

“The Scattering Theory of Light”

د. محمد علی محمد

* حركة جسيم في مجال قوة مركزية

الحالات المستقرة لجسيم يتحرك في مجال متناظر كروياً توصف بواسطة

معادلة شرودنجر :
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi) \quad (1)$$

المؤثر الهاملتوني
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$$

r : هي المسافة من مركز الجاذبية إلى الجسيم $V(r)$

$V(r)$: يعتمد على r

في الإحداثيات القطبية الكروية فإن المؤثر الهاملتوني :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \hat{\Delta} + V(r) \quad (2)$$

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (3)$$

لذلك فإن الزخم الزاوي :

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \hat{\Delta} \quad (4) a$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4) b$$

كذلك
$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad \text{و } l = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_z = m\hbar \quad \text{و } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

إن الدالة الموجية للحالات المستقرة لجسيم يتحرك في مجال جهد $V(r)$ متناظر كروياً هي

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{El}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5)$$

$R_{El}(r)$ هي الدالة الموجية الشعاعية

ليكن
$$\chi(r) = r R_{El}(r)$$

باستخدام $H\psi = E\psi$ وتعويف المعادلات (2) و (4) و (5) نحصل على

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \hat{\Delta} + V(r) \right] R(r) Y(\theta, \phi) = E R(r) Y(\theta, \phi) \quad (6)$$

فتصبح معادلة شرودنجر بعد التعويف والبسيط كالآتي :-

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \chi(r) + V(r) \chi(r) = E \chi(r) \quad (7)$$

المعادلة (7) هي المعادلة القطرية لجسيم في مجال جهد $V(r)$ متناظر كروياً.

الجهد المؤثر (الفعال) $V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$

لجسيم حر $V(r) = 0$ فإن :

$$V_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (\text{Free Particle } V(r) = 0)$$

وبالتالي فإن (7) تصبح :-

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \chi(r) = E \chi(r) \quad (8)$$

المعادلة (8) هي المعادلة القطرية للجسيم الحر والتي تدر طاقات النظام

الشروط الحدودية : $\chi(r) = 0$ (تتلاشى عند $r=0$) أي أن $\chi(0) = 0$

* إذا فرضنا حرية من الجسيمات بزخم $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ في الاتجاه Z و $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

فإن $R(r) \Rightarrow R_{kl}(r)$ حيث هنا استخدم الزخم كأداة لوصف الدالة

وعليه فإن المعادلة (8) تصبح :

$$\frac{d^2}{dr^2} \chi_{kl}(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_{kl}(r) = 0 \quad (9) \text{ for free particle}$$

للجسيم الحر
 $V(r) = 0$

أي أن

(a) For s-state (أي $l=0$) $\Rightarrow l=0$

نأخذ حالتين :

المعادلة (9) تتحول إلى :

$$\frac{d^2}{dr^2} \chi_{kl}(r) + k^2 \chi_{kl}(r) = 0 \quad (10)$$

3

لدينا حلين للمعادلة (10) هما :

$$\left. \begin{aligned} X_{k_0} &= A \sin kr \\ X_{k_0} &= B \cos kr \end{aligned} \right\} \text{--- (11)}$$

كل الحلين يحقق المعادلة (10) لذلك فالحل العام :

$$X_{k_0}(r) = A \sin kr + B \cos kr \text{ --- (12)}$$

(يجب وضع $B=0$ ليتحقق شرط الحدود) $X_{k_0}(0)=0 \Rightarrow B=0$ الشرط الحدودي

$$\therefore X_{k_0} = A \sin kr \text{ --- (13) at } r \rightarrow 0 \text{ (عندما تكون } r \text{ قريبة من المركز)}$$

حيث عند $r=0$ فإن العلاقة (13) تتحقق أي $X_{k_0}(r=0)=0$

$$\text{كذلك } R_{k_0}(r) = \frac{1}{r} X_{k_0} = \frac{A}{r} \sin kr \text{ --- (14)}$$

$$R_{k_0}(r) = \frac{A}{r} \sin kr \text{ --- (14) finite at } r=0 \text{ } R_{k_0}(r=0)=0$$

نستخدم شرط العيارية (المعيارية) لإيجاد الثابت A :

$$\int_0^\infty R_{k_0}^* R_{k_0} r^2 dr = \delta(k' - k) \text{ --- (15) شرط العيارية والقاعدة}$$

$$A^2 \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \sin^2 kr r^2 dr = 1$$

$$A^2 \int_0^\infty \sin^2 kr = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\therefore R_{k_0}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kr}{r} \text{ --- (16) الدالة القطرية المعيارية كالة } S \text{ للجسيم الحر (} l=0 \text{) فيما يتعلق قوة مركزية}$$

(b) for $l \neq 0$

we put $R_{kl}(r) = r^l S_{kl}(r)$

so $\chi_{kl}(r) = r^{l+1} S_{kl}(r)$

} — (17)

نعوض عن $\chi_{kl}(r)$ بالمعادلة (9) فنجد:

$$\frac{d^2 R_{kl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{kl}}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{kl} = 0 \quad (18)$$

حيث $\chi_{kl}(r) = r R_{kl}(r)$ ولذا $R_{kl}(r) = r^l S_{kl}(r)$ — (18) تصبح:

$$\frac{d^2 S_{kl}}{dr^2} + \frac{2(l+1)}{r} \frac{dS_{kl}}{dr} + k^2 S_{kl} = 0 \quad (19)$$

نضع $\frac{dS_{kl}}{dr} = r S_{kl+1}$ — (20)

نضع المعادلة (19) بالنسبة لـ r فنجد على:

$$\frac{d^3 S_{kl}}{dr^3} + \frac{2(l+1)}{r} \frac{d^2 S_{kl}}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2(l+1)}{r^2} \right] \frac{dS_{kl}}{dr} = 0 \quad (21)$$

بالنسبة للمعادلة (20) نجد على:

$$\frac{d^2 S_{kl+1}}{dr^2} + \frac{2(l+2)}{r} \frac{dS_{kl+1}}{dr} + k^2 S_{kl+1} = 0 \quad (22)$$

والتي تتطابق بالمعادلة (19) لكن هذا الدالة S_{kl+1} هي S_{kl} حيث S_{kl} وهذا يعني ان المعادلة (20) هي

$$\therefore S_{kl+1} = \frac{1}{r} \frac{dS_{kl}}{dr} \quad (23)$$

$\therefore S_{k0} = \frac{1}{r} \sin kr$ when $R_{k0} = S_{k0}$ for $l=0$

5

for $l=0 \Rightarrow S_{K,1} = \frac{1}{r} \frac{dS_{K,0}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \sin kr \right)$ (23) من

for $l=1 \Rightarrow S_{K,2} = \frac{1}{r} \frac{dS_{K,1}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \sin kr \right) \right]$

بجاء فصل اولى، المعادلة (23) :

$$S_{K,l}^{(n)} = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l S_{K,0}^{(n)} \quad (24)$$

$$\therefore R_{K,l}^{(n)} = r^l S_{K,l}^{(n)} = r^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l S_{K,0}^{(n)} \quad (25)$$

إذا عوضنا عن $S_{K,0}^{(n)}$ وطبقنا شرط البقاء، المعادلة (15) المعادلة (25) نحصل على :

$$R_{K,l}^{(n)} = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r^l}{k^l} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin kr}{r} \quad (26) \quad (\text{معايرة})$$

عند الحد التقارب $r \rightarrow \infty$ (asymptotic behaviour) نقوم باستقانة $\sin kr$

$$R_{K,l}^{(n)} \approx (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^l r} \frac{d^l}{dr^l} \sin kr \quad : \quad l \text{ من المرات فحصل على}$$

$$\therefore - \frac{d}{dr} \sin kr = k \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{لحالة} \Rightarrow \left(- \frac{d}{dr} \right)^l \sin kr = k^l \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right)$$

$$\therefore R_{K,l}^{(n)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right)}{r} \quad (27) \quad (r=0 \text{ included})$$

لكل قيم r متناهية

المعادلة (27) هو حل المعادلة التفاضلية للجسيم الحر في مجال جهد مركزي متناهي كروياً.

6

الموجة المستوية في التوافقية الكروية

$$j_l^0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} j_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

دالة بيسل من المراتبة $(l+\frac{1}{2})$

$$j_l^0(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \text{--- (1)}$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

عندما $V(r) = 0$ فان معادلة شرودنجر هي :-

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi$$

$$\psi_{klm} = R_{kl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad \text{--- (2)}$$

الحل لهذه المعادلة :-

والتي هي مجموعة كاملة من الحلول المستقلة لمعادلة شرودنجر للجسيم الحرة والذي يمتلك طاقة E (دوال مقاصد)

$$\psi_{klm}(r, \theta, \phi) = a_l j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad \text{--- (3)}$$

في الإحداثيات الكارتيزية فان حل الموجة المستوية هو :-

$$\psi_{klm}(r, \theta, \phi) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sum_l \sum_m a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) j_l(kr) \quad \text{--- (4)}$$

اذا كان الجسيم الحر مستقل على طول الاتجاه z فان الموجة المستوية تصبح

$$e^{ikz} = \sum_l a_l P_l(\cos\theta) j_l(kr) \quad \text{--- (5)}$$

حيث $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rightarrow e^{ikz}$ يمكن اعتبارها مجموعة دوال ψ_{klm} وعلى الاتجاه z فان $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rightarrow e^{ikz}$ المطلوب حساب الثابت a_l : نضرب المعادلة (5) بـ $P_{l'}$ ونكامل طرفي العلاقة

$$\int_{-1}^1 e^{ikr u} P_{l'}(u) du = \sum_l a_l j_l(kr) \int_{-1}^1 P_{l'}(u) P_l(u) du \quad \text{--- (6)}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos\theta \\ \rho &= kr \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(u) P_l(u) du = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

الآن نستخدم شرط القاموس

$$\delta_{l'l} = \begin{cases} 0 & \text{when } l \neq l' \\ 1 & \text{" } l = l' \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{z\rho u} P_l(u) du = a_l j_l(\rho) \left(\frac{2}{2l+1} \right) \quad \text{--- (7)} \quad \text{نفس المعادلة (6)}$$

$$e^{z\rho u} du = dv \quad u = P_l(u)$$

: نجد التكامل بطريقة $u dv$

$$v = \frac{e^{z\rho u}}{z\rho} \quad du = d(P_l(u))$$

$$\therefore \int_{-1}^1 e^{z\rho u} P_l(u) du = \frac{1}{z\rho} P_l(u) e^{z\rho u} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{z\rho} \int_{-1}^1 e^{z\rho u} d(P_l(u))$$

//

$$\because P_l(1) = 1, P_l(-1) = (-1)^l$$

$$\therefore \int_{-1}^1 e^{z\rho u} P_l(u) du = \frac{1}{z\rho} [e^{z\rho} - (-1)^l e^{-z\rho}]$$

$$\left(\frac{2}{2l+1} \right) a_l j_l(\rho) = \frac{1}{z\rho} [e^{z\rho} - (-1)^l e^{-z\rho}] \quad \text{نعوذ، لنستعمل (7)}$$

$$\frac{2}{2l+1} a_l \lim_{\rho \rightarrow \infty} j_l(\rho) = \frac{2i^l}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right) \quad \text{بقاى } \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\rho = kr}$$

$$\frac{2}{2l+1} a_l \frac{\sin(\rho - \frac{l\pi}{2})}{\rho} = \frac{2i^l}{\rho} \sin(\rho - \frac{l\pi}{2})$$

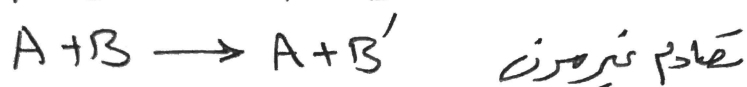
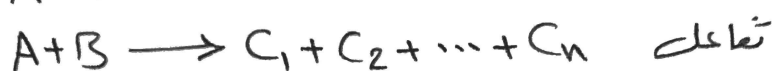
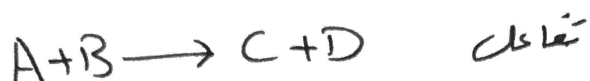
$$\therefore a_l = i^l (2l+1)$$

$$\therefore e^{zkr} = e^{z\rho u} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(u) j_l(\rho) \quad \text{--- (8)} \quad u = \cos \theta$$

وهي نمط من التخلي لكونه نظاماً خلال عملية التصادم (الإستطارة) وهي من نوع أو طبيعية النظام المتكونه من تملك أو تفكك النظام.

في التصادم المرت بين جسيمين A و B يتغير الجسيمات في القنوات الرئيسيه هي نفسها في الاستطارة

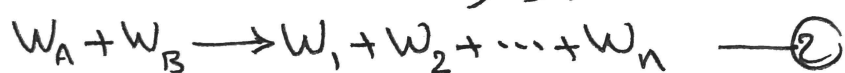
(التصادم المرت) $A+B \rightleftharpoons A+B$
 قبل التصادم بعد التصادم
 بناءً على التصادم الغير مرت أو التفاعلات فان الجسيمات في القنوات الاوليه تختلف عن باقي القنوات الرئيسيه



العتبة "Threshold"

لو كانت لدينا تفاعل (تصادم) عام حسب المعادله :
 $A+B \rightarrow C_1+C_2+\dots+C_n \quad \text{--- (1)}$

والطاقات الداخليه للجسيمات في هذا التفاعل محمله بالرموز :



حسب قانون حفظ الطاقة فان :
 $T_z + W_A + W_B = T_f + W_1 + W_2 + \dots + W_n \quad \text{--- (3)}$

حيث T_z : الطاقة الحركيه الابتدائيه

T_f : الرئيسيه

$$T_f = T_z + Q_{zf} \quad \text{--- (4)}$$

Q_{zf} : التغير في الطاقة الداخليه وتعرف بالحرارة

$$Q_{zf} = W_A + W_B - (W_1 + W_2 + \dots + W_n) = T_f - T_z \quad \text{--- (5)}$$

$$T_f \geq 0$$

والشرط المهم للتفاعل هو :

if $Q_{zf} \geq 0$ exothermic التفاعل يسخن

$Q_{zf} < 0$ endothermic التفاعل يبرّد

والتفاعل يحدث فقط عندما تكون الطاقة الحركية الابتدائية $(T_i^t < T_f^t)$ أكبر من
طاقة العتبة حيث أنه :

$$T_i^t = -Q_i f$$

T_i^t تعرف بعبارة التفاعل في نظام مركز الكتلة .

اما طاقة العتبة المقابلة لـ T_i^t يرمز لها بالرمز $(T_i^t)_L$ وتعطى بالعلامة
 $(T_i^t)_L$ نسبة لنظام المختبر

$$(T_i^t)_L = \frac{m_A + m_B}{m_B} T_i^t$$

المقاطع العرضية "Cross-sections"

أنه نتائج عملية التصادم توضح عادةً بكميات تدعى المقاطع العرضية وتعرف على أنها نسبة
عدد الحوادث لهذا النوع من التصادم لوحدة الزمن ولوحدة الهدف المستهدفة إلى فيزياء الجسيمات
الساكنة بالنسبة للهدف .

تعريف آخر : احتمالات الارتباط لوحدة الزمن ولوحدة الهدف المستهدفة ولوحدة فيزياء الجسيمات
الساكنة بالنسبة للهدف .

إن الدالة الموجية لجسيم بطاقة E يتحرك في مجال مركزي متناظر كروياً هي حل معادلة
شرودنجر

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi = 0 \quad (1)$$

$V(r)$: دالة الطاقة الكامنة (الجهد المركزي المتناظر كروياً) حيث أنه :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r V(r) = 0 \quad (2) \quad V(r) \text{ is short range force}$$

وإن الدالة الموجية $\psi(r)$ عند مسافة بعيدة عن مركز الاستطارة هي :

$$\psi(r) \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3)$$

e^{ikz} تمثل شزمة من الجسيمات الساكنة على مركز الاستطارة (الهدف) بالإتجاه z (موجبة
موجبة) $f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ تمثل الجسيمات المستطارة وهي عبارة عن موجة كروية
 $f(\theta)$ تمثل سعة الاستطارة

انے نیار اکیچیات السطحة ص

$$\left. \begin{aligned} J_z &= \frac{\hbar}{m} I_m e^{-ikz} \frac{d}{dz} (e^{ikz}) \\ J_z &= \frac{\hbar k}{m} = v \end{aligned} \right\} \text{--- (4)}$$

ونذلك فان سيار هزمة اكيچيات السطحة عند حدود التقريب

$$J_r \sim \frac{\hbar}{m} I_m f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

$$J_r \sim \frac{v}{r^2} |f(\theta)|^2 \text{--- (5)}$$

$f(\theta)$ على سعة الاضطارة "scattering amplitude" وقف التوزيع الزاوي للموجة السطحة.

∴ $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 \text{--- (6)}$

كذلك $\sigma(\theta) = 2\pi \int_0^1 |f(\theta)|^2 du$

$\sigma(\theta)$ على المقطع العرضي الكلي للاضطارة ويعرف على انه عدد اكيچيات السطحة الى عدد اكيچيات السطحة بالسفتر المربع.

لنفرض ان مركز الاستطارة عند $r=0$ يتفاعل مع جسيم ساقط ينتقل على طول الاتجاه z بزخم ثابت $p = \hbar k$ وطاقة موجبة $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$ طبقاً للجهد المتناظر كروياً $V(r)$. لذا فان معادلة شرودينجر تصبح :

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = V(r) \psi \quad (1)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_0 = 0 \quad (2) \quad \text{لجسيم الحرة } V(r)=0$$

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3) \quad \text{ان دالة Green ترتبط مع (2) بالمعادلة}$$

$$\psi(r) = \psi_0(r) - \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(r') \psi(r') d\tau' \quad (4) \quad \text{ان الحل العام للمعادلة (1) طبقاً لنظرية Green function هو}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (5) \quad \text{حيث}$$

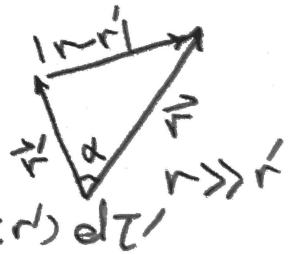
$$\psi_0 = e^{ikz} \quad \text{لجسيم الحرة}$$

$$\therefore \psi(r) = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') \psi(r') d\tau' \quad (6)$$

* حينه للمعادلة (6) عند الحد التقارب (جسيم بعيد جداً) when $r \gg r'$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq (r-r') \simeq r \quad \text{لـ } r \text{ اهدائي قريب من مركز الاستطارة}$$

r اهدائي الجسيم المقذوف



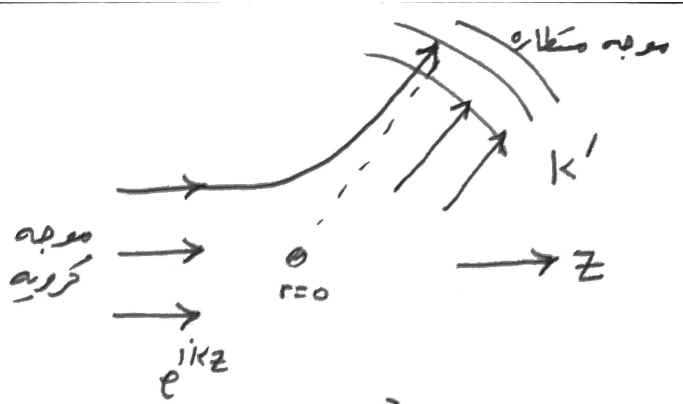
$$\psi(r) = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}' K/r} V(r') \psi(r') d\tau' \quad \text{للمعادلة كالم}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$

حيث في المعادلة اعلاه تم تخفيف

نقح

$$e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}')/r} \approx e^{-iK'r'}$$
 حيث $K' = K \frac{r'}{r}$



فصبح العلاقة السابقة

المعادلة (9) هي

$$\psi(r) = e^{iKz} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\frac{-1}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} v(r') \psi(r') d\tau' \right] \frac{e^{iKn}}{r}$$

عندما يكون الجسم سائلاً من مكان بعيد وهذا هو مستوى

$$\psi(r) = e^{iKz} + \frac{f}{r} e^{iKn} \quad \text{--- (9) when } r \rightarrow \infty$$

عندما يتبع الجسم عن نقطة تأثير الهدف وهذا هو مستوى

$$\frac{f}{r} e^{iKn} = \psi_{sc}$$

ف يمكن كل صفائح الجهد ولذا سيمتد الإشعاع وكلما كانت كبيرة فإن انحراف الجسم يزداد لأن $v(r)$ تصبح كبيرة ومنها يمكن حساب سرعة الإشعاع

المعادلة (10) هي

$$\therefore f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} v(r') \psi(r') d\tau'$$

$f(\theta)$ هي تعتمد على θ ولا تعتمد على ϕ كون k ثابتة على θ .

من أجل استيعاب هذه خاصية الإشعاع جسم يتحرك بجهد مركزى متناظر "قريباً" عند $r \rightarrow \infty$ (هذا الإشعاع غير المتناظر) حسب نظرية ديفال green.

* كثافة التيار الاحتمال "The Probability Current density"

* وتسمى بالعلاقة

$$J_r = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{\hbar}{m} I_m(\psi^* \nabla \psi)$$

س/ استبانتيار (دس) الجهد الإشعاع

$$J_{scatt} = \frac{v}{r^2} |f(\theta)|^2$$

الكل

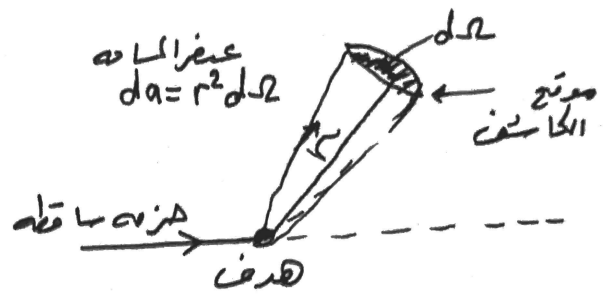
$$J_{inc} = v \quad \psi_{sc} = f \frac{e^{iKn}}{r} \quad \psi^* = f^* \frac{e^{-iKn}}{r} \quad \nabla \psi = \frac{iKf}{r} e^{iKn}$$

$\therefore J_{scatt} = \frac{\hbar}{m} I_m(\psi^* \nabla \psi) = \frac{\hbar K}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2$

ويعرف بدلالة عدد الجزيئات المنتشرة لوحدة الزمن خلال عنصر زاوية معينة
 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ أي نصف الجزيئات المنتشرة في الزاوية

$$d\sigma = \frac{J_{\text{scatt}} r^2 d\Omega}{J_{\text{incident}}}$$

$$d\sigma = \frac{\frac{\hbar k}{m r^2} |f(\theta)|^2 r^2 d\Omega}{\frac{\hbar k}{m}}$$



$$\therefore d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

اذن المقطع العرضي التفاضلي

where: $J_{\text{scatt}} \approx \frac{V}{r^2} |f(\theta)|^2$ — (1)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$
 — (2)

طريقة الموجة الجزئية "Partial wave Method"

في هذه الطريقة الموجة المنتشرة على الهدف توصف بصيغة تراكب موجات جزئية كل موجة جزئية لها عدد مختلف من الزخم الزاوي المداري l فإذا كانت حركة الموجة المنتشرة باتجاه المحور z لنظام الإحداثيات فإن الموجة المنتشرة يمكن كتابتها

$$\phi_a(r) = e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad \text{--- (1)}$$

حيث أن $j_l(kr)$ هي دالة بيسل الكروية والتي تختزل عند مسافة كبيرة من المركز

$$j_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} \quad \text{if } kr \gg 1 \quad \text{--- (2)}$$

تقريب عند العلامة السابقة بالمعادلة (1) متفصل على الموجة المنتشرة عند حد التقريب $r \rightarrow \infty$: (Asymptotic value)

$$\phi_a(r) \approx \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) j_l(kr) \quad \text{--- (2)}$$

$$P_l(r) = \sin(Kr - \frac{l\pi}{2}) = \frac{1}{2} i \left[\underbrace{e^{-i(Kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{ساقطة مستوية}} - \underbrace{e^{i(Kr - \frac{l\pi}{2})}}_{\text{مستطارة كروية}} \right] \quad (3)$$

كل موجة جزئية من العارة ① عند مسانه كبير تكون مركبة "superposition" من موجتين
ساقطة ومستطارة. ان معادلة شرودينجر لجسيم يتحرك في مجال جهد محدد $V(r)$ هي

$$(\nabla^2 + K^2) \psi(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} \psi(r)$$

واكل هذه المعادلة كيدراستطارة هذا الجسم والذي يوصف بدلالة تركب موجات جزئية

$$\psi(r) = \frac{1}{Kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(r) P_l(\cos\theta) \quad (4) \quad \text{حسب العارة :}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + K^2 \right] R_l(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} R_l(r) \quad (5) \quad \text{S.E} \quad \text{المعروف عن (4) نتج :}$$

الشروط الحدودية لمعادلة شرودينجر ⑤ هي

$$\textcircled{1} \psi(r=0) = 0$$

$$\textcircled{2} R_l(0) = 0$$

اذا كان الجهد يتلاشى بسرعة عند $r \rightarrow \infty$ فانه ⑤ تصبح :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0$$

$$R_l(r) = \frac{1}{2} i \left[e^{-i(Kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(Kr - \frac{l\pi}{2})} \right] \quad \text{حيث } r \rightarrow \infty \quad (5)$$

$$R_l(r) = \sin(Kr - \frac{l\pi}{2}) + \frac{1}{2} i (-i)^l (1 - S_l) e^{iKr} \quad \text{حيث } Kr \gg l \quad (7)$$

المعامل S_l كيدراالتغير في الموجات المستطارة. يتعرف ⑦ في ④ نجد لدالة الموجة
عند قيمة التقارب (المسافة البعيدة) :

$$\psi(r) = \phi_a(r) + f(\theta) \frac{e^{iKr}}{r} \quad \text{حيث } Kr \gg l$$

$$f(\theta) = \frac{i}{2K} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - S_l) P_l(\cos\theta) \quad (8) \quad \text{Scattering amplitude} \quad \text{سعة الاستطارة}$$

$$S_l = e^{2i\delta_l} \Rightarrow S_l - 1 = 2i e^{i\delta_l} \sin\delta_l \quad (9) \quad \text{الاستطارة المكونة}$$

15
في حالة الاستطارة المباشرة $\theta = 0$ فان متغير حدود الجذر يصبح مساوي للواحد

فتصبح (8) :

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-S_l) \quad (10)$$

وباستخدام (8) و (9) فان المقطع العرضي التفاضلي للاستطارة المرنة خلال عنصر زاوية $d\Omega$ بدلالة ازاحة الطور δ_l يصبح :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\delta_l \sin\delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}) \quad (11)$$

تكامل العلامة (11) على كل الزوايا وأخذاً العلاقة :

$$\int_{-1}^1 P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$$

فتحصل على المقطع العرضي الكلي "Integral Cross-section" للاستطارة المرنة :

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (12)$$

حيث ان مجموع المقاطع العرضية الجزئية هي

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l$$

where $\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - S_l|^2 \quad (13)$

$2l+1$ ضاميل الوزن الإحصائي لـ l من الموجات الجزئية .

* ان أقصى مقطع استطارة (لعمد الكبرن المحتملة والكملة) لمقطع الاستطارة

$$(\sigma_l)_{\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \quad (14)$$

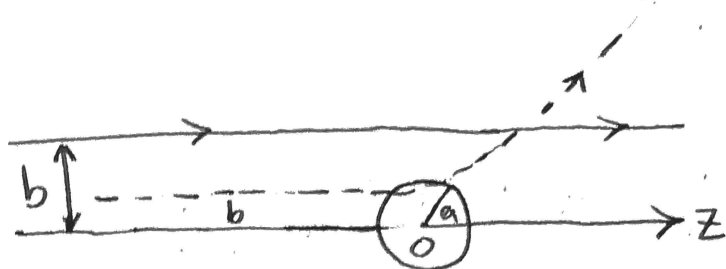
إذا استخدمنا (9) ضمن العلامة (8) فان الجذر الجيالي لصفة الاستطارة المباشرة هي :

$$I_m f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad \leftarrow \text{من (10) ونعوض } e^{2i\delta_l} = \cos + i \sin$$

بالمقارنة مع (12) فان (15) optical theorem $\sigma = \frac{4\pi}{k} I_m f(\theta) \quad (15)$

* أن طريقة الموجة المجرية تكون فعاله فقط عندما عدد قليل من الموجات المجرية تسمى
في عملية الاستطارة:

* من الناحية الكلاسيكية وخواص الشكل التالي:



إذا كانت معامل التصادم b فأكبر مما الذي يكون بها
تصادم والتي تتطابق فقط الجسيمات التي يكون بها

$$L > Pa \quad \text{سوف } L$$

$$L < Pa \quad \text{حيث}$$

$$L \approx \hbar l$$

$$P = \hbar k$$

$$b = \frac{L}{P}$$

L : الزخم الزاوي المداري للجسيم

P : زخم الجسيم

$$\Rightarrow b > a \quad (\text{لا تحدث الاصطدام})$$

* "Low Energy Scattering" استطارة الطاقة المنخفضة

* أن الموجة المجرية ذات العدد الكمي للزخم الزاوي المداري l تملك $ka \gg l$
سوف لن تكون عملية الاستطارة لأن هذا معناه أنه أي قيمة موجبة لـ l
تكون أكبر من ka (لأنها موجبة جداً) وهو معناه فقط $(l=0)$ شارك
عملية الاستطارة

$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{k} e^{2i\delta_0} \sin \delta_0 \quad \text{for } (l=0) \text{ s-waves}$$

$$\therefore \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \quad (\text{The scattering is isotropic})$$

لا تعتمد على θ

17 for $l=0 \Rightarrow \psi_{\text{free}} = R_{k0} Y_0^0 ; Y_0^0(\theta, \phi) = 1$

$\therefore \text{S.E} \Rightarrow \frac{d^2 \chi'_0}{dr^2} + k^2 \chi'_0 = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \chi'_0$ when $r \gg a$

$k \gg 1 \Rightarrow \chi'_0 = a \sin kr + b \cos kr$

$R'_{k0} = \frac{\chi'_{k0}}{kr} = a \frac{\sin kr}{kr} + b \frac{\cos kr}{kr}$

$a = c \cos \delta_0 ; b = c \sin \delta_0$

So: $R'_{k0} = c \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr}$

$\therefore \psi_{\text{free}} = Y_0^0 R'_{k0} = c \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} \quad \text{--- (1)} \quad Y_0^0 = 1$

$\therefore \psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \psi_{\text{inc.}} + \psi_{\text{sc.}}$

$\therefore \psi = \sum a_l P_l \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} + \frac{f(\theta) e^{ikr}}{r}$

$\psi = \sum i^l (2l+1) P_l \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} + \frac{f(\theta) e^{ikr}}{r}$

for $l=0$; s-state

$\psi = \frac{\sin kr}{kr} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{--- (2)}$

but $\psi = c \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} \quad \text{--- (1)} \quad \psi = Y_0^0 R_{k0} ; l=0$

$\therefore c \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} = \frac{\sin kr}{kr} + \frac{f(\theta) e^{ikr}}{r} \quad \text{--- (*)}$

here $f(\theta) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0$ for $l=0$

$$d\sigma = |f|^2 d\Omega$$

فيكون الناتج الحرفي إيجابيا لا سكام،

وبما دالة المعاملات من، للمعادلة (*) نتج

$$f(\theta) = \frac{e^{i\delta_0}}{k} \sin \delta_0 \quad (3)$$

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\therefore d\sigma = \frac{e^{i\delta_0}}{k} \frac{e^{-i\delta_0}}{k} \sin \delta_0 \sin \delta_0 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\therefore \sigma_0 = 4\pi \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}$$

محاكاة
طول الموجة $a_0 \Rightarrow \lim_{E \rightarrow 0} f(\theta) \approx -a_0$
المعادلة (3)

$$\therefore \sigma = 4\pi |f|^2 \approx 4\pi a_0^2$$

$$\sigma_0 \approx 4\pi \frac{\delta_0^2}{k^2}$$

لقيم δ_0 الصغيرة كان

المعادلة (3)
 $\delta_0 \approx -ka_0$

نجد ان معامل طول الموجة $a_0 = a$

$$\therefore \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 ka \approx \frac{4\pi}{k^2} k^2 a^2 \approx 4\pi a^2$$

هذا يعني ان الهدف يتصرف كانه كرة صلبة "Scattering hard sphere"

$$\therefore \sigma = 4 \times \text{Classical Cross Section}$$



مثال: أشتق تعبيراً كمياً للمقطع العرضي للموجة S للأستطارة من كرة صلبة نصف قطرها R

الحل: أنة تأثير الكرة الصلبة ما دون لتأثير الجهد التالي

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

الدالة الموجية المقترنة
للموجة S

$$\Rightarrow R_0(r) = \frac{X_0(r)}{r}$$

هذه الدالة تحقق معادلة شرودنجر:

$$X_0''(r) + k^2 X_0(r) = 0 \quad r > R$$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad : \text{حيث } X_0(r) = 0 \text{ عند } (r < R) \text{ وأنتى}$$

حل معادلة شرودنجر عند $r > R$ هو:

$$X_0(r) = \sin(kr + \delta_0)$$

* كذلك فإن استمرارية الدالة الموجية عند سطح الكرة (الجهد) عند $r = R$ يعطينا:

$$\sin(kR + \delta_0) = 0 \Rightarrow \delta_0 = n\pi - kR$$

$$\text{OR} \quad \sin \delta_0 = (-1)^{n+1} \sin kR \quad (n=0,1,2,\dots)$$

لذلك فإن المقطع العرضي الكلي للموجة S ($l=0$) هو

$$\sigma_{\pm} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 kR$$

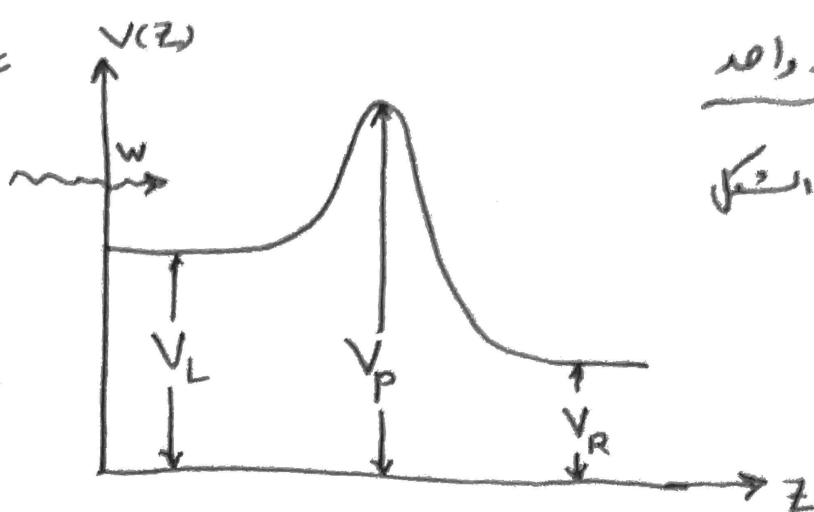
عند الطاقات الواطئة $k \rightarrow 0$ فإن $\sin kR \approx kR$ وبذلك فإن

$$\sigma_{\pm} = 4\pi R^2$$

عند الطاقات العالية $k \rightarrow \infty$ فإن:

$$\sigma_{\pm} \approx 0$$

20



المستطارة بواسطة حاجز جهد ببعده واحد

نقطة الحاجز ببعده واحد كما في الشكل

* الموجة ذو الطاقة E والموجة الموجية $K = (k_x, k_y)$ يسقط على الحاجز $V(z)$ من اليسار
وهي انه الجهد يعتمد على المحور z فتأخذ الحالة الموجية للأشكال التالية:

$$\psi = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u(z) \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = (x, y)$$

وتكون $u(z)$ على معادلة شرودنجر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dz^2} + V(z)u = Wu(z) \quad (2)$$

$$W = E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > V_L$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(z)u + \frac{2m}{\hbar^2} Wu = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - V(z))u = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + q^2 u = 0 \quad (3)$$

$$\text{let } u = ce^{iqz}$$

هذه المعادلة (*)

$$\therefore \frac{du}{dz} = iqce^{iqz} \quad \& \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = -q^2 ce^{iqz}$$

نعوض بالمعادلة (*) :

$$-q^2 ce^{iqz} + q^2 ce^{iqz} = 0$$

$$\therefore u(z) = ce^{iqz}$$

اذن الحل للمعادلة (*) هو صحيح

$$\text{where } q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - V(z))}$$

21

$$\text{عندما } V(z) = V_R \Rightarrow q = q_R = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - V_R)}$$

ويكون عندها $U = e^{iq_R z}$ حيث هنا U على موجة نافذة عند يمين الحاجز

* عند يار الحاجز الجهد $V(z) = V_L$ والدالة الموجية تكون

$$U(z) = \underbrace{A e^{iq_L z}}_{\text{موجة نافذة}} + \underbrace{B e^{-iq_L z}}_{\text{موجة عاكسة}} \quad \text{--- (4)}$$

$$q_L = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - V_L)}$$

وانه السيار يجب بواسطة الطاقة :

$$j_{z,\alpha} = \frac{\hbar}{2im} \left(f_\alpha^* \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} - f_\alpha \frac{\partial f_\alpha^*}{\partial z} \right)$$

حيث f_α الدالة الموجية يمكن ان تكون للموجة الساطعة والعاكسة والنافذة.

اذن معامل النفاذ "Transmission Coefficient" $D(W)$ يعرف بـ

$$D(W) = \frac{j_{z,trans}}{j_{z,inc}} = \frac{q_R}{q_L} \left| \frac{C}{A} \right|^2 \quad \text{--- (6) (النتيجة)}$$

ومعامل الانعكاس "Reflection Coefficient" :

معامل الانعكاس

$$R(W) = \frac{j_{z,Ref}}{j_{z,inc}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \quad \text{--- (7) (H.W)}$$

حيث :
Transmitted wave $\Rightarrow C e^{iq_R z}$ موجة نافذة

Incident wave $\Rightarrow A e^{iq_L z}$ " الساطعة

Reflected " $\Rightarrow B e^{-iq_L z}$ " عاكسة

22
ونلاحظ ان حيز الجهد يقل تدريجياً وتظهر منطقة عند $z > z_r$ الى عين قمتة الكافير وهذه المنطقة $z > z_r$ يتم استخدام تقريب WKB بها ولذلك فان المعادلة الناقصة تعرف بالادلة :

$$U(z) = \frac{C}{\sqrt{\lambda(z)}} e^{i \int_{z_r}^z \lambda(z) dz} \quad (8)$$

$$\lambda(z) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - V(z))} \quad (9)$$

where $W > V(z)$ at $z > z_r$

$$\therefore D(W) = \frac{1}{\hbar} \left| \frac{C}{A} \right|^2 \quad (10) \quad \underline{\underline{H.W}}$$

مثال : الاضطارة بواسطة حيز كروي جبارة ابعاد .

$$V(r) = V_0 \quad r < a$$

$$= 0 \quad r > a$$

$$E > 0 \quad \text{مستوى اضطارة}$$

معادلة شرودنجر يمكن ان تكتب بالشكل :

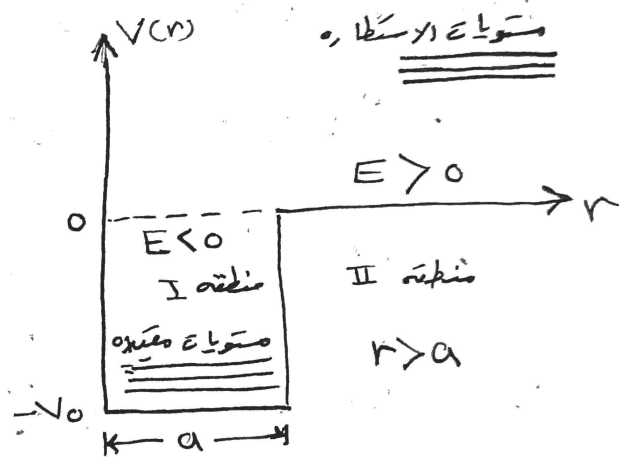
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi = E \psi \quad (1)$$

$$\psi = \frac{1}{r} \chi'_l(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \chi'_l}{dr^2} + \left(\frac{2m}{\hbar^2} E - \frac{2m}{\hbar^2} V \right) \chi'_l - \frac{l(l+1)}{r^2} \chi'_l = 0$$

$$\text{I المنطقة : } \frac{d^2 \chi'_I}{dr^2} + \left[K^2 + K_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi'_I = 0$$

$$\text{حيث } V = -V_0 \quad \therefore K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{و} \quad K_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$



الجهد يعتمد على r

تقريب (2) في (1) :

23

النقطة II : $\frac{d^2 \chi'_{II}}{dr^2} + \left[K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi'_{II} = 0$

K very small ($l=0$)

ونفرض أن K صغيرة جداً

$l > Ka$ ، K في l ، K في l

منها $l=0$ ، K في l ، K في l

$\frac{d^2 \chi'_{oI}}{dr^2} + K_I^2 \chi'_{oI} = 0$ at $r < a$

هنا $K_I^2 = K^2 + K_0^2$

$\frac{d^2 \chi'_{oII}}{dr^2} + K^2 \chi'_{oII} = 0$ at $r > a$

أي $V=0$ ، $K_0^2 = 0$

(a) $\chi' \rightarrow 0$ when $r \rightarrow 0$

الشروط الحدودية :

(b) χ' and $\frac{d\chi'}{dr}$ continuous at $(r=a)$

$\chi'_{oI} = A \sin k_I r$ — (3) ($\cos k_I r = 1$ جزئياً) : حل I

: حل II

$\chi'_{oII} = C \sin kr + D \cos kr$

$C = B \cos \delta_0$

$D = B \sin \delta_0$

$\chi'_{oII} = B \sin(kr + \delta_0)$ — (4)

at $r=a$ ($\chi'_{oI} = \chi'_{oII}$) $r=a$ — (5)

$\left(\frac{d\chi'_{oI}}{dr} = \frac{d\chi'_{oII}}{dr} \right)_{r=a}$ — (6)

$A \sin k_I a = B \sin(ka + \delta_0)$ — (7)

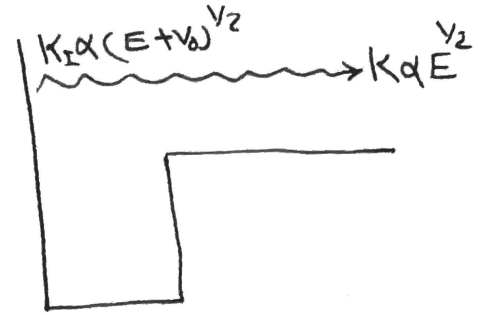
من الشرط الأول :

$K_I A \cos k_I a = K B \cos(ka + \delta_0)$ — (8)

من الشرط الثاني :

$\therefore \tan(ka + \delta_0) = \frac{K}{K_I} \tan k_I a$ — (9)

انحد الكوة ⑨ يأتي من تقريب $k_I \rightarrow k_0$ ، بقاء k ثابت



k is small $\Rightarrow \delta$ is small

$\therefore \tan(k a + \delta_0) \simeq k a + \delta_0 \quad ; \quad k_I \rightarrow k_0$

عند الكوة ⑨

$k a + \delta_0 \simeq \frac{k}{k_I} \tan k_I a$

$\therefore \delta_0 = [k a] \left[\frac{\tan k_0 a}{k_0 a} - 1 \right]$ ، $k_I^2 = k^2 + k_0^2$ للبقاء العايدة عند k صغير

$\therefore \sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \simeq \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 \simeq \frac{4\pi}{k^2} k^2 a^2 \left[\frac{\tan k_0 a}{k_0 a} - 1 \right]^2$

$\therefore \sigma_0 \simeq (4\pi a^2) \left[\frac{\tan k_0 a}{k_0 a} \right]^2$ for s-scattering

س/ افترض ان لدينا صندوق كروي بجاذبية ابعاد a ، الطاقة التالية

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , r < a \\ 0 & , r > a \end{cases}$$

١- $\tan(k a + \delta_0) = \frac{k}{k_I} \tan k_I a$

٢- $\sigma_0 \simeq (4\pi a^2) \left(\frac{\tan k_0 a}{k_0 a} - 1 \right)^2$ لا يتجاهل δ في الفرع ١
 ٣- $\sum$ الطاقة العايدة

استطارة الرنين "Resonance Scattering"

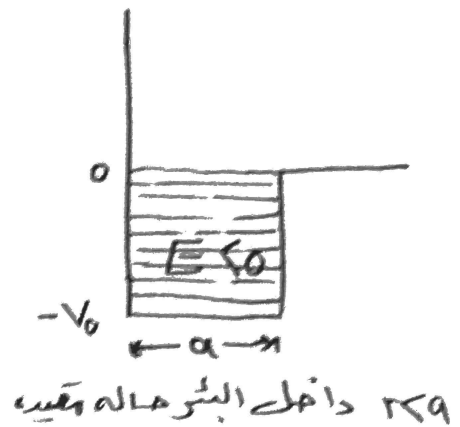
لدراسة هذا النوع من الاستطارة، نقرض حالة معينة $E < 0$

$$SE \Rightarrow \frac{d^2 \chi'_0}{dr^2} + (k_0^2 - \alpha^2) \chi'_0 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2} \text{ و } k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$k_2^2 = k_0^2 - \alpha^2$$

$$\text{الخطوة I : } \chi'_0 = c \sin k_2^2 r$$



الخطوة II : $\frac{d^2 \chi'_0}{dr^2} - \alpha^2 \chi'_0 = 0$ هنا نعمل $\cos k_2 r$ لأنه يحقق الشروط الحدودية

$$\chi'_0 = D e^{-\alpha r} \quad \text{يحل } e^{\alpha r}$$

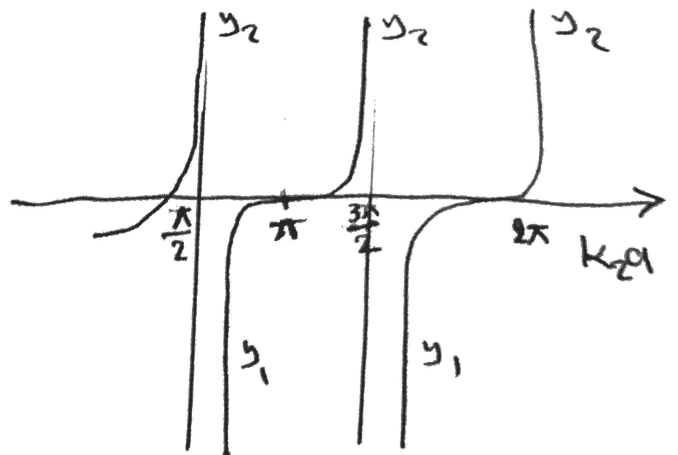
من الشروط الحدودية : $\frac{-k_2^2}{(k_0^2 - k_2^2)^{1/2}} = \tan k_2 a$

$$\therefore k_2 \cot k_2 a = -\alpha \quad \text{--- (1)}$$

α تتناسب مع الطاقة E وهذه المعادلة لا تملك حلاً تحليلياً وإنما يحلها بيانياً والكل عباره عن خطين متقاطعين هما y_1 و y_2 :

$$y_1 = \frac{-k_2}{(k_0^2 - k_2^2)^{1/2}}$$

$$y_2 = \tan k_2 a$$



١٨ $\frac{\pi}{2} < k_2 a < \frac{3\pi}{2}$ one bound State (حالة مقيدة)

$\frac{\pi}{2} < k_2 a < \frac{5\pi}{2}$ Two bound State (حالتا مقيدتان)

$\therefore (n - \frac{1}{2})\pi < k_2 a < (n + \frac{1}{2})\pi$ n bound State

وعندما لا توجد حالة مقيدة : when $k_2 a < \frac{\pi}{2}$ no bound State

منه العلاقة $\Rightarrow k_2 \cot k_2 a = -\alpha$

①

حالة الرنين ممكن ان تحدث عندما يكون الجيبا في نقطة (طائفا قليلا)

for slow Particle ($E \rightarrow 0$) $\alpha = 0$

$\therefore \cot k_2 a = 0$

$\therefore k_2 a = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

وبذلك نأخذ مخرج الاستطارة، α يكون كبير وهذا يعني ان احتمالية امتصاص الإلكترون كبير. عندما يحدث هذا نلاحظ شتوتج عند عمل الاستطارة قوية عند الطاقة المنخفضة والمقيدة نفس الوقت أي وجود حالة رنين.

مثال 2: أوجد المقطع العرضي التفاضلي في تقريب بورن للجهد المعروف بجهد ياكوبا
 ياكوبا $V(r) = V_0 e^{-r/R}$ حيث V_0 ثابت و R ثابت.
 حيث V_0 ثابت و R ثابت.

$$V(r) = V_0 e^{-r/R}$$

الحل: أوجد تقريب بورن فأن المقطع العرضي التفاضلي يعطى بالعلاقة

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty r' V(r') \sin(qr') dr' \right|^2$$

حيث $q = |\vec{k}_0 - \vec{k}| = 2k \sin(\theta/2)$ و $k_0 = k$ (تقريب بورن) $k_0 = k$ و العلاقة المستقلة للإلكترونات الحرة

و العلاقة أعلاه للمقطع العرضي التفاضلي يمكن تقريب بورن الأول. نعوض بها علاقة الجهد ننتج:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty e^{-r/R} \sin(qr) dr \right|^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-r/R} \sin(qr) dr &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(1/R - iq)r} dr - \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-(1/R + iq)r} dr \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1/R - iq} - \frac{1}{1/R + iq} \right] = \frac{q}{1/R^2 + q^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4} \frac{1}{(1/R^2 + q^2)^2} = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4} \frac{1}{[1/R^2 + 4k^2 \sin^2(\theta/2)]^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi \frac{4\mu^2 V_0^2 R^4}{\hbar^4} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(1 + 4k^2 R^2 \sin^2(\theta/2))^2} \end{aligned}$$

28 let $x = 2kR \sin(\frac{\theta}{2}) \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{x dx}{k^2 R^2}$

$$\therefore \sigma = \frac{8\pi \mu^2 V_0^2 R^4}{\hbar^4} \frac{1}{k^2 R^2} \int_0^{2kR} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{16\pi \mu^2 V_0^2 R^4}{\hbar^4} \frac{1}{1+4k^2 R^2}$$

$$= \frac{16\pi \mu^2 V_0^2 R^4}{\hbar^4} \frac{1}{1+8\mu E R^2 / \hbar^2}$$

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

حيث أن طاقة الجسيم المستطوي E :

مثال : باستدال تقريب بورن أوجد المقطع العرضي لانتثار جسيم كتلته m من جهد دالة $V(r) = g \delta^3(r)$ والمقطع العرضي لانتثار جسيم كتلته m من جهد دالة $V(r) = g \delta^3(r)$ والمقطع العرضي لانتثار جسيم كتلته m من جهد دالة $V(r) = g \delta^3(r)$

الحل : حسب تقريب بورن فإن سرعة الانتثار $f(\theta)$ تعطى بالعلاقة :

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int e^{-ik \cdot r'} V(r') e^{ik' \cdot r'} dr'$$

k و k' هما متجهتا الموجة الساتلة والانتقارة بالترتيب

$$q = k' - k \text{ لكن}$$

$$\therefore f(\theta) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} g \int e^{-iq \cdot r'} \delta(r') dr' = \frac{mg}{2\pi \hbar^2} e^{-i0q} = \frac{mg}{2\pi \hbar^2}$$

فيكون المقطع العرضي لانتثار الجسيم :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{m^2 g^2}{4\pi^2 \hbar^4}$$

والمقطع العرضي الكلي للانتقاره :

$$\sigma_t = 4\pi \sigma(\theta) = \frac{m^2 g^2}{\pi \hbar^4}$$

والنقطة الزاوية يكون متناظر (مثال) .

مثال : اوجد المتكامل المرفوع لـ $V(r)$ حيث $V(r) = -V_0$ لـ $r < a$ و $V(r) = 0$ لـ $r > a$

$$V = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

وكان النتيجة مع النتائج المستخلصة باستخدام تقريب بورن ؟

الحل :

$$S.E: \chi''_l(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = 0 \quad \text{و } r > a$$

$$\chi''_l(r) + \left[k'^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = 0 \quad \text{و } r < a$$

$$\chi = r^l R(r) \quad \text{و } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{و } k'^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$$

انه استكارة الطاقة الواصلة هي صفر فقط بالموجة الخارجة S (لـ $l=0$) لذا :

$$\chi''_l(r) + k^2 \chi_l(r) = 0 \quad \text{و } r > a$$

$$\chi''_l(r) + k'^2 \chi_l(r) = 0 \quad \text{و } r < a$$

$$\chi_l(r) = \begin{cases} \sin(kr + \delta_0) & \text{و } r > a \\ A \sin(k'r) & \text{و } r < a \end{cases}$$

الحل لغالب المعادلتان على التوالي :

$$\ln \chi'_l \Big|_{r=a^-} = \ln \chi'_l \Big|_{r=a^+}$$

انه شرط الاستمرارية :

$$\Rightarrow k \tan(k'a) = k' \tan(ka + \delta_0)$$

$$\therefore \delta_0 = \tan^{-1} \left[\frac{k}{k'} \tan(k'a) \right] - ka$$

وعند الطاقة الواصلة يكون : $k \rightarrow 0 ; k' \rightarrow k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$

$$\therefore \delta_0 \approx ka \left(\frac{\tan(ka)}{ka} - 1 \right)$$

" المقطع العرضي $\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = 4\pi a^2 \left[\frac{\tan(ka)}{ka} - 1 \right]^2$

if $ka \ll 1 \Rightarrow \sigma \approx 4\pi a^2 \left[\frac{ka}{ka} + \frac{(ka)^3}{3ka} - 1 \right]^2 = \frac{16\pi a^6 m^2 V_0^2}{9\hbar^4}$

وحسب تقريب بورن يكون :

فان $f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik \cdot r} V(r) e^{ik' \cdot r} d^3r$

k و k' متجهتا الموجة الساقطة والطاردة .

$\therefore q = k - k'$ و $|k'| = |k| = k$ - المتجه العرضي

$\therefore q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$

θ زاوية التشتت

$$\begin{aligned} \therefore f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-iqr \cos \theta'} 2\pi \sin \theta' d\theta' \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \int_0^a r \sin(qr) dr \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} [\sin(qa) - qa \cos(qa)]$$

فان $f(\theta)$ بتقريب بورن :

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{4m^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6} [\sin(qa) - qa \cos(qa)]^2$$

المقطع العرضي الكلي σ : $\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega$

وعند الطاقات العالية

$$k \rightarrow 0 \text{ و } q \rightarrow 0$$

$$\therefore \sin(qa) \approx qa - \frac{1}{3!} (qa)^3$$

$$\cos(qa) \approx 1 - \frac{1}{2!} (qa)^2$$

$$\therefore \sigma(\theta) \approx \frac{4m^2 V_0^2 a^6}{9k^4}$$

المقطع العرضي التقاطعي للإسكارة

لذا يكون المقطع العرضي الكلي للإسكارة عند الطاقات العالية :

$$\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega = \frac{16\pi m^2 V_0^2 a^6}{9k^4}$$

من هذا نستنتج أنه عند الطاقات العالية حيث $ka \ll 1$ و $k \rightarrow 0$ فإنه
الطريقتين تعطي نفس النتائج.

مثال : أعتبر أن استقطاره صرنا لنيور رنات جاستها 50 MeV من نواة نبع عنها اذراطة
للطور وهي $\delta_0 = 95^\circ$ و $\delta_1 = 72^\circ$ و $\delta_2 = 60^\circ$ و $\delta_3 = 35^\circ$ و $\delta_4 = 18^\circ$ و $\delta_5 = 5^\circ$ وأخيراً $\delta_6 = 0^\circ$
حيث أن $(\delta_l \approx 0 \text{ for } l \geq 6)$ أوجد المقطع العرضي الكلي للإسكارة
واحد ضعف من نواة.

$$\therefore \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^6 (2l+1) \sin^2 \delta_l \text{ for } \delta_l = 0 \text{ when } l \geq 6$$

$$\therefore \sigma = \frac{4\pi}{k^2} (\sin^2 \delta_0 + 3\sin^2 \delta_1 + 5\sin^2 \delta_2 + 7\sin^2 \delta_3 + 9\sin^2 \delta_4 + 11\sin^2 \delta_5)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \times 10.702$$

كأ k^2

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n} = 50 \text{ MeV}$$

وانه النيوترون يتحرك بحجم مربع الاستطارة

$$m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$$

$$\hbar c = 197.33 \text{ MeV}$$

$$\therefore k^2 = \frac{2m_n E}{\hbar^2} = \frac{2(m_n c^2) E}{(\hbar c)^2} = \frac{2(939.57)(50)}{(197.33)^2} = 2.41 \text{ fm}^{-2}$$

$$\therefore \sigma = \frac{4\pi}{2.41 \text{ fm}^{-2}} \times 10.702 = 55.78 \text{ fm}^2 = 0.558 \text{ barn}$$

عندما تكون قيمة l كبيرة فان تأثير جهد النواة يهمل

$$\therefore E \approx \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_n r_c^2} \approx \frac{42\hbar^2}{2m_n r_c^2} \text{ لـ } l \approx 6 \text{ since } S_l = 0 \text{ for } l > 6$$

$$\therefore r_c \approx \sqrt{\frac{2l\hbar^2}{m_n E}} = \sqrt{\frac{2l(\hbar c)^2}{(m_n c^2) E}} = \sqrt{\frac{2(197.33)^2}{(939.57)(50)}} = 4.17 \text{ fm}$$

واجب من / يابوناه π^0 بطاقة 650 MeV استطارة من نواة تحتلية لها قابلية الاستطارة
نصف قطر هذه النواة 1.4 fm :

- ٢- احب قيمة المقطع الكلي للاستطارة المرن وغير المرن
- ٣- احب سرعة الاستطارة

من / اوجد المقطع العرضي التقاطي حسب تقريب بورن الاول للاستطارة حسب بواسطة
المجهد التجاذبي الكلي

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } r < a \\ 0 & \text{for } r > a \end{cases}$$

$$V_0 > 0 \text{ جاذبة}$$

من / افرض الاستطارة مرنة لجسيم من المجهد $V(r) = V_0 \delta(r-a)$ اوجد

- ٢- المقطع العرضي التقاطي حسب تقريب بورن الاول