الفصل الثالث : المصفوفات والمحددات

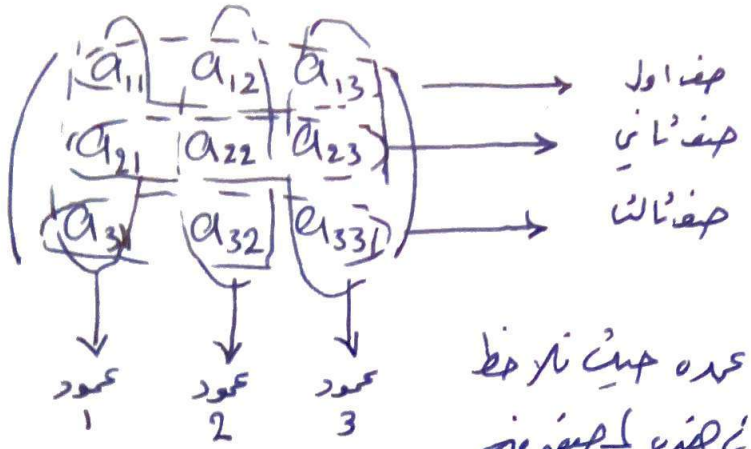
د. عقيل هاشم حسين

Chapter 3 : Matrices and Determinants

Dr. Aqeal Hashem Hussain

الفصل الثالث : المحفوظات والمحددات "Matrices and Determinants"

المحفوظات : وهي عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية أو المركبة أو من كليهما مرتبة على هيئة صفوف وأعمدة بشكل متوازي أضلاع محاطة بقوسين كما في الشكل التالي :-



هذه المحفوظة مكونة من صفوف وأعمدة حيث نلاحظ 3 صفوف و 3 أعمدة وعليه يقال أن هذه المحفوظة من الدرجة 3X3 أو من النوع 3X3 الخ ...

وتكتب بالشكل التالي للدلالة على أنها من الدرجة 3X3 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3X3}$$

3X3 ↓ ↓ عمود صف

وتسمى a_{ij} حيث $i=1,2,3$ و $j=1,2,3$ بمدخلات المحفوظة أو عناصر المحفوظة

* مثلاً لدينا المحفوظة التالية :-

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

هذه المحفوظة A من الدرجة 2X2 و حدودها على صفين وعمودين. وعناصر المحفوظة هي

$a_{11}=1$ و $a_{12}=2$

$a_{21}=3$ و $a_{22}=4$

ملاحظة / عناصر المحفوظة a_{ij} حيث $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ تسمى أيضاً بمدخلات المحفوظة أو مركبات المحفوظة .

(2)

كذلك لدينا المصفوفة التالية $B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}_{2\times1}$ وهي من الدرجة 2×1 لاحظ أنها على شكل عمود واحد وعناصر هذه المصفوفة هي $a_{11}=1$ و $a_{21}=3$ الخ...

* يرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة أحياناً مثل A أو B
* كذلك يرمز للمصفوفة بقوسين مثل $[a_{ij}]$ أو $[b_{ij}]$
* المصفوفات تكون متساوية إذا كانت متماثلة (عناصرها) المتقابلة متساوية وكانتا من نفس الدرجة / أي أن:

$$A=[a_{ij}] \text{ and } B=[b_{ij}]$$

تكون A مساوية لـ B إذا كان A و B من الدرجة $m\times n$ وكانت

$$a_{ij}=b_{ij} \text{ for } 1\le i\le m \text{ and } 1\le j\le n$$

* جمع المصفوفات: إذا كان $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ فإن حاصل جمع مصفوفتين هو مصفوفة جديدة من الدرجة $m\times n$ أيضاً

example: $$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1 & 2+3\\ 0+(-1) & 1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه يتم جمع مصفوفتين من الدرجة نفسها وذلك بجمع العناصر المتقابلة من المصفوفتين.

example: $$\begin{bmatrix}1\\-3\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

example: $$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$ ← لا يمكن جمعهما لأنهما ليستا من نفس الدرجة

* طرح المصفوفات: نفس طريقة جمع المصفوفات لكن هنا نقوم بالطرح.

ملاحظة / كل خواص المصفوفات صحيحة جداً (تحفظ).

(3) * ضرب المصفوفة بعدد : اذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة من الرتبة $m\times n$

وكان c هو عدد فان ضرب المصفوفة A بالعدد c هو

$$cA=[ca_{ij}]_{m\times n}$$

هذا يعني أن الناتج هو حاصل ضرب هذا العدد بكل عنصر من عناصر المصفوفة A والناتج هو مصفوفة جديدة من الرتبة $m\times n$.

example: If $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\-3&0&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-4&3\\-1&3&2\end{pmatrix}$

find (a) $3A$; (b) $-B$; (c) $3A-B$

Solution: (a) $3A=3\begin{pmatrix}1&2&4\\-3&0&-1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3(1)&3(2)&3(4)\\3(-3)&3(0)&3(-1)\\3(2)&3(1)&3(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&12\\-9&0&-3\\6&3&6\end{pmatrix}$

(b) $-B=-1B=-1\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-4&3\\-1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&4&-3\\1&-3&-2\end{pmatrix}$

(c) $3A-B=\begin{pmatrix}3&6&12\\-9&0&-3\\6&3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-4&3\\-1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&12\\-10&4&-6\\7&0&4\end{pmatrix}$

* ضرب المصفوفات "Matrix Multiplication"

تعريف : اذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ مصفوفتان فان حاصل ضرب هذه المصفوفتين هو المصفوفة AB ومن الرتبة $m\times p$ أي ان

$$AB=[c_{ij}]_{m\times p}$$ و

$$\text{where } c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

هذا يعني أن المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب هاتين المصفوفتين تنتجت بضرب سطر من المصفوفة الاولى مع عمود من المصفوفة الثانية بشرط أن يكون عمود الاولى مساوي لسطر الثانية.

مثال: اذا كان $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ فاوجد AB و BA ؟

الحل ← نلاحظ أن المصفوفة A من الدرجة 3X2 والمصفوفة B من الدرجة 2X2 وعليه تكون العملية كالتالي

$$A_{3\times 2} \times B_{2\times 2} \longrightarrow AB_{3\times 2}$$

(3X2 و 2X2: متجة ضرب المصفوفتين؛ المصفوفة الناتجة)

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى 2 مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية 2 وعليه يصح عملية ضرب هاتين المصفوفتين وتكون المصفوفة الناتجة من الدرجة 3X2 كما موضح

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)(-3)+(3)(-4) & (-1)(2)+(3)(1)\\ (4)(-3)+(-2)(-4) & (4)(2)+(-2)(1)\\ (5)(-3)+(0)(-4) & (5)(2)+(0)(1)\end{pmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ -4 & 6\\ -15 & 10\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

ملاحظة:

حتى نتعرف كيف تم حساب المصفوفة AB يجب أن نتعرف درجتها وهي 3X2 حسب الملاحظة أعلاه وعليه نكتب المصفوفة AB بالطريقة التالية:

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

وعليه يجب أن نجد كل عناصر المصفوفة والتي هي a_{11} ، a_{21} ، a_{31} ، a_{12} ، a_{22} وأخيراً a_{32} كالتالي:

a_{11} نقول أن هذا العنصر ينتج من حاصل ضرب الصف الأول مع العمود الأول الثانية

(عمود، صف)

كذلك فان a_{32} مثلاً ينتج من ضرب الصف الثالث للمصفوفة الأولى مع العمود الثاني للمصفوفة الثانية وهكذا.

$BA=??$ ← H.W

مثال: أوجد حاصل ضرب المصفوفتين AB حيث

$$B=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&3&4\\0&2&5\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&0&4\end{pmatrix}$$

الحل: نلاحظ أن درجة المصفوفتين $A_{2\times3}$ ، $B_{3\times3}$ إذن

2×3 ← عدد الأعمدة ← عدد الصفوف

$$\underset{2\times3}{A}\qquad \underset{3\times3}{B}$$

شرط وجود (قابلية) ضرب المصفوفتين هو أن يكون عمود المصفوفة الأولى مساوي لسطر المصفوفة الثانية. هنا كلاهما مساوي لـ 3 فلذلك يمكن ضرب هاتين المصفوفتين ويكون درجة المصفوفة الناتجة AB مساوي لسطر المصفوفة الأولى في عمود المصفوفة الثانية أي أن AB $_{2\times3}$ ولذلك فإن ضرب هاتين المصفوفتين هو:

$$AB=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&3&4\\0&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&8\\-2&7&17\end{pmatrix}_{2\times3}$$

وتم الحصول عليها بضرب الصف من الأولى في العمود من الثانية.

* لو كان لدينا A^1 و A^2 مصفوفتين مرفوعتين إلى الأس 1 و 2 على التوالي فإن ناتج حاصل ضربهما هو A^3

* خواص المصفوفات

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ قانون التجميع
2) $A+B=B+A$ قانون التبادل
3) $A+0=A$ حيث 0 مصفوفة صفرية
4) $A+(-A)=0$ "
5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ حيث λ كمية عددية
6) $1A=A$
7) $\underbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}_{r\text{ من المرات}}=A^r$ حيث r عدد صحيح موجب
8) $A^rA^s=A^{r+s}$ and $(A^r)^s=A^{rs}$ حيث r و s أعداد صحيحة موجبة

⑥ /

⑨ $A(B+C) = AB+AC$

⑩ $(A+B)C = AC+BC$

⑪ $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

⑫ $A(2B-3C) = 2AB-3AC$

ملاحظة / ضرب المصفوفات لا يخضع لخاصية التبادل أي أن AB لا تساوي BA .

⑬ $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B)+B(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$

مدوّر (منقول) المصفوفة

* ليكن $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ مصفوفة فإن مدوّر هذه المصفوفة يرمز له بالرمز A^T ويتم الحصول على هذه المصفوفة المدوّرة من المصفوفة الأولية وذلك بتبديل الصف مكان العمود كما في المثال التالي

if $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ then $A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$

خواص المدوّر (المنقول)

① $(A^T)^T = A$

② $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

③ $(A+B)^T = A^T+B^T$

④ $(AB)^T = B^TA^T$

⑦ أنواع المصفوفات Types of Matrices

هنالك عدة أنواع من المصفوفات ولكل مصفوفة من هذه المصفوفات خاصية معينة :

١) المصفوفة الصفية (Row Matrix) : وهي التي تحتوي على صف واحد وتسمى أيضاً بالمتجه الصفي مثل :

$A=(1 \quad 2 \quad 3)$

أو $A=[1 \quad 2 \quad 3]$

٢) المصفوفة العمودية (Column Matrix) : وهي التي تحتوي على عمود واحد وتسمى أيضاً بالمتجه العمودي مثل :

$$B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

٣) المصفوفة المستطيلة (Rectangular Matrix) : وهذه المصفوفة تسمى بالمستطيلة كون عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

٤) المصفوفة المربعة (Square Matrix) : عدد الصفوف m تساوي عدد الأعمدة n

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}_{3\times 3}^{m\times n}$$

٥) المصفوفة القطرية : وهي المصفوفة التي تكون عناصرها الغير قطرية صفرية للأقل مثل

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

٦) المصفوفة العددية : هي مصفوفة قطرية كل عناصرها القطرية متساوية مثل

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

٧) المصفوفة الواحدية : هي مصفوفة قطرية وكل عناصرها القطرية تساوي واحد.

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \text{ or } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(8)

(9) المصفوفة المثلثية السفلى: هي مصفوفة مربعة ($m=n$) وكل عناصرها فوق القطر الرئيسي صفرية للصفر

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&5&6\end{pmatrix}$$

(10) المصفوفة المثلثية العليا: هي مصفوفة مربعة ($m=n$) وكل عناصرها تحت القطر الرئيسي صفرية للصفر:

$$B=\begin{pmatrix}5&8&3\\0&1&2\\0&0&7\end{pmatrix}$$

(11) المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة جميع عناصرها صفرية للصفر مثل:

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(12) المصفوفة الجزئية: وهي مصفوفة تنتج من مصفوفة أولية بعد حذف جزء من المصفوفة الأولية (مثلاً حذف صف معين او عمود معين او كليهما) فمثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{مصفوفة جزئية } B=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}$$

(13) المصفوفة المتناظرة (المتماثلة): وهي المصفوفة التي تحقق الشرط ($A=A^T$)

(14) المصفوفة المتماثلة المتخالفة: وهي المصفوفة التي تحقق الشرط ($A=-A^T$)

من شرط ان تكون المصفوفات مربعة في (13) و (14) اي ($m=n$).

مثال: هل المصفوفة التالية $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}_{2\times3}$ متماثلة ام لا ؟

الحل: غير متماثلة لان ($m\neq n$) اي عدد الصفوف لا يساوي عدد الاعمدة ؟

مثال: هل المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&4&3\\2&3&5\end{pmatrix}$ متماثلة ام لا ؟ وما نوع التماثل ؟

الحل: ندور المصفوفة A (بجعل الصف عمود)

$$A^T=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&4&3\\2&3&5\end{pmatrix}$$

$\therefore A=A^T$

اذن A مصفوفة متناظرة (متماثلة)

مثال: هل المصفوفة التالية متماثلة ومتخالفة؟

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: نلاحظ أن المصفوفة A مربعة (عدد الصفوف = عدد الأعمدة) فلو وضعنا مرآة عاكسة على القطر الرئيسي لرأينا كل عنصر يتعاكس لكن بإشارة مختلفة لهذا فإن هذه المصفوفة متماثلة متخالفة (متماثلة متخالفة)

أو حسب العلاقة

$$A^{*}=-A^{T}=-\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ (متماثلة متخالفة)

④ المصفوفة العقدية (المركبة): وهي المصفوفة التي تكون احد عناصرها أو الكل عبارة عن عدد مركب مثل:

$$C=\begin{pmatrix} 1-i & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

⑤ المصفوفة المرافقة للمصفوفة العقدية: ويتم أخذ العنصر المرافق للعنصر العقدي في المصفوفة الأصلية فمثلاً في ④ تكون المصفوفة المرافقة:

$$C^{*}=\begin{pmatrix} 1+i & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

نسمي أيضاً مصفوفة مرافقة المرافق

ملاحظة: توجد هناك مصفوفة مرافقة لمصفوفة غير عقدية تختلف عن المصفوفة المرافقة للمصفوفة العقدية. (وسنوضح بالفقرة التالية).

العامل المرافق للعنصر بالمصفوفة "Conjugate factor"

* يستفاد من أيجاد العامل المرافق للعنصر بالمصفوفة هو الحصول على المصفوفة المرافقة للمصفوفة ١/ وطريقة وكما يلي :

لو أن لدينا مصفوفة مثل A بحيث أن :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

فأن المصفوفة المرافقة للمصفوفة A تكتب هكذا :

$$C(A)=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

C(A) ← المرافق Conjugate

وتقرأ هذه المصفوفة بالمصفوفة المرافقة للمصفوفة A وتحتوي على عناصر مرافقة كل عنصر هو عبارة عن العنصر المرافق α_{ij} للعنصر a_{ij} الموجود في المصفوفة الأصلية A ويعطى حسب العلاقة التالية :

تحفظ

$$\boxed{\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|} \quad \text{where } i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

$|A_{ij}|$ هو محدد المصفوفة A بعد حذف الصف i والعمود j

مثال : أوجد المصفوفة المرافقة للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

الحل : ① نجد مصفوفة المعاملات المرافقة (المصفوفة المرافقة للمصفوفة A)

$$C=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

حيث α_{11} هو العنصر المرافق للعنصر 1 في المصفوفة A

A " " 2 " " " " " α_{12}

A " " 3 " " " " " α_{21}

A " " 4 " " " " " α_{22}

(11)

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = (-1)^2 |4| = 4$$

محدد المصفوفة بعد حذف الصف الأول والعمود الأول من A

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = (-1)^3 |3| = -3$$

بعد حذف الصف 1 والعمود 2 من A

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = (-1)^3 |2| = -2$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = (-1)^4 |1| = 1$$

$$\therefore C(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

وبذلك تكون C هي المصفوفة المرافقة للمصفوفة A (وتسمى بمصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A).

مثال: للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ أوجد العامل المرافق للعنصر 5

الحل: نلاحظ أن 5 موجود بالصف الثاني العمود الأول أي يمكن أن نجد α_{21}

$$\therefore \alpha_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = (-1)^3 |-1| = (-1)^3(-1) = 1$$

إذن $\alpha_{21} = 1$ هو العامل المرافق للعنصر 5 للمصفوفة A.

محدد المصفوفة

: يمكن حساب قيمة أي محدد لمصفوفة كما بالمثال التالي

مثال: أوجد قيمة محدد المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

هذا القانون خاص بالمصفوفات من الرتبة 2X2

مثال: أوجد محدد المصفوفة التالية ؟

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

الحل: نستخدم القاعدة التالية إذا أخذنا السطر الاول فقط:

$$|A| = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$$ ← (يسمى قانون المفكوك)

حيث α_1 هو العامل المرافق للعنصر a_1

$$\alpha_1 = (-1)^{1+1}|A_{11}|$$ حيث: a_1 "

$$\alpha_2 = (-1)^{1+2}|A_{12}|$$ " : a_2 " " " " α_2

$$\alpha_3 = (-1)^{1+3}|A_{13}|$$ " : a_3 " " " " α_3

مثال: أوجد قيمة محدد المصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل: نطبق القاعدة على السطر الأول فقط من المصفوفة A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -17 - 14 + 42 = -31 + 42 = 11$$

أو طريقة Sarrus نأخذ اول عمودين لمحدد المصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-15)+(-14)+(0) - [(-42)+(2)+(0)]$$

$$= -29 + 42 - 2 = 11$$

D_2 D_1

مثال: أوجد قيمة المصفوفة التالية:

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل: نطبق قانون المفكوك على محدد هذه المصفوفة

فنختار السطر الاول:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2}(-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3}(2)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4}(0)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 17 - 22 + 0 = -4$$

النظير الضربي للمصفوفة (معكوس) المصفوفة A^{-1}

* المصفوفة المربعة A من الدرجة nXn (باعتبار m=n) تكون قابلة للانعكاس (يوجد لها معكوس) اذا حققت الشرط :

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n \quad \longrightarrow *$$

حيث A^{-1} هي معكوس المصفوفة A
I_n مصفوفة واحدية من المرتبة n

* المصفوفة التي لا يوجد لها معكوس تسمى مصفوفة مفردة
* المصفوفة الغير مربعة $(m\neq n)$ لا يوجد لها معكوس
* ليس كل المصفوفات المربعة $(m=n)$ يوجد لها معكوس.
* المصفوفة التي لها معكوس يكون هذا المعكوس وحيد لهذه المصفوفة ولا يوجد غيره

معكوس المصفوفة من الدرجة 2X2

لا يجاد معكوس المصفوفة من الدرجة 2X2 يجب

1) ان تكون هذه المصفوفة مربعة $(m=n)$ (عدد الصفوف = عدد الاعمدة)
2) محدد هذه المصفوفة يجب ان يكون له قيمة لا تساوي الصفر وعدا ذلك لا يوجد لها معكوس

مثال: أوجد معكوس المصفوفة التالية :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2X2}$$

الحل: يعطى معكوس هذه المصفوفة (النظير الضربي) بالعلاقة التالية

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad ; \quad ad-bc\neq 0$$

بشرط
a، b، c، d ثوابت

مثال : اوجد النظير الضربي للمصفوفة التالية :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل : نجد المحدد لهذه المصفوفة :

$$|A|=(-1)(1)-(2)(-1)=-1+2=1\neq 0$$

يوجد معكوس لهذه المصفوفة كون المحدد لا يساوي صفراً

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل نطبق الشرط

$A^{-1}A = I_n$

وحيث ان المصفوفة A من الدرجة الثانية فيكون $I_n = I_2$ أي

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \quad A \quad = \quad I_2$$ ✓

النظير الضربي للمصفوفة من الدرجة 3×3 أو أكبر

لإيجاد النظير الضربي لأي مصفوفة مثل A مثلاً نجد ما يلي :-

1. نجد قيمة محدد المصفوفة المراد إيجاد المعكوس لها فإذا كان صفراً فلا يوجد معكوس لهذه المصفوفة كون المصفوفة تكون منفردة .
2. نجد المعاملات المرافقة (العناصر المرافقة) المقابلة لعناصر المصفوفة A ومن ثم نجد مصفوفة المعاملات المرافقة C(A) (تم شرحها سابقاً)
3. نجد لها المصفوفة المجاورة Adj(A) بالعلاقة $\boxed{Adj(A) = C^T(A)}$ حيث $C^T(A)$ المصفوفة المدورة للمصفوفة A
4. أخيراً نجد المعكوس (النظير الضربي) للمصفوفة A بالعلاقة

$$\boxed{A^{-1} = \frac{C^T}{|A|}}$$ ← (سهلة جداً)

هذه الخطوات سنوضح بالأمثلة التالية :

مثال : أوجد النظير الضربي للمصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل : ① نجد |A| بأي طريقة نعرفها :

$$|A| = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 + 0 + 10 = 21$$

(15) ① نجد مصفوفة المعاملات المرافقة لـ A وهي أنه A $_{3\times3}$ فإن C(A) $_{3\times3}$:

$$C=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}_{3\times3}$$

ونجد المعاملات α_{ij} باستخدام العلاقة

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$$

حيث $|A_{ij}|$ و α_{ij} تم توضيحها سابقاً.

$$\alpha_{11}=(-1)^{2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-11 \quad \text{و} \quad \alpha_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=4$$

$$\alpha_{12}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-14 \quad \text{و} \quad \alpha_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$$

$$\alpha_{13}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5$$

$$\alpha_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2$$

$$\alpha_{22}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-7$$

$$\alpha_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2$$

الآن نقوم بالتعويض عن قيم α_{ij} بالمصفوفة C :

$$C(A)=\begin{pmatrix}-11 & -14 & 5\\ 2 & -7 & 1\\ 4 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

③ نقوم بتدوير مصفوفة المعاملات C وذلك بتبديل الصفوف مكان الأعمدة وبالعكس وذلك للحصول على المصفوفة المجاورة Adj(A) :

$$Adj(A)=C^{T}(A)=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 4\\ -14 & -7 & 7\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

④ وأخيراً يكون المعكوس (النظير الضربي) A^{-1} للمصفوفة A حسب العلاقة

$$A^{-1}=\frac{C^{T}}{|A|}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-11 & 2 & 4\\ -14 & -7 & 7\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/21 & 2/21 & 4/21\\ -14/21 & -7/21 & 7/21\\ 5/21 & 1/21 & 2/21\end{pmatrix}$$

وهو المطلوب

(16) ملاحظة: للتأكد من صحة الحل نقوم بضرب A^{-1} بـ A فاذا كانت النتيجة I فالحل صحيح.

$$A^{-1}\cdot A = I$$

ملاحظة: الطريقة التي تم شرحها بالمثال السابق هي طريقة عامة يمكن تطبيقها ايضاً على مصفوفة من الدرجة 2×2.

مثال: أوجد معكوس المصفوفة التالية بطريقتين؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

الحل: الطريقة الاولى (الطريقة الخاصة) نجد $|A|$

$$|A| = 2-6 = -4 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية (الطريقة العامة) نجد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} = (1)(2)-(3)(2) = -4 \neq 0 \quad \text{(يوجد حل)}$$

1) نجد $\Rightarrow C=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$

$\alpha_{11} = (-1)^2|2| = 2$

$\alpha_{12} = (-1)^3|2| = -2$

$\alpha_{21} = (-1)^3|3| = -3$

$\alpha_{22} = (-1)^4|1| = 1$

$$\therefore C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

2) نبدّر $\Rightarrow C^T = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = Adj(A)$

3) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

وللتأكد من صحة الحل نطبق $A^{-1}\cdot A = I$ فاذا كان الناتج I مصفوفة واحدية فالحل صحيح

4) للتأكد $\Rightarrow A^{-1}\cdot A = \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$ (واجب بيتي)

(17) * بالأضافة الى الطريقة الخاصة بمصفوفة ذات الدرجة 2×2 لايجاد معكوسها والطريقة العامة لأيجاد المعكوس (النظير الضربي) A^{-1} لاي مصفوفة ومن أي درجة بشرط أن لا تكون منفرده أو غير قابله للانعكاس. فهناك أيضاً طريقة أخرى لأيجاد معكوس A^{-1} لاي مصفوفة وتسمى بطريقة Gauss-Jordan للحذف

طريقة Gauss-Jordan لأيجاد المعكوس (النظير الضربي)

1. تتلخص هذه الطريقة بتحويل المصفوفة الواحدية I_n الى المصفوفة A المراد أيجاد النظير الضربي (المعكوس) لها أي بوضع المصفوفتين بالصيغة $[A\ I]$
2. نقوم بعمليات الصف البسيط (عمليات جبرية معينة) لأختزال الصف للمصفوفة A وتحويلها الى I
3. تكون نتيجة هذا التحويل الحصول على المصفوفتين بالصيغة $[I\ A^{-1}]$.
4. في حالة من غير الممكن الحصول على المصفوفتين $[I\ A^{-1}]$ عندها تكون المصفوفة A مصفوفة منفرده ولا يوجد معكوس لها.
5. نتأكد من صحة الحل بضرب المصفوفتين A و A^{-1} للحصول على المصفوفة الواحدية I كما في العلاقة: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

هذه الطريقة تتوضح لنا من خلال المثال التالي:-

مثال: أوجد النظير الضربي للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ باستخدام طريقة كاوس-كوردن للحذف.

الحل: نقوم بوضع المصفوفة A ثم نضع الى جانبها مصفوفة واحدية I_2 من الدرجة الثانية كون A من الدرجة الثانية كما يلي:-

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{bmatrix}}_{A}\ \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{I}$$

ثم نقوم بعمليات جبرية على الاسطر لتحويل A الى I

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad R_2+R_1\to R_1$$

$R_2+R_1\to R_1$ معناها تم جمع السطر 2 مع السطر 1 ووضع النتيجة بالسطر الاول.

(18)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad -4R_2+R_1 \to R_1$$

نلاحظ أنه A تحولت الى مصفوفة واحدية وأن المصفوفة الواحدية تحولت الى معكوس أي أن :

$$[A \ \ I] \xrightarrow[\text{بالعمليات الجبرية}]{\text{تحولت}} [I \ \ A^{-1}]$$

ولهذا فان

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

التأكد من صحة الحل $\Rightarrow A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

مثال : أوجد بطريقة Gauss-Jordan النظير الضربي للمصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل : نضع الترتيب التالي :

$$[A \ \ I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام عمليات الصف البسيط نحاول الحصول على الصيغة $[I \ \ A^{-1}]$ وكما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -1R_1+R_2 \to R_2$$

تم ضرب السطر الاول بـ (-1) ثم جمعناه مع السطر الثاني ووضعت النتيجة بالسطر الثاني

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 6R_1+R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad 4R_2+R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (-1)R_3 \to R_3$$

(19)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_3+R_2 \to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2+R_1 \to R_1$$

إذن المصفوفة A قابلة للانعكاس ومعكوسها A^{-1} هو:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

والتأكد من صحة النتيجة نطبق الشرط:

$$A^{-1}\cdot A = I_3 \longrightarrow \text{H.W}$$

H.W ⟸ أوجد معكوس المصفوفة السابقة بطريقة أخرى.

H.W: أثبت أن المصفوفة التالية لا يوجد لها معكوس

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

خواص المعكوس للمصفوفات

A للمصفوفة:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^k)^{-1} = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots A^{-1} = (A^{-1})^k$ (k Factors) حيث k عدد صحيح موجب
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ حيث c عدد غير صفري
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

واجب بيتي: للمصفوفة التالية $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ أوجد A^{-2}

ملحوظة للحل: نجد A^{-1} ثم نقوم بضرب المعكوس بنفسه. أو نجد A^2 ونستخرج معكوس المصفوفة الناتجة.

تمارين للحل كواجب بيتي

1) اوجد النظير الضربي للمصفوفات التالية بالطرق التالية: الحاصل والعامل ومحددة كاوسس - كوردن

(a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ (b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

(c) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ (d) $A=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$

2) أثبت أن المصفوفة B هي النظير الضربي (المعكوس) للمصفوفة A

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$

(b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3/5 & 1/5\\ -2/5 & 1/5\end{pmatrix}$

(c) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$; $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & -5 & 3\\ -4 & -8 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

3) أوجد $\bar{A}^2$ للمصفوفات التالية بطريقتين

(a) $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ (b) $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -5 & 6\end{pmatrix}$

(c) $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ (d) $A=\begin{pmatrix}6 & 0 & 4\\ -2 & 7 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

4) للمصفوفات التالية أوجد لكل مصفوفة مقلوبه $(AB)^{-1}$ ثم $(A^T)^{-1}$ ثم $(2A)^{-1}$.

(a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 6\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

(b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 5 & -3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

الفصل الثالث: المحددات "Determinants"

* المحدده من المرتبه الثانيه $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ يمكن إيجاد قيمتها كما يلي :-

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

example: ① $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (2)(-1) = 17$ ② $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(6) = 0$

* المحدد من المرتبه الثالثه

ويمكن إيجادها كما في المثال التالي :-

example: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ نعيد $\Longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-15) + (0) + (-16) - (0) - (0) - (-2) = -29$

نظرية :- تكون المتجهات $V_1 = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ ، $V_2 = a_2 i + b_2 j + c_2 k$ و $V_3 = a_3 i + b_3 j + c_3 k$ في متجهات مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا :-

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

نظرية :- تكون المتجهات الثلاثة V_1 و V_2 و V_3 في أعلاه مستقلة خطياً إذا وفقط إذا :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

* خواص المحددات "Properties of Determinants"

① إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -38 \Longleftrightarrow \boxed{|A| = |A^t|}$$

② إذا كان جميع عناصر صف أو عمود من محدده مساوية للصفر فإن قيمة المحدده تساوي صفراً :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(٣) في المحدد إذا أبدلنا صفين أو عمودين فإن إشارة المحدد تتغير (تتبدل):

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ أبدال الصف الثاني على الصف الأول

(٤) في المحدد إذا تساوى صفان أو عمودان فإن قيمة المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(٥) العامل المشترك في أي صف أو عمود يمكن إخراجه من المحدد ووضعه في الأمام:

$$\begin{vmatrix} a_1 & rb_1 & c_1 \\ a_2 & rb_2 & c_2 \\ a_3 & rb_3 & c_3 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

أو

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ra_2 & rb_2 & rc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(٦) إذا كان صف أو عمود من المحدد يتكون من عدة حدود فإن المحدد يمكن أن يكتب على شكل مجموع محددتين:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+a_4 & b_3+b_4 & c_3+c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

(٧) أن قيمة المحدد لا تتغير إذا أضفنا لأي صف أو عمود من المحدد ~~صف~~ صف آخر أو عمود آخر مضروب بعدد:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ra_1 & b_2+rb_1 & c_2+rc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

example : $A_i^{\text{صف}}$; A^j عمود

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{3A^1+A^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & (3)+(2) \\ 3 & 1 & (9)+(2) \\ -1 & -2 & (-3)+(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 11 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

⑧ أن قيمة أي محدده هي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي أذا ومفقط اذا كان العناصر فوق أو تحت القطر الرئيسي مساويه للصفر

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$$

example:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 25 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Examples: Evaluate without expanding the determinant.
(بدون فتح/فك المحدده)

①

$$\begin{vmatrix} 5 & +2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

هنا هدفنا أيجاد قيمة المحدده وذلك بجعل العناصر فوق القطر الرئيسي أو تحت القطر الرئيسي مساويه للصفر.

سنرمز للصف A_i وللعمود A^j

مثلاً الصف الاول A_1 والعمود الثالث A^3

(تم إيجاد قيمة المحدد بخطوه واحده)

الخطوه الاولى $\Rightarrow -2A_3 + A_1 \Rightarrow$ ينتج

$$\begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

②

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-4A^2+A^1} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{A^3+A^2} \begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-7A^3 + A^1 \longrightarrow \begin{vmatrix} 11 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

(تم إيجاد نفس القيمة للمحدد بثلاث خطوات)

Example: show that (without expanding) (اثبت)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$$

يعني جد قيمة المحدد بدون استخدام الطريقة العاديه باستخدام المفكوك

$$A^2+A^3 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & y+z+x \\ 1 & z & z+x+y \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{العمود الثالث}]{\text{نستخرج عامل مشترك}} (x+y+z) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

(الكاصيه رقم ٤)

٤

واجب بيتي: جد قيمة المحدد بدون استخدام الطريقة العادية (طريقة المفكوك)

$$\begin{vmatrix} c & c & c \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

ملاحظة: أستخدم $-A^1+A^3$ ثم $-A^1+A^2$ ثم أستخرج عامل مشترك $(a-x)$ ثم عامل مشترك $(b-x)$ ثم $-A^2+A^3$ ثم العامل المشترك

الحل: $(a-x)(b-x)(b-a)c$

واجب بيتي:- جد قيمة المحدد كما في المثال السابق بدون استخدام الطريقة العادية

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = ??$$

الحل: $(x+y+z)^3$

ملاحظة/ صفّر العناصر فوق القطر الرئيسي

أستخدم $(-A^2+A^3$ ثم A_3+A_2 ثم $-A^1+A^2$ ثم $A_2+A_1)$

تمارين

① بدون استخدام طريقة المفكوك جد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ بجعل العناصر فوق القطر الرئيسي صفرية

② باستخدام الطريقة في ① أثبت أن

$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ z_1+x_1 & z_2+x_2 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

③ بدون استخدام مفكوك المحدد أثبت أن

① $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = -(x-y)(y-z)(z-x)$

② $\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ cd & bc & ab \end{vmatrix}$ ⟺ where $a,b,c \neq 0$

④ جد قيمة x و y إذا كانت $x=2y$ والمحدد $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -144$

⑤ جد قيمة x : $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & x & 2 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ ⟹ $x = 1, -7$

⑥ أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & -a & b \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$

(٧) بدون استخدام المحكوك جد قيمة ؟

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = ?$$

(٨) نفس الطريقة في (٧) أثبت أن

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd$$

نطرح الصف الثاني من الأول ونضعه بالصف الأول
" " الثالث من الثاني " " الثاني
" " الرابع من الثالث " " الثالث

تمرين : اذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفتان $m \times n$

(٣) حل معادلة المصفوفة التالية $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$

(٤) $X + A = 2(X - B)$

ملاحظة / المصفوفة المتعامدة هي المصفوفة التي تحقق الشرط $AA^t = I = A^tA$

* تمرين حلول / بدون استخدام المحكوك جد قيمة المحدد ؟

$$\begin{vmatrix} c & c & c \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

$$-A^1+A^2 \longrightarrow \begin{vmatrix} c & 0 & c \\ x & a-x & b \\ x^2 & a^2-x & b^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-A^1+A^3} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x \\ x^2 & a^2-x^2 & b^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$(a-x) \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ x & 1 & b-x \\ x^2 & a+x & b^2-x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(a-x)(b-x)} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & a+x & b+x \end{vmatrix}$$

$$(a-x)(b-x) \xrightarrow{-A^2+A^3} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & a+x & b-a \end{vmatrix} = (a-x)(b-x)(b-a)c$$

* مصفوفة العددية "Scalar Matrix"

وتسمى أحياناً مصفوفة الكم وهي المصفوفة القطرية التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية

مثل:

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$ Scalar Matrix

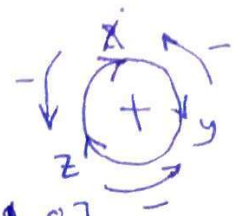
* مصفوفات باولي المغزلية "Pauli spin Matrices"

وهي:

$$S_x=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; S_y=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \; ; \; S_z=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad i=\sqrt{-1}$$

خواصها:

$$S_x S_y = i S_z$$
$$S_y S_z = i S_x$$
$$S_z S_x = i S_y$$
$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



* رتبة المصفوفة "Rank of Matrix"

* تكون المصفوفة A من الرتبة r إذا أحتوت على الأقل على مصفوفة جزئية مربعة عدد صفوفها r، بحيث أن محددة هذه المصفوفة الجزئية لا يساوي صفراً.
* تكون رتبة المصفوفة A تساوي صفراً إذا وفقط إذا كان جميع مدخلات المصفوفة A تساوي صفراً
* رتبة المصفوفة A هو أصغر العددين m و n حيث m عدد الصفوف و n عدد الأعمدة للمصفوفة A وربما يكون عدد أقل
* رتبة المصفوفة المربعة ومن الدرجة n هو $r<n$ إذا وفقط إذا كان $|A|=0$ في هذه الحالة نقول ان المصفوفة منفردة
* رتبة المصفوفة المربعة ومن الدرجة n هو $r=n$ إذا وفقط إذا كان $|A|\neq 0$ في هذه الحالة نقول أن المصفوفة غير منفردة

مثال/ جد رتبة المصفوفة A ؟

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

الحل/ يجب أن نجد أولاً محددتها فاذا كان $|A|=0$ فان $r<3$ أما اذا كان $|A|\neq 0$ فان $r=n$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ -3 & 3 & 0 & -3 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2\end{vmatrix} \Rightarrow |A|=0$$

$\therefore r<n$ أذن المصفوفة من الرتبة الثانية

حيث ان المصفوفة A أحتوت على مصفوفة جزئية مربعة غير صفرية 2 ومحددتها لا تساوي صفراً وهي $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}$.

* المصفوفة الهرميتية (مصفوفة هرمتن) Hermition Matrix

المصفوفة المربعة $A=[a_{jk}]$ والتي عناصرها مصفوفة مرافقت عقدي (مركب) تسمى بمصفوفة هرمتن بحيث أن :-

$$A^t=\bar{A} \quad ; \quad (a_{kj}=\bar{a}_{jk})$$

مع ملاحظة أن العنصر الرئيسي لمصفوفة هرمتن هو عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية فاذا كان جميع عناصر مصفوفة هرمتن حقيقية فان $A^t=A$ وهذا يعني أن مصفوفة هرمتن متماثلة وبشكل عام فان مصفوفة هرمتن حقيقية ومتماثلة والصورة العامة لمعادلة هرمتن هي :-

$$H=\bar{X}^t A X$$

مثال :- اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & 3+2i\\ 3-i & 1\end{bmatrix}$

أ) هل A مصفوفة هرمتن

ب) جد الصورة العامة لمعادلة هرمتن

الحل :- أ) اذا كان $A^t=\bar{A}$ فان المصفوفة A هي مصفوفة هرمتن

$$A^t=\begin{bmatrix}2 & 3-i\\ 3+i & 1\end{bmatrix} \; ; \; \bar{A}=\begin{bmatrix}2 & 3-i\\ 3+i & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \therefore A^t=\bar{A}$$

أذن A مصفوفة هرمتن

ب) الصورة العامة لمعادلة هرمتن A هي

$$H=\bar{X}^t A X \quad \text{---} (1)$$

نعوض عن A وعن X و $\bar{X}^t$ حيث

$$\because X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \; ; \; \bar{X}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix} \; ;$$

كذلك $\bar{X}^t=[\bar{x}_1 \;\; \bar{x}_2]$ بالتعويض في (1) $\Rightarrow$ $H=[\bar{x}_1 \;\; \bar{x}_2]\begin{pmatrix}2 & 3+2i\\ 3-i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

$$\therefore H=\begin{bmatrix} 2\bar{x}_1+(3-i)\bar{x}_2 & (3+i)\bar{x}_1+\bar{x}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$H=2\bar{x}_1x_1+(3-i)\bar{x}_2x_1+(3+i)\bar{x}_1x_2+\bar{x}_2x_2$$

$$H=2|x_1|^2+|x_2|^2+2\,Re(3+i)\bar{x}_1x_2$$

* لأي متجه مثل X فيه $H=\bar{X}^tAX$ دائماً عدد حقيقي

البرهان $H=\bar{X}^tAX \Rightarrow \bar{X}=\overline{\bar{X}^tAX}=X^t\bar{A}\bar{X}=X^tA^t\bar{X}$; $A^t=\bar{A}$ حيث

$$\therefore \bar{H}^t=(X^tA^t\bar{X})^t$$

$$=(X^t)^t(A^t)^t(\bar{X})^t$$

$$\bar{H}^t=\bar{X}^tAX$$

حيث $\bar{H}^t=H$

وهذا يؤكد أن H دائماً عدد حقيقي

* مصفوفة هيرمتي المتماثلة تخالفياً Skew-Hermitian Matrix

* المصفوفة المربعة تسمى مصفوفة هيرمتي اذا وفقط اذا كان $A^t=-\bar{A}$ حيث

$$a_{kj}=-\bar{a}_{jk}$$

* صورة هيرمتي المتماثلة تخالفياً

العدد العام لمعادلة هيرمتي المتماثلة تخالفياً هي

$$S=\bar{X}^tAX$$

حيث A هي مصفوفة هيرمتي المتماثلة تخالفياً .

نظرية :- لأي متجه مثل X فيه معادلة هيرمتي المتماثلة تخالفياً هي عدد تخيلي أو صفر

مثال :- اذا كان $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ اثبت ما يلي :-

① هل A هي مصفوفة هيرميتية من المتتالية تخالفياً ؟

② هل معادلة هيرميتية من المتتالية تخالفياً ؟

الحل :- تكون A مصفوفة هيرميتية من المتتالية تخالفياً اذا كان $A^t=-\bar{A}$

$\because A^t=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ ؛ $\bar{A}=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ؛ $-\bar{A}=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$\because A^t=-\bar{A}$ اذن A مصفوفة هيرميتية

② الصورة العامة لمعادلة هيرميتية من A هي

$S=\bar{X}^t A X$ —— ①

$A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ ؛ $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ؛ $\bar{X}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ ؛ $\bar{X}^t=[\bar{x}_1\ \bar{x}_2]$ —— ②

من ② و ① نجد أن :-

$$S=[\bar{x}_1\ \bar{x}_2]\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$S=[\bar{x}_1 i\ \ \bar{x}_2 i]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$S=\bar{x}_1 x_1 i+\bar{x}_2 x_2 i$$

$$S=(|x_1|^2+|x_2|^2)\,i$$

$\Longleftarrow$ معادلة هيرميتية من المتتالية تخالفياً

(١٤)

تمارين متنوعة

(١) جد المعكوس الضربي للمصفوفة التالية $A=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}$ الجواب $A^{-1}=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}$

(٢) " " " " " $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ الجواب $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

(٣) جد النظير الضربي (معكوس) المصفوفة التالية باستخدام طريقتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

الجواب $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{bmatrix}$

(٤) جد النظير الضربي للمصفوفة باستخدام الطريقة الثانية (الطريقة B) :

$$A=\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ 0 & b & 0\\ b & 0 & -b\end{bmatrix}$$

الجواب $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2b\\ 0 & 1/b & 0\\ 1/2 & -1/2 & -1/2b\end{bmatrix}$

(٥) باستخدام القاعدة B (الطريقة الثانية) جد A^{-1} للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

الجواب $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 0 & 2/3 & -1\\ 1 & -5/3 & 2\end{bmatrix}$

س/ حول المصفوفات التالية على صورة مصفوفات مثلثة كاملة S ثم جد RS

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 6 & 0\end{bmatrix}\ ;\ C=\begin{bmatrix}9 & 1 & 9\\ 0 & 9 & -9\\ 9 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

س/ بين فيما إذا كانت المصفوفات التالية مثلثية / قطرية / غير معرفة (الكم / عددية)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}\ ;\ C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\ ;\ D=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

س/ أثبت أن قيمة المحدد لن تتغير إذا أستبدلت الصفوف بأعمدة وبالعكس

س/ " " إشارة " ستتغير إذا استبدل صف مكان صف آخر أو عمود مكان عمود آخر

س/ أثبت أن المحدد مساوي صفر إذا كانت العناصر المتناظرة بين صفين أو عمودين متساوية

س/ جد النظير الضربي للمصفوفات التالية

(a) $A=\begin{bmatrix}\tan\theta & 1\\ -1 & \tan\theta\end{bmatrix}$ ، (b) $A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$