n_f(f)df = \frac{9Nf^2 df}{f_{(m)}^3 e^{\frac{hf}{KT}} - 1} \tag{41}$$

وهي تمثل معادلة بوز-أينشتاين بدلالة التردد.

الان نضرب المعادلة (41) في hf للحصول على طاقة الفونون في المدى بين $f, f + df$

$$d\epsilon = \epsilon_{(F)} dF = hf n_f(f) df$$

$$d\epsilon = \epsilon_{(F)} dF = \frac{9Nhf^3 df}{f_{(m)}^3 e^{\frac{hf}{KT}} - 1} \qquad (42)$$

للحصول على الطاقة الكلية نكامل المعادلة (42)

$$\epsilon = \frac{9Nh}{f_{(m)}^3} \int_0^{F_m} \frac{f^3 df}{e^{\frac{hf}{KT}} - 1} \qquad (43)$$

للحصول على c_v *نشتق معادلة الطاقة الكلية لدرجة الحرارة*

$$C_v = \frac{9Nh^2}{KT^2 f_{(m)}^3} \int_0^{F_m} \frac{f^4 e^{\frac{hf}{KT}} df}{(e^{\frac{hf}{KT}} - 1)^2} \qquad (44)$$

نجري بعض التغيرات لجعل المتغيرات كلها بدلالة x

$$x = \frac{hf}{KT} \qquad , f = \frac{xKT}{h} \qquad , df = \frac{KT}{h}\, dx$$

θ_D درجة حرارة ديباي وتسمى بدرجة الحرارة النوعية $\frac{hf_m}{K} = \theta_D$ وبقسمتها على درجة الحرارة T من اجل إيجاد حدود التكامل. $\frac{hf_m}{KT} = \frac{\theta_D}{T}$

$$C_v = \frac{9Nh^2}{KT^2 f_{(m)}^3} \int_0^{F_m = \frac{\theta_D}{T}} \frac{X^4 K^4 T^4 e^X}{h^4 (e^X - 1)^2} \frac{KT}{h}\, dx$$

$$C_v = \frac{9Nh^2 K^5 T^5}{KT^2 h^5 f_{(m)}^3} \int_0^{F_m = \frac{\theta_D}{T}} \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2}\, dx = 9NK\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2}\, dx$$

نفرض ان عدد الوحدات تساوي عدد أفوكادرو

$$C_v = 9R(\frac{T}{\theta_D})^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{X^4 e^X}{(e^X-1)^2}\ dx \qquad (45)$$

ويمكن حساب C_v في حالتين

1- في حالة درجة الحرارة الواطئة فيمكن تقريب الحد الأعلى للتكامل الى اللانهاية فنحصل على

$$C_v = 9R(\frac{T}{\theta_D})^3 \int_0^{\infty} \frac{X^4 e^X}{(e^X-1)^2}\ dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{X^4 e^X}{(e^X-1)^2}\ dx = \frac{4\pi^4}{15}$$

$$\boldsymbol{C_v = \frac{12}{5}\pi^4 R(\frac{T}{\theta_D})^3} \qquad (46)$$

أي في درجات الحرارة الواطئة تتغير C_v مع T^3 بسرعة.

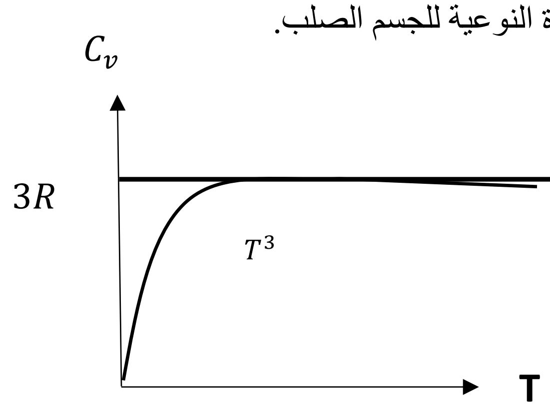
2- اما في درجات الحرارة العالية نقرب الى $(1 + X) \cong e^X$ و X صغيره في مقام التكامل فنعوض عن e^X ب $(1 + X)$ وفي البسط نعوض عن e^X ب واحد فنحصل

$$C_v = 9R(\frac{T}{\theta_D})^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{X^4}{(1+X-1)^2}\ dx = 9R(\frac{T}{\theta_D})^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{X^4}{X^2}\ dx$$

$$C_v = 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \frac{1}{3}(\frac{\theta_D}{T})^3$$

$$\boldsymbol{C_v = 3R} \qquad (47)$$

وهو الجواب الكلاسيكي، والشكل (2) يمثل الحرارة النوعية للجسم الصلب.



الفصل الرابع

إحصاء فيرمي ديراك

احصاء فيرمي –ديراك

ان إحصاء فيرمي- ديراك يتعامل مع أنظمة تضم جسيمات متماثلة وغير متميزة ولكنها تخضع لمبدأ بأولي حيث لا يمكن لجسيمين ان يشغلان ذات الحالة الديناميكية (الحالة الطاقية او الكمية) أي ان اقصى ما تستوعبه حالة كمية متيسره هو جسيم واحد فقط كحد أعلى ولذلك يجب ان يكون عدد الحالات الكمية المتيسرة أكبر او مساويا لعدد الجسيمات. تدعى الجسيمات التي تحقق هذا الشرط فرميونات حيث تنسب هذه التسمية الى الفيزيائي الأمريكي فيرمي الذي كان اول من ناقش إحصاء هذه الأنظمة. ولقد وجد عمليا ان جميع الجسيمات الأولية ذات برم يساوي نصف هي فرميونات مثل البروتونات والنيترونات والكترونات وجزيئات الهيدروجين والهليوم وغيرها. حيث يعطي عدد التوزيعات المختلفة لمستويات الطاقة كمثل (i) الذي يضم N_i من الجسيمات و(g_i) من الحالات الكمية بالمعادلة الأتية.

$$\omega_F = \frac{(g_i)!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \qquad (1)$$

مثال: احسب الاحتمالية لمستوي يحتوي على ثلاث خلايا وجسيمتين.

$$\omega_F = \frac{(g_i)!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} = \frac{3!}{2!\,(1)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2} = 3$$

1	2	3
●		●
●	●	
	●	●

مثال: نظام يتكون من مستويين 1و2 بحيث ان في المستوي الأول عدد الخلايا ثلاث وعدد الجسيمات اثنين وفي المستوي الثاني عدد الخلايا اثنين وعدد الجسيمات واحد احسب الاحتمالية للحالة الموجودة.

الحل/

$$\omega_1 = \frac{(g_i)!}{N_i(g_i - N_i)!} = \frac{3!}{2!\,(1)!} = 3$$

$$\omega_2 = \frac{(g_i)!}{N_i(g_i - N_i)!} = \frac{2!}{1!\,(1)!} = 2$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2 = 6$$

1-معادلة توزيع فيرمي - ديراك

$$\omega_F = \prod_s \frac{g_s}{N_s!\,(g_s - N_s)!}$$

الان نفترض ان

$$N = Constant \qquad ,E = Constant \qquad ,w = Maximum$$

$$dN = \sum_s dn_s = 0\,, dE = \sum_s E_S dn_s = 0\ \ , logw = Max\,, \qquad dlogw = 0$$

w تكون أكبر ما يمكن (لان النظام يكون معزول فيكون في حالة انتشار تام فيكون في حالة فوضى تامه فالانتروبي يكون في حالته القصوى.

$$\log W_{F.D} = \sum_S [\log g_s! - \log n_s! - \log(g_s - n_s)! \qquad (2)$$

وباستعمال تقريب ستيرلنغ

$$\log W_{F.D} = \sum_S [g_s \log g_s - g_s - n_s \log n_s + n_s - (g_s - n_s)\log(g_s - n_s) + (g_s - n_s) \qquad (3)$$

$$\frac{d\log W}{dn_s} = 0 - \log n_s - n_s\frac{1}{n_s} + 1 + \frac{g_s - n_s}{g_s - n_s} + \log(g_s - n_s) - 1 \qquad (4)$$

$$\frac{d\log W}{dn_s} = \log(g_s - n_s) - \log n_s$$

$$\frac{d\log W}{dn_s} = \log\frac{(g_s - n_s)}{n_s} \qquad (5)$$

نعوض هذه النتيجة في معادلة مضروبات لاكرانج

$$\left(\frac{d\log W}{dn_s} + \alpha + \beta\epsilon_s\right) dn_s = 0$$

$$\frac{d\log W}{dn_s}+\alpha+\beta\epsilon_s=0$$

$$\log\frac{(g_s-n_s)}{n_s}=-(\alpha+\beta\epsilon_s)$$

$$\frac{(g_s-n_s)}{n_s}=e^{-(\alpha+\beta\epsilon_s)}\Longrightarrow\frac{g_s}{n_s}-1=e^{-(\alpha+\beta\epsilon_s)}$$

$$\frac{g_s}{n_s}=e^{-(\alpha+\beta\epsilon_s)}+1$$

$$n_s=\frac{g_s}{e^{-(\alpha+\beta E_s)}+1}\qquad(6)$$

في إحصاء فيرمي ديراك $\alpha=\frac{\epsilon_f}{KT}$, $\beta=\ -\frac{1}{KT}$

حيث ϵ_f هي طاقة فيرمي.

$$n_s=\frac{g_s}{e^{\frac{\epsilon_s-\epsilon_f}{KT}}+1}$$

يمكن كتابة الصيغة التفاضلية لمعادلة فيرمي- ديراك بشكل التالي:

$$n_{(\epsilon)}d\epsilon=\frac{g_\epsilon d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon_s-\epsilon_f}{KT}}+1}$$

$$n_{(\epsilon)}d\epsilon=F_{(\epsilon)}g_\epsilon d\epsilon=F_{(\epsilon)}$$

$$\therefore F_{(\epsilon)}=\frac{1}{e^{\frac{\epsilon_s-\epsilon_f}{KT}}+1}\qquad(7)$$

ان دالة فيرمي-ديراك $F_{(\epsilon)}$ هي دالة احتمالية وتمثل احتمال اشغال مستوى الطاقة (ϵ) بفرميون. لذلك فان احتمال اشغال مستوي طاقة E مقداره بقدر طاقة فيرمي E_F هو

$$F_{(\epsilon=\epsilon_F)}=\frac{1}{e^0+1}=\frac{1}{2}=50\%$$

ومن هنا يمكن تعريف مستوي فيرمي: هو المستوي الذي إمكانية اشغاله بالفرميونات بمقدار 50%.

الان نتأمل

1- نظام فرميونات بدرجة حرارة الصفر المطلق (T=0K) فما هي احتمالية اشغال مستويات الطاقة المختلفة.

$$F_{(\epsilon)} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon-\epsilon_f)}{KT}}+1}$$

$1 - \epsilon > \epsilon_f$

ϵ طاقة المستوي و ϵ_f طاقة فيرمي

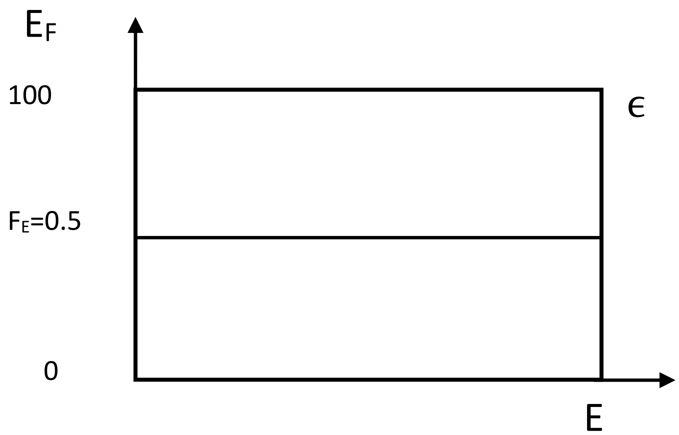
$$F_{(\epsilon>\epsilon_f)} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\epsilon_{(F)}}{0}}+1} = \frac{1}{e^{\infty}+1} = \frac{1}{\infty} = 0 = 0\%$$

لنظام فرميونات بدرجة الصفر المطلق فيه $\epsilon > \epsilon_f$ تكون احتمالية اشغال الطاقة بالفرميونات لمستويات الطاقة اكبر من مستوي فيرمي تساوي صفر.

$2 - \epsilon < \epsilon_f$

$$F_{(\epsilon<\epsilon_f)} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon-\epsilon_f)}{KT}}+1} = \frac{1}{e^{-\infty}+1} = \frac{1}{1} = 100\%$$

لنظام فرميونات بدرجة الصفر المطلق فيه $\epsilon > \epsilon_f$ تكون احتمالية اشغال مستويات الطاقة بالفرميونات دون مستوي فيرمي هي 100% أي ان جميع مستويات الطاقة دون مستوي فيرمي تكون مملوءة بالفرميونات.



الشكل (1) يمثل رسم دالة فيرمي بالصفر المطلق

2- إذا كان نظام الفرمونات بدرجة حرارة T مطلقة فماهي احتمالية اشغال مستويات الطاقة المختلفة

1- $\epsilon = \epsilon_f + kT$

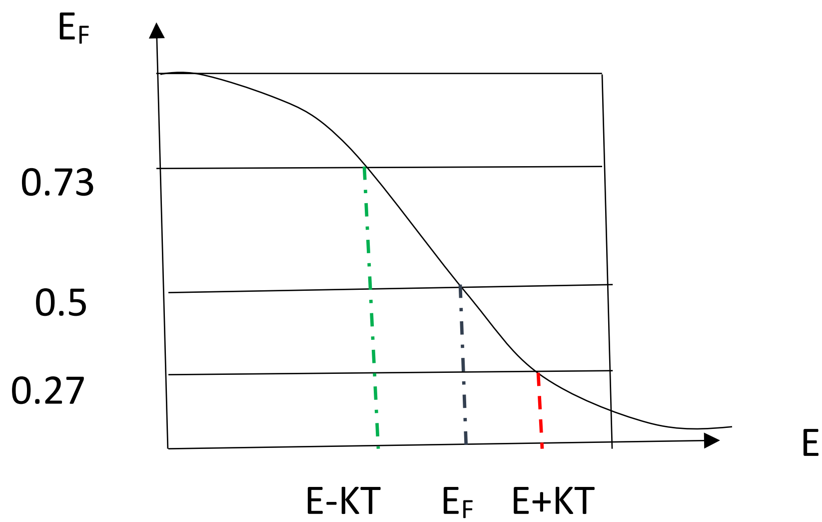
$$F_{(\epsilon)} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon - \epsilon_f)}{KT}} + 1}$$

$$F_{(\epsilon = \epsilon_f + kT)} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon_f + kT - \epsilon_f)}{KT}} + 1} = \frac{1}{e^1 + 1} = \frac{1}{2 \cdot 7 + 1} = 27\%$$

2- $\quad \epsilon = \epsilon_f - kT$

$$F_{(\epsilon)} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon - \epsilon_f)}{KT}} + 1}$$

$$F_{(\epsilon)} = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon_f - kT - \epsilon_f)}{KT}} + 1} = \frac{1}{e^{-1} + 1} = 73\%$$



الشكل (2) يمثل رسم دالة فيرمي بدرجة حرارة $T = KT$

2- حساب طاقة فيرمي في الصفر المطلق

$$\epsilon_F = \epsilon_{F(T)} = \epsilon_{F(0)}$$

$$\int n_\epsilon d\epsilon = \int f_\epsilon g_\epsilon d\epsilon$$

في الصفر المطلق اذا عوضنا $f_\epsilon = 0$ فان عدد الوحدات يساوي صفر اما اذا عوضنا عنها ب (1) فان عدد الوحدات يكون مساويا الى

$$N = \int_{0}^{\epsilon_{F(0)}} g_\epsilon d\epsilon \qquad (7)$$

$$g_\epsilon d\epsilon = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon V}{\hbar^3} \qquad (8)$$

نضرب المعادلة (8) في 2 لان البرم يساوي ½ فنحصل على

$$g_\epsilon d\epsilon = 4\pi V(\frac{2m}{\hbar^2})^{\frac{3}{2}}\,\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon$$

$$N = \int_{0}^{\epsilon_{F(0)}} 4\pi V(\frac{2m}{\hbar^2})^{\frac{3}{2}}\,\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon \qquad (9)$$

$$4\pi V\frac{\sqrt{8}m^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\frac{2}{3}\epsilon_f^{\frac{3}{2}} = N$$

$$8\pi V\frac{\sqrt{8}m^{\frac{3}{2}}}{3\hbar^3}\epsilon_f^{\frac{3}{2}} = N$$

$$3N\hbar^3 = V8\pi\sqrt{8}m^{\frac{3}{2}}\epsilon_f^{\frac{3}{2}}$$

$$\epsilon_f^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3N}{V8\pi}\right) * \frac{\hbar^3}{\sqrt{8}(m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \boldsymbol{\epsilon_{F(0)}} = \left(\frac{\mathbf{3N}}{\boldsymbol{V8\pi}}\right)^{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}} * \frac{\boldsymbol{\hbar^2}}{\mathbf{2m}} \qquad (10)$$

المعادلة الأخيرة تمثل قيمة طاقة فيرمي عند درجة حرارة الصفر المطلق وتعتمد على الكتلة وعلى عدد الفرميونات لوحدة الحجم $\frac{N}{V}$. اما بالنسبة الى درجة حرارة فيرمي فأنها تساوي

$$\boldsymbol{T_f} = \frac{\boldsymbol{\epsilon_{F(0)}}}{\boldsymbol{K}}$$

3- معدل طاقة الفرميونات في الصفر المطلق

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_{Total}}{N} = \frac{\int_0^{\epsilon_{F(0)}} \epsilon n_\epsilon d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_{F(0)}} n_\epsilon d\epsilon} \qquad (11)$$

$$n_\epsilon = f_\epsilon g_\epsilon$$

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\int_0^{\epsilon_{F(0)}} \epsilon f_\epsilon g_\epsilon d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_{F(0)}} f_\epsilon g_\epsilon d\epsilon} = \frac{\int_0^{\epsilon_{F(0)}} \epsilon^{\frac{3}{2}} d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_{F(0)}} \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon}$$

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\frac{2}{5}\epsilon_f^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}\epsilon_f^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\epsilon_f$$

بالإمكان كتابة دالة فيرمي دالة لدرجة الحرارة وكما يلي

$$\bar{\epsilon}_f = \boldsymbol{\epsilon_{f(0)}}\left[\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\pi^2}}{\mathbf{12}}\left(\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_f}}\right)^{\mathbf{2}}\right] \qquad (12)$$

معدل طاقة الفرميون بدرجة الصفر المطلق من هذه العلاقة طاقة فيرمي ϵ_f تعتمد على T^2 وان T_F لمعظم المواد عالية جدا .

وان معدل طاقة فيرمي بدرجة حرارة T يكون

$$\boldsymbol{\epsilon_f} = \boldsymbol{\epsilon_{f(0)}}\left[\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} - \frac{\boldsymbol{\pi^2}}{\mathbf{12}}\left(\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_f}}\right)^{\mathbf{2}}\right] \qquad (13)$$

4- السعة الحرارية النوعية C_V

لغاز فرميونات بدرجة حرارة T مطلقة بحجم ثابت نفرض ان عدد وحدات النظام هو بقدر عدد افوكادرو N_A

$$N_A K = R$$

$$\epsilon = N_A \bar{\epsilon}_{(T)} = R$$

$$\epsilon_f = N_A \epsilon_{f(0)} \left[\frac{3}{5} + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_f}\right)^2\right]$$

$$C_V = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V = \frac{2T}{{T_f}^2} N_A \epsilon_{f(0)} \frac{\pi^2}{4}$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} R \frac{2T}{{T_f}^2} \qquad (14)$$

وفي النهاية يمكن ان نسأل متى تقترب دالة فرمي من المعادلة الكلاسيكية؟

بمقارنة طاقة فيرمي بالطاقة الحرارية الاعتيادية KT

$$T_f = \frac{\epsilon_{F(0)}}{K} \Longrightarrow \epsilon_{F(0)} = \left(\frac{3N}{V8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} * \frac{\hbar^2}{2m}$$

حيث نلاحظ هناك فرق بين طاقة فيرمي للغازات الاعتيادية والغاز الالكتروني بسبب اختلاف كتلة المكونات (الفرميونات حجم لكل وحدة) بين النظامين.

وبذلك فان للغازات الفرميونية الجزيئية، تكون درجات فيرمي صغيره بمقارنتها مع درجة حرارة الغرفة الاعتيادية، فيكون تأثير مبدأ باولي على توزيع الطاقات صغيرا في درجة الحرارة الاعتيادية وسبب ذلك ان معدل اعداد الاشغال (عدى مستويات الطاقة الواطئة) يكون اقل من العدد واحد بكثير وللجزيئات التي طاقتها $\epsilon - \epsilon_F >> KT$ تقترب دالة فيرمي من العادلة الكلاسيكية وهي $e^{-(\epsilon-\epsilon_F)/KT}$ فيكون توزيع طاقات الجزيئات في درجة حرارة الغرفة إذا مقتربا جدا من توزيع ماكسويل-بولتزمان الكلاسيكي.

وفي حالة الغاز الالكتروني في المعدن، يكون المعدن قد انصهر قبل ان تصل الطاقة KT قيمة طاقة فيرمي وعليه يعامل الغاز الالكتروني معاملة خاصة.