الفصل الخامس : القيم الدينية والمحتوى الديني

عقيل هاشم حسين

"الفصل الخامس"

① القيم الذاتية والمتجهات الذاتية "Eigen Values and Eigen Vectors"

* اذا كانت A هي مصفوفة $n \times n$ فان $AV = \lambda V$ حيث عدد
λ قيم (قيمة) عددية و V متجه (مصفوفة) غير صفري

* نقول أن λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A
* " " V هو المتجه الذاتي للمصفوفة A
* لذلك فان λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A المرتبطة مع V
* " " V هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المرتبط مع λ
* مجموعة كل القيم الذاتية للمصفوفة A يطلق عليها طيف المصفوفة A ويرمز لها $\sigma(A)$.

ملاحظة: المصفوفة المربعة A يرمز لها بالرمز $A = (a_{ij})_{n \times n}$

* المعادلة المميزة $|A - \lambda I| = 0$ تدعى بالمعادلة المميزة للمصفوفة A حيث I هي مصفوفة واحدية من نفس مرتبة المصفوفة A. (تسمى أحياناً المحددة المميزة).
* جذر أو جذور المعادلة المميزة $|A - \lambda I| = 0$ تدعى القيم الذاتية للمصفوفة A وهي (λ)
* حل (حلول) المعادلة المميزة $(A - \lambda I)V = 0$ تدعى متجهات ذاتية لـ A وهي (V)
* المتجه الغير صفري V هو متجه ذاتي للمصفوفة A اذا وفقط اذا كان:

$$\boxed{AV = \lambda V}$$

مثال: لدينا المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ والمتجهات الذاتية $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

عندئذٍ

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)V_1$$

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2)V_2$$

نلاحظ أن V_1 هو متجه ذاتي للمصفوفة A المرتبط مع القيمة الذاتية $\lambda = -1$
$\lambda = 2$ " " " " A " " " " V_2

*

* تعريف: لمصفوفة مربعة A محطات فإن الزوج المرتب (λ, V) يسمى بالزوج المرتب الذاتي للمصفوفة A

(λ: قيمة ذاتية، V: متجه ذاتي)

نلاحظ أن:

$\therefore \quad AV = \lambda V$

$\therefore \quad AV - \lambda V = 0$

أو $\quad (A - \lambda I_n)V = 0 \quad \longrightarrow (1)$ المعادلة المميزة

* إذا كان المتجه الذاتي $V \neq 0$ فإنه يوجد قيمة ذاتية λ للمصفوفة $(\lambda I - A)$- وبالتالي تكون المصفوفة $\lambda I - A$ مفردة.

* نظرية: إذا كانت A هي مصفوفة مربعة $n \times n$ و λ هو عدد عندئذٍ:

① λ هو قيمة ذاتية للمصفوفة A

② المصفوفة $\lambda I_n - A$ هي مفردة (غير قابلة للانعكاس)

③ $|A - \lambda I_n| = 0$ حيث I_n مصفوفة ولديه من نفس مرتبة المصفوفة A.

ملاحظة: المعادلة نلاحظ أن $|A - \lambda I_n| = 0$ يكافئ $|\lambda I_n - A| = 0$ وأيهما يستخدم مع الباقي.

مثال: أوجد القيم الذاتية و المتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

الحل

$$A - \lambda I_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة $|A - \lambda I_2| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-\lambda) - (1)(2) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

(٢)

أذن القيم الذاتية هي $\lambda = 2$ و $\lambda = -1$

أو $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_1 = -1$

لإيجاد المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية :

نفرض $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

V_1 هو المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = -1$

معادلة متجه-مصفوفة : $AV_1 = \lambda_1 V_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ينتج عنها :

$$x_1 + y_1 = -x_1 \quad \text{or} \quad 2x_1 + y_1 = 0$$
$$2x_1 = -y_1 \quad 2x_1 + y_1 = 0$$

حل هاتين المعادلتين هو المتجه الذاتي V_1 المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = -1$ وهو أي متجه يأخذ الشكل :

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وهذا يعني ان المتجه الذاتي (الكل) هو أي متجه يقع على طول الخط المستقيم $y = -2x$

ومن المناسب ان نختار $\boxed{x_1 = 1}$ والذي المتجه الذاتي يصبح

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{المقابل لـ } (\lambda = -1)$$

عندما $\lambda_2 = \lambda = 2$:

$$V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$AV_2 = \lambda_2 V_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (2)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ينتج عنها

$$x_2 + y_2 = 2x_2 \quad \text{or} \quad -x_2 + y_2 = 0$$
$$2x_2 = 2y_2 \qquad x_2 - y_2 = 0$$

$$\therefore V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_2 = 1]{\text{نعوض}} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

المقابل لـ $(\lambda_2 = 2)$

(٤) مثال / لتكن $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها لـ A المعرفة على $\mathbb{R}^2$

الحل: المعادلة المميزة $|\lambda I - A| = 0$

$$\left|\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \lambda^2-2\lambda-3=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

إما $\lambda=3$ أو $\lambda=-1$ القيم الذاتية

لدينا قيمتين ذاتيتين هما 3 و 1- لكل منهما متجه ذاتي

المتجه الذاتي الأول يقابل القيمة الذاتية الأولى $V_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{يقابل}} \lambda_1=3$

المتجه الذاتي الثاني $V_2=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2=-1$

الآن نجد كلاً من (المتجهات الذاتية) V_1 و V_2 المقابلة للقيم الذاتية λ_1 و λ_2 على التوالي.

$$\therefore AV_1=\lambda_1 V_1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=(3)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$$

ينتج $x_1+2y_1=3x_1$ or $2x_1=2y_1$ or $x_1-y_1=0$

$2x_1+y_1=3y_1$

حل المعادلتين هو المتجه الذاتي V_1 وهو أي متجه يقع على المستقيم $x=y$

$$\therefore V_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

فإذا وضعنا $(x_1=1)$ فإن $V_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ وهو المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=3$.

وبنفس الطريقة نجد أن

$$V_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{المقابل}} \lambda_2=-1$$

⑤ مثال: أوجد القيم الذاتية λ والمتجهات الذاتية المقابلة لها V والمرتبطة بالمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

الحل:-

$|\lambda I - A| = 0$ المعادلة المميزة للمصفوفة A

$I = I_3$ مصفوفة واحدية من الدرجة 3

نتج $\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\right| = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix} = 0$$

نجد محدد بطريقة "Sarrus Rule" ينتج:

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+2+2(\lambda-2)-2(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$\therefore$ $\lambda_1=1 \Rightarrow V_1$

$\lambda_2=2 \Rightarrow V_2$ القيم الذاتية للمصفوفة A

$\lambda_3=3 \Rightarrow V_3$

لكل قيمة ذاتية متجه ذاتي مقابل لها على التوالي:-

for $\lambda_1=1$ let $V_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$

المتجه الذاتي V_1 المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=1$ نجده كالتالي:-

$$AV_1=\lambda_1 V_1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$$

ينتج

$$x_1 - z_1 = x_1 \quad \text{——} ①$$
$$x_1 + 2y_1 + z_1 = y_1 \quad \text{——} ②$$
$$2x_1 + 2y_1 + 3z_1 = z_1 \quad \text{——} ③$$

من ① نجد أن $z_1 = 0$ ومن ② و ③ نجد أن $x_1 = -y_1$

إذن الشعاع الذاتي V_1 هو أي شعاع يقع على المستقيم $y = -x$ شرط أن تكون $z = 0$

$$\therefore V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

إذا وضعنا $x_1 = 1$ فإن الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ هو:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

عند القيمة الذاتية $\lambda = 2$ فإن $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ لذلك نجد أن:

$$AV_2 = \lambda_2 V_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = (2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 - z_2 = 2x_2 \iff x_2 + z_2 = 0$$

$$x_2 + 2y_2 + z_2 = 2y_2 \iff x_2 + z_2 = 0$$

$$2x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 2z_2 \iff 2x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$$

من المعادلة الأخيرة نجد أن

$$2x_2 + 2y_2 + (-x_2) = 0$$

$$x_2 + 2y_2 = 0 \implies y_2 = -\tfrac{1}{2} x_2$$

$$\therefore V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{2}x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

إذا وضعنا $x_2 = 1$ فإن الشعاع الذاتي V_2 هو:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة عندما $\lambda_3 = 3$ فإن V_3 هي:

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(٧) أمثلة: ① أوجد القيم الذاتية (قيم أعين) والمتجهات الذاتية (متجهات أعين) للمصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A

$\lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = -3$

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

② أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=-2 \quad \lambda_2=3 \quad \lambda_3=5$$

$$v_1=\begin{pmatrix}-35\\12\\19\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \quad v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

③ أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix} \quad \lambda_1=2 \quad \lambda_2=3$$

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

④

$$A=\begin{pmatrix}1 & +2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=1 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=3 \Rightarrow v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

⑤

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=1/2 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-1/2 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$