الفصل الرابع : المعادلات التفاضلية

عقيل هاشم حسين

الفصل الرابع : المعادلات الخطية "Linear equations"

نفرض لدينا نظام من m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad \text{---(1)}$$

a_{mn} قيم في المعادلات حيث $m, n = 1, 2, \dots, m, n$

b_m " ثوابت حيث $m = 1, 2, \dots, m$

* حل هذه المعادلات يعني أيجاد قيم المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$ والتي تحقق هذه المعادلات.
* هذه المجموعة من المعادلات تسمى أنظمة (نظام) المعادلات الخطية.
* عندما يوجد حل لهذا النظام فالنظام يسمى « نظام متوافق » أو « نظام منسجم » / عكس ذلك عندما لا يوجد حل فالنظام يسمى « غير متوافق » أو « غير منسجم ».
* النظام المتوافق (consistent system) له أما حل وحيد أو مجموعة لا نهائية من الحلول.
* كل معادلة من معادلات النظام المحرّف بالعلاقة ① تسمى معادلة خطية غير متجانسة لان قيم b أي $(b_1, b_2, \dots, b_n) \neq 0$
* أن نظام المعادلات الخطية يسمى نظام متجانس أذا كل قيم b تساوي صفر $(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$
* يمكن كتابة المنظومة المعرفة بالمعادلة ① للمعادلات الخطية بصيغة المصفوفات وكما يلي :

$$AX = B \quad \text{---(2)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

---(3)

* أذا قيم $b \neq 0$ فان نظام المعادلات الخطية يكون غير متجانس / واذا قيم $b = 0$ فيكون متجانس

(*) حل المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كريمر "Cramer's Rule"

* في هذه الطريقة نجد $|A|$ للمصفوفة المعاملات حسب علامة رقم (3) فاذا كانت $|A| \neq 0$ فان منظومة المعادلات الخطية $AX=B$ لها حل وهي لا وحسب العلاقات التالية

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$|A_1|$: هي القيمة المطلقة للمصفوفة الناتجة من تبديل العمود الاول من A بقيم B

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$|A_n|$: هي ناتج من تبديل العمود n من المصفوفة A بقيم عمود المصفوفة B

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

وهكذا ....

$$X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

مثال / حل منظومة المعادلات الخطية التالية باستخدام قاعدة كريمر ؟

$$4X_1 + 5X_3 = 6$$
$$X_2 - X_3 = -2$$
$$3X_1 - 4X_3 = 3$$

الحل :- نحول هذه المعادلات الى صيغة المصفوفات $AX=B$ وكما يلي :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

(A: مصفوفة المعاملات ، X: مصفوفة الحلول)

المطلوب ايجاد قيم X_1, X_2, X_3 نجد اولا $|A|$

$$|A| = (-1)^2(4)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^3(0)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^4 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-16) + (-15) = -31 \neq 0$$

* اذا $|A| = 0$ فان لا يوجد حل لمنظومة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كريمر

(3)

أي أن

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow |A_1| = 39$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow |A_2| = 56$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A_3| = -6$$

يكون

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = -\frac{1}{31}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = +\frac{39}{31}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -\frac{1}{31}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{56}{31}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -\frac{1}{31}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{31}[-6] = \frac{6}{31}$$

ومنه

$$X = \begin{bmatrix} \frac{39}{31} \\ \frac{-56}{31} \\ \frac{6}{31} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{نكتب}]{\text{أو}} X = \left(\frac{39}{31}, \frac{-56}{31}, \frac{6}{31}\right)^t$$

حل منظومة المعادلات الخطية

مثال / حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - 5y = 40$$

الحل :-

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-15) - (8) = -23 \neq 0 \quad \text{(يوجد حل)}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 40 & -5 \end{vmatrix} = (-35) - (80) = -115$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 40 \end{vmatrix} = 120 - (28) = 92$$

$$\therefore x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-115}{-23} = 5$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{92}{-23} = -4$$

أو الحل

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

مثال:- حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام قاعدة كريمر

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 1$$
$$2X_2 + 2X_3 = -1$$

الحل

نكتب العلاقة : $AX = b$

فيكون $\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$

معلومة المحددات

نجد $\Rightarrow |A| = (-1)^2(1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 = -2 + 4 = 2 \neq 0$ يوجد حل

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{(-1)^3(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\{2+1\} = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{(-1)^2(1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(2)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\right\} = \frac{1}{2}\{6-6\} = 0$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{(-1)^2(1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3(2)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\right\} = \frac{1}{2}\{-5+4\}$$
$$= \frac{-1}{2}$$

$\therefore$ $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ or $X = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^t$ حل المعادلات الخطية

تمرين / حل منظومة المعادلات الخطية التالية :

$$kX - ny = (k-n)^2$$
$$2X - y = n$$

الجواب : $x = k$ ، $y = 2k - n$

* ملاحظة : في بعض الأحيان نستخدم Z و X بدلاً من X_1 و X_2 و X_3

فيكون A_1 و A_2 و A_3 " " A_1 و A_2 و A_3

وعلى التوالي ...

② حل المعادلات الخطية باستخدام النظير الضربي A^{-1}

حل المعادلات الخطية للنظام $AX=B$ باستخدام النظير الضربي كالتالي :-

$\because AX=B$ منظومة المعادلات الخطية

$\Rightarrow \bar{A}^{1}AX=\bar{A}^{1}B$ ضرب الجهتين بـ A^{-1}

$\Rightarrow IX=\bar{A}^{1}B$ where $\bar{A}^{1}A=I$ ← محفوظة واحدية

$\therefore \boxed{X=\bar{A}^{1}B}$ ← "برهان"

مثال/ حل منظومة المعادلات التالية باستخدام النظير الضربي ؟

$4X_1+5X_3=6$
$X_2-X_3=-2$
$3X_1-4X_3=3$

شرط حل يوجد كـ $|A|\neq 0$

الحل ⇒ $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}6\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$ ⇒ نجد $|A|=-31\neq 0$ (يوجد حل) ← شرط

مصفوفة المعاملات

نكتب مصفوفة المعاملات المرافقة

$C(A)=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ المصفوفة المرافقة

$\alpha_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-4$

$\alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 5\\ 0 & -4\end{vmatrix}=0$

$\alpha_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5$

$\alpha_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-3$

$\alpha_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-31$

$\alpha_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 5\\ 0 & -1\end{vmatrix}=4$

$\alpha_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3$

$\alpha_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0$

$\alpha_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=4$

$\because Adj(A)=C(A)^t=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$

المصفوفة المجاورة للمصفوفة الأصلية A

$\therefore \bar{A}^{1}=\dfrac{Adj(A)}{|A|}=\begin{bmatrix}\frac{\alpha_{11}}{|A|} & \frac{\alpha_{21}}{|A|} & \frac{\alpha_{31}}{|A|}\\ \frac{\alpha_{12}}{|A|} & \frac{\alpha_{22}}{|A|} & \frac{\alpha_{32}}{|A|}\\ \frac{\alpha_{13}}{|A|} & \frac{\alpha_{23}}{|A|} & \frac{\alpha_{33}}{|A|}\end{bmatrix}$ النظير الضربي

$\because X=\bar{A}^{1}B$

$\therefore X=\begin{bmatrix}\frac{4}{31} & 0 & \frac{5}{31}\\ \frac{3}{31} & 1 & -\frac{4}{31}\\ \frac{3}{31} & 0 & -\frac{4}{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{39}{31}\\ -\frac{56}{31}\\ \frac{6}{31}\end{bmatrix}$ ← الحلول

⑥

مثال: حل المعادلات الخطية باستخدام النظير الضربي؟

$$\begin{aligned} aX-3y&=1\\ aX-2y&=2\end{aligned}$$

(طريقة خاصة للمعادلات ذات المجهولين)

الحل ⟹ مصفوفة المعاملات $A=\begin{bmatrix} a & -3\\ a & -2\end{bmatrix}$

نجد $|A|$ ⟹ $|A| = -2a-(-3a) = a$

عوضنا الإشارات فقط — ابدلنا العوامل

$$\begin{bmatrix} -2 & 3\\ -a & a\end{bmatrix}$$

الآن نغير المصفوفة A ونكتبها كالتالي:-

النظير الضربي $A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & \frac{3}{a}\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$\because\ X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} -\frac{2}{a} & \frac{3}{a}\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{الحل}} \begin{bmatrix} \frac{4}{a}\\ 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow x\\ \leftarrow y\end{matrix}$$

حل آخر:

$|A| = a$

$$C(A)=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}=(-1)^2(-2)=-2$$
$$\alpha_{12}=(-1)^3(a)=-a$$
$$\alpha_{21}=(-1)^3(-3)=3$$
$$\alpha_{22}=(-1)^4 a = a$$

$$\therefore\ C(A)=\begin{pmatrix} -2 & -a\\ 3 & a\end{pmatrix}$$

$$Adj(A)=C(A)^t=\begin{pmatrix} -2 & 3\\ -a & a\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|}=\begin{pmatrix} -2/a & 3/a\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$\because\ X = A^{-1}B$

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{2}{a} & \frac{3}{a}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{4}{a}\\ y=1\end{matrix} \xRightarrow[\text{نكتب}]{\text{أو}} \begin{pmatrix} \frac{4}{a}\\ 1\end{pmatrix}$$

الحل

(٣) حل المعادلات الخطية باستخدام الصف البسيط

(أ) ذات المجهولين : المعادلات الخطية التالية

$$a_1x_1 + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

نكتبها على صيغة مصفوفة كالتالي :-
وتسمى مصفوفة المعاملات والثوابت

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

وباجراء بعض العمليات الاساسية عليها تكون بالشكل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \end{bmatrix} \longrightarrow (*)$$

فيكون الحل $x = A$ و $y = B$

ملاحظة / نفس الطريقة بالنسبة للمعادلات الخطية ذات اكثر من مجهولين ! . هذه الطريقة تسمى بطريقة الصف البسيط

مثال / أستخدم عمليات الصف البسيط لحل أنظمة المعادلات الخطية التالية :

$$2x + y = 6$$
$$3x - y = 4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{-5}{2} & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{5}R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2$ و $y = 2$ الحل

الملخص بجري العمليات التي اذا حصل على مصفوفة بالطريقة وكما موضحة أعلاه (المصفوفة (*))

ملاحظة / نستخدم نفس الاسلوب في حالة مصفوفة ناتجة من معادلات اكثر !!!

تمرين / أوجد حل المعادلات التالية :-

$$ax - y = 2$$
$$2x + y = -1$$

الجواب $\left(x = \frac{1}{a+2} \text{ و } y = -\frac{a+4}{a+2}\right)$

(ج) ذات ثلاث مجاهيل : المعادلات الخطية التالية :

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

نحولها للصورة التالية كمصفوفة للمعاملات والثوابت :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

نحول أول ٣ أعمدة من المصفوفة أعلاه / باستخدام عمليات حسابية الى الشكل التالي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \end{bmatrix}$$

فيكون الحل: $x=A\,;\,y=B\,;\,z=C$

مثال :- باستخدام عمليات الصف البسيط حل أنظمة المعادلات التالية ؟

$$2x-4y-2z=6$$
$$z-3y=-2$$
$$y-3x+z=3$$

نكتب مصفوفة المعاملات والثوابت بدقة وترتيب كالتالي :-

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_1}{2}\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+3R_1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -5 & -2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+5R_2\to R_3]{R_1+2R_2\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -11/3 & 46/3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{11}R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 13/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -46/11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+\frac{1}{3}R_3\to R_2]{R_1+\frac{5}{3}R_3\to R_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{87}{33} \\ 0 & 1 & 0 & -24/33 \\ 0 & 0 & 1 & -46/11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x=-\frac{87}{33}=-\frac{29}{11}\;;\;y=-\frac{24}{33}=-\frac{8}{11}\;;\;z=-\frac{46}{11}$$

(٩) :- "Gaussian Elimination" (٤) حل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة كاوس للحذف

وهي طريقة مشابهة للحذف البسيط سوى بعض التغييرات، حيث نضع المعادلات الخطية على صورة مصفوفة المعاملات والثوابت. فاذا كان أول عنصر بالمصفوفة (الصف الاول العمود الاول) يساوي صفراً فاننا نغير ترتيب المعادلات بحيث لا يكون الصف الاول العمود الاول) يساوي صفر.

* اذا كان عنصر (الصف الاول العمود الاول) لا يساوي واحد فاننا نضرب هذا العنصر وجميع عناصر الصف الاول من المصفوفة الناتجة بالنظير الضربي للعنصر نفسه (الصف الاول العمود الاول)
* نحول بالعمليات الحسابية جميع عناصر (مدخلات) المتجه المتمم الى الصفر ثم نجد قيم z و y و x.

مثال / باستخدام قاعدة كاوس للحذف جد قيم x و y و z للمعادلات التالية ؟

$$2x - y + z = 2$$
$$3x + 2y + 2z = -2$$
$$x - 2y + z = 1$$

نكتب مصفوفة المعاملات والثوابت كما يلي (بحيث أول عنصر في المصفوفة الناتجة $a_{11} \neq 0$) كالتالي :-

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نبدل الصف الأول مع الصف الثالث لجعل $a_{11} = 1$ كالتالي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

الان نحول المدخلات (العناصر) ضمن المتجه المتمم الى الصفر كما يلي :-

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5/8 & 15/8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - \frac{3}{8}R_2 \end{array}$$

$$\therefore \left(-\frac{5}{8}\right)z = \frac{15}{8} \Rightarrow \text{نجد } \boxed{z = -3} \xrightarrow[z \text{ نعوض عن}]{} 8y - z = -5 \xrightarrow{\text{نجد}} \boxed{y = -1}$$

$$\because x - 2y + z = 1 \Rightarrow x = 1 + 2(-1) + 3 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

(10)

مثال/ أوجد a, b, c باستخدام قاعدة كاوس حيث

$$\begin{aligned} 2a+b-2c&=3\\ -a+b+c&=2\\ a-2b-3c&=5 \end{aligned}$$

الجواب $a=-13/3$, $b=7/3$, $c=-14/3$

"تمارين مقوية"

س/ جد $H=\bar{X}^t A X$ لكل مما يأتي حيث H تمثل مصفوفة من رتبة 1×1

(a) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}2&2i\\1&-i\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}1&i\\-i&1\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}2&1+2i\\1-i&1\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

س/ جد $S=\bar{X}^T A X$ حيث S تمثل مصفوفة من الرتبة 1×1 لكل مما يأتي:

(a) $A=\begin{bmatrix}i&1\\-1&2i\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}2i&3i\\3i&0\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}4i\\-5\end{bmatrix}$

س/ باستخدام قاعدة كاوس حل أنظمة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 2X_1+X_2+5X_3+X_4&=5\\ X_1+X_2-3X_3-4X_4&=-1\\ 3X_1+6X_2-2X_3+X_4&=8\\ 2X_1+2X_2+2X_3-3X_4&=2 \end{aligned}$$

الجواب: $X_1=2$, $X_2=1/5$, $X_3=0$, $X_4=4/5$

س/ جد $H=\bar{X}^T A X$ حيث $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix}a&b+2ic\\b-ic&k\end{bmatrix}$

س/ باستخدام قاعدة النظير الضربي حل أنظمة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} -2x+3y-z&=1\\ x+2y-z&=4\\ -2x-y+z&=-3 \end{aligned}$$

الحل: $x=2$, $y=3$, $z=4$

س/ باستخدام قاعدة كرمر حل أنظمة المعادلات الخطية التالية ؟

$$2x-y+2z=2$$
$$x+10y-3z=5$$
$$-x+y+z=-3$$

الحل:
$x=2$
$y=0$
$z=-1$

س/ باستخدام قاعدة كرمر حل أنظمة المعادلات الخطية التالية ؟

$$x+2y+3z=6$$
$$2x-3y+2z=14$$
$$3x+y+z=-2$$

الجواب :-
$x=1$
$y=-2$
$z=3$

س/ باستخدام قاعدة النظير الضربي حل أنظمة المعادلات الخطية التالية ؟

$$2x-4y+3z=1$$
$$x-2y+4z=3$$
$$3x-y+5z=2$$

س/ باستخدام قاعدة كاوس حل أنظمة المعادلات الخطية التالية :

$$x+y=1-z$$
$$-x+4=-y$$
$$x-4+y=2z$$

الحل:
$x=3$
$y=-1$
$z=-1$

س/ باستخدام عمليات الصف البسيطة حل أنظمة المعادلات الخطية التالية

$$2x+4y+6z=-12$$
$$2x-3y-4z=15$$
$$3x+4y+5z=-8$$

الجواب :
$x=2$
$y=-1$
$z=-3$

س/ باستخدام قاعده كاوس حل أنظمة المعادلات الخطية التالية ؟

$$k(x-a)+2x-z=0$$
$$k(y-a)+2y-z=0$$
$$k(z-a)-x-y+2z=0$$

الجواب :-
$$x=\frac{ak(k+3)}{k^2+4k+2}$$
$y=??$
$z=??$