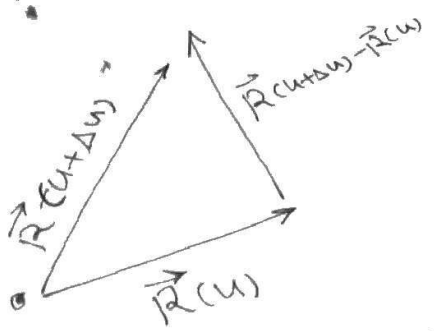
الفصل الثالث: أستقاق صيغ المجهول واستعمالها

~~الفصل الثاني: الصوتيات~~

د. عقيل هاشم حسين

أ- تفاضل المتجه "Vector Differentition"



* مشتقة المتجه العادية :

إذا كان $\vec{R}(u)$ متجه يعتمد على متغير واحد مثل u فإن :-

المشتقة $\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u+\Delta u)-\vec{R}(u)}{\Delta u}$

حيث Δu مقدار الزيادة في u . أو يمكن أن تعطى بالعلاقة :-

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{R}(u+\Delta u)-\vec{R}(u)}{\Delta u}$$

(شرط أن تكون موجودة (طابقية))

* المنحنى في الفضاء

إن المتجه الذي بدايته نقطة الأصل ونهايات مركباته في الفضاء النقطة (x,y,z) يكتب :

$$\vec{r}(u) = x(u)\,\vec{i} + y(u)\,\vec{j} + z(u)\,\vec{k}$$

إذن مشتقة $\vec{r}$ بالنسبة لـ u هي :-

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta u} = \frac{\vec{r}(u+\Delta u)-\vec{r}(u)}{\Delta u} \quad *$$

حيث أن $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta u}$ متجه بنفس اتجاه المتجه $\Delta \vec{r}$

إذا وضعنا $u = t$ وبما أن $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{dt}$ فإن

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$ (السرعة = مشتقة الإزاحة)

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k}$$ (التسارع = التعجيل / مشتقة السرعة)

* قوانين الاشتقاق (تحفظ)

1. $\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$
2. $\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}$
3. $\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$
4. $\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\vec{A}$

٢

⑤ $\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$

⑥ $\frac{d}{du}[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})] = \vec{A}\times[\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}] + \vec{A}\times[\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}] + \frac{d\vec{A}}{du}\times[\vec{B}\times\vec{C}]$

* ملحوظة: في بعض الأحيان يعبر عن المشتقة $\frac{dr}{dt}$ بالرمز $\dot{r}$ أو r'

مثال:- إذا كان $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j}$ فإن

$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -a\sin t\,\hat{i} + a\cos t\,\hat{j}$

$\hat{i}$ و $\hat{j}$ لا تشتقان لأنهما متجهان وحدة للمتجه $\vec{r}$

مثال:- جسيم يتحرك على منحنى الاقتران الذي معادلته البارامترية هي $x = e^{-t}$ و $y = 2\cos 3t$ حيث $z = 2\sin 3t$ حيث t تعني الزمن جد ⓟ السرعة والتسارع في أي زمن ⓒ جد مقياس السرعة والتسارع عندما $t=0$

الحل:- من x و y و z عند المتجه $\vec{r}$ (متجه الموقع)

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r} = e^{-t}\hat{i} + 2\cos 3t\,\hat{j} + 2\sin 3t\,\hat{k}$

السرعة $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -e^{-t}\hat{i} - 6\sin 3t\,\hat{j} + 6\cos 3t\,\hat{k}$

التسارع = التعجيل $= \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e^{-t}\hat{i} - 18\cos 3t\,\hat{j} - 18\sin 3t\,\hat{k}$

ⓟ مقياس السرعة يعني قيمة السرعة عند $t=0$

$\vec{v}\Big|_{t=0} = -e^{0}\hat{i} - 0 + 6\hat{k} = -\hat{i} + 6\hat{k}$

$|v| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$

مقياس التسارع يعني قيمة التعجيل عند $t=0$

$\vec{a}\Big)_{t=0}^{\text{عند}} = \hat{i} - 18\hat{j} - 0 = \hat{i} - 18\hat{j}$

$|a| = \sqrt{1^2 + (18)^2} = \sqrt{325}$

"Partial of The Derivative Rules" قوانين الاشتقاق الجزئي

بالرموز

$$\textcircled{1}\ \frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\vec{B}$$

$$\textcircled{2}\ \frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\times\vec{B}$$

$$\textcircled{3}\ \frac{\partial}{\partial x\partial y}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\vec{A}\cdot\vec{B})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\cdot\vec{B}\right]$$

$$= \vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x\partial y}\cdot\vec{B}$$

* معامل تفاضل المتجه ∇ : (معامل تفاضلي)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

يساوي $\vec{\nabla}$ grad

* الأنحدار أو الميلان

إذا كانت $\phi(x,y,z)$ فإن

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

* $\nabla\phi$ يسمى أنحدار الدالة ϕ والتي تعتمد على النقطة (x,y,z)

واجب بيتي : اذا كان $\phi(x,y) = e^{x+y}$ جد $\nabla\phi$ عند النقطة $(1,1)$ ؟

واجب بيتي :- أذا كان $\phi = \ln|\vec{r}|$ جد $\nabla\phi$ ؟ نحول $\vec{r}$ الى x,y,z ثم حل السؤال

* التباعد $\nabla\cdot$

:- تباعد أي متجه مثل $V(x,y,z) = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ هو

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\cdot\left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$ (الكمية النابعة عددية)

* خواص التباعد

① $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}$

أحياناً تكتب $\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A}+\operatorname{div}\vec{B}$

② $\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \nabla\phi\cdot\vec{A}+\phi(\nabla\cdot\vec{A})$

③ $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

معامل لابلاسين (ليبس لابلاسيان) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (مهم يحفظ)

مثال / أذا كان $\vec{V} = (x+3y)\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(x+az)\vec{k}$ هو حقل متجه a عندما يكون $\vec{V}$ لولبي

الحل :- المتجه يكون لولبي (لولبي) أو (ملتف) أذا كان تباعد هذا المتجه = صفر أي أذا كان

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$

لذلك أذا ذكر هذه الكلمة في السؤال نضع $(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0)$ ثم نكمل الحل

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left[(x+3y)\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(x+az)\vec{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x+3y)+\frac{\partial}{\partial y}(y-2z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+az)$$

$$= 1+1+a \overset{\text{لأن } \nabla\cdot V=0}{=} 0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

* التفاف "The Curl"

أذا كان $\vec{V}$ هو متجه قابل للالتفاف فان التفاف هذا المتجه يعبر عنه بالعلاقة $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ ويقرأ $(\operatorname{curl}\vec{V})$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}\right)$$ (يحفظ)

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$ (يحفظ)

قوانين الالتفاف

① $\nabla \times (\vec{A}+\vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$

② $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

③ $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B})$

④ $\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

⑤ $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

⑥ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

⑦ $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

تمرين :- ⓐ اذا كان $\vec{r} = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ أوجد ⓐ $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$ ⓑ $\dot{\vec{r}} \cdot \{\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}\}$

ⓒ اذا كان $\vec{A} = 5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}$ ، $\vec{B} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$ أوجد

① $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ ② $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$ ③ $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{A})$

تمرين : تتحرك نقطة بحيث أن متجهها الموضعي يعطى بالعلاقة : $r = \cos wt\,\vec{i} + \sin wt\,\vec{j}$

حيث w ثابت ⓐ أثبت ان السرعة عمودية على $\vec{r}$

ⓑ أوجد $\vec{r} \times \vec{v}$

ⓒ أثبت أن $\vec{a} = -w^2\vec{r}$

ⓓ أثبت $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

تمرين :- اذا كان $\vec{A} = x^2yz\vec{i} - 2xz^3\vec{j} + xz^2\vec{k}$ ، $\vec{B} = 2z\vec{i} + y\vec{j} - x^2\vec{k}$

أوجد $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} \times \vec{B})$ عند النقطة $(1, 0, -2)$

تمرين :- اذا كان $\vec{A} = 3xyz^3\vec{i} + 2xy^3\vec{j} - x^2yz\vec{k}$ ، $\phi = 3x^2 - yz$ أوجد :

ⓐ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ⓑ $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\phi$ ⓒ $\nabla \cdot (\phi\vec{A})$ ⓓ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi)$ عند النقطة $(1, -1, 1)$

أوجد قيمة $\nabla \cdot (r^3\vec{r})$ الجواب $6(|\vec{r}|^2)^{3/2}$

$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A})$ / $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ✱ $\vec{A} = 2xz^2\vec{i} - y^3\vec{j} + 3xz^3\vec{k}$ / $\phi = x^2yz$: إذا كان تمرين

تمرين :- إذا كان $\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r}$ أثبت أن $w = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$ ؟

✱ لتكن f و g دوال قابلة للاشتقاق فإن :

① $\nabla c = 0$ ؛ (c ثابت ومشتق الثابت = صفر)

② $\nabla cf = c\nabla f$

③ $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

④ $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

⑤ $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ ؛ $g \neq 0$

"Differentiation of vectors" * تفاضل المتجهات

لأي عدد حقيقي t / نستطيع أن نربط متجه وحيد $\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ بحيث $\vec{A}$ يسمى دالة متجه لمتغير حقيقي t ويرمز له بالرمز $\vec{A}(t)$ حيث أن $\vec{A}(t)=a_1(t)\hat{i}+a_2(t)\hat{j}+a_3(t)\hat{k}$ وأن $a_1(t)$ / $a_2(t)$ / $a_3(t)$ هي مركبات الدالة المتجه $\vec{A}(t)$ والتي هي دالة حقيقية لـ (t)

مثال $\vec{A}(t)=t^2\hat{i}+(t-1)\hat{j}+2t\hat{k}$

عند $t=0 \Rightarrow \vec{A}(0)=-\hat{j}$

$t=\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{A}=\frac{1}{4}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+\hat{k}$

$t=1 \Rightarrow \vec{A}=\hat{i}+2\hat{k}$

* اشتقاق دالة المتجه

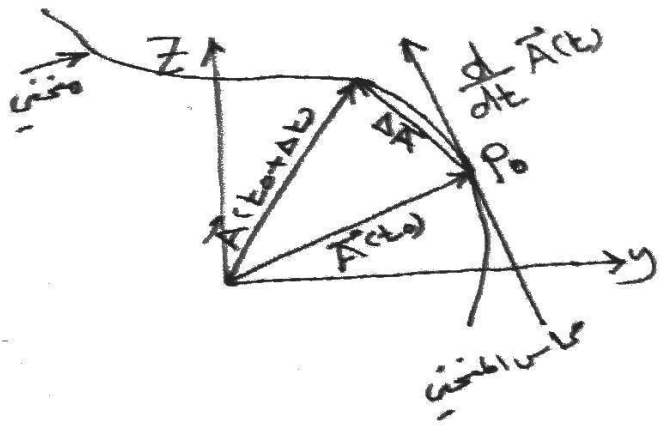
* إذا $\vec{A}(t)$ يعرّف بجوار $t=t_0$ عندئذٍ:

تسمى مشتقة $\vec{A}(t)$ عند $t=t_0$ شرط المقام $\neq 0$ أي أن $\lim_{t\to t_0}$ (موجود).

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{A}(t)-\vec{A}(t_0)}{t-t_0}$$

* إذا كان $\lim$ موجود عند أي نقطة t فأننا نرمز للمشتقة بالرمز $\vec{A}'(t)$ أو $\frac{d}{dt}\vec{A}(t)$ وكنتيجة لهذا التعريف ونوضح $\Delta t=t-t_0$ فالمشتقة عند النقطة t_0 هي :-

$$\frac{d\vec{A}(t_0)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t_0+\Delta t)-\vec{A}(t_0)}{\Delta t}$$



وكما موضح بالرسم المجاور :-

من الرسم نجد أن :- $\vec{A}(t)=\vec{A}$

$x=a_1(t)$

$y=a_2(t)$

$z=a_3(t)$

$$\vec{A}(t)=a_1(t)\hat{i}+a_2(t)\hat{j}+a_3(t)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}'(t)=\dot{\vec{A}}(t)=\frac{d}{dt}\vec{A}(t)=\frac{d}{dt}a_1(t)\hat{i}+\frac{d}{dt}a_2(t)\hat{j}+\frac{d}{dt}a_3(t)\hat{k}$$

(A)

قانون: إذا كان $\vec{A}(t)$ ، $\vec{B}(t)$ هي دوال متجهة قابلة للاشتقاق و $f(t)$ دالة عددية قابلة للاشتقاق (غير متجهة) فإن

① $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{A}(t)] = f(t)\left(\frac{d}{dt}\vec{A}(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)\vec{A}(t)$

② $\frac{d}{dt}[\vec{A}\cdot\vec{B}] = \vec{A}\cdot\frac{d}{dt}\vec{B} + \vec{B}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}$

③ $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)] = \frac{d}{dt}\vec{A}(t) + \frac{d}{dt}\vec{B}(t)$

④ $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)] = \vec{A}\times\left(\frac{d}{dt}\vec{B}\right) + \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)\times\vec{B}$

* يجب ملاحظة أن القانون ④ يجب أن يؤخذ الترتيب بنظر الاعتبار بالاشتقاق لأن الضرب الخارجي بصوره عامل لا يخضع لخاصية التبادل.

مثال: if $\vec{A}(t) = t^2\hat{i} + 2t\hat{j}$

$\vec{B}(t) = t\hat{i} + \hat{j} - t^2\hat{k}$

$f(t) = 1-t$

جد بطريقتين $\frac{d}{dt}\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)$ و $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)]$; $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)]$

كذلك $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{A}(t)]$ ؟

الحل ⟹ طريقة الاولى

ⓐ $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)] = \vec{A}(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{B}(t) + \vec{B}(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{A}(t)$

$= (t^2)(1) + (2t)(0) + (0)(-2t) + (t)(2t) + (1)(2) + (-$

$= t^2 + 2t^2 + 2 = 3t^2 + 2$

الثانية ⓑ $\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t) = (t^2\hat{i} + 2t\hat{j})\cdot(t\hat{i} + \hat{j} - t^2\hat{k}) = t^3 + 2t$

$\therefore \frac{d}{dt}[\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)] = \frac{d}{dt}(t^3+2t) = 3t^2+2$

الأولى (a) $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)] = \frac{d}{dt}\vec{A}(t) + \frac{d}{dt}\vec{B}(t) = (2t\hat{i}+2\hat{j}) + (\hat{i}-2t\hat{k})$

$= (2t+1)\hat{i} + 2\hat{j} - 2t\hat{k}$

الثانية (b) $\vec{A}(t)+\vec{B}(t) = (t^2+t)\hat{i} + (2t+1)\hat{j} - t^2\hat{k}$

$\therefore \frac{d}{dt}[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)] = (2t+1)\hat{i} + 2\hat{j} - 2t\hat{k}$

كذلك $\frac{d}{dt} f(t)\vec{A}(t) = f(t)\left[\frac{d}{dt}\vec{A}(t)\right] + \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\vec{A}(t)$

الأولى (a) $= (1-t)[2t\hat{i}+2\hat{j}] + (-1)[t^2\hat{i}+2t\hat{j}]$

$= 2t(1-t)\hat{i} + 2(1-t)\hat{j} - t^2\hat{i} - 2t\hat{j}$

$= (2t-3t^2)\hat{i} + (2-4t)\hat{j}$

الثانية (b) $f(t)\vec{A}(t) = (1-t)[t^2\hat{i}+2t\hat{j}] = t^2(1-t)\hat{i} + 2t(1-t)\hat{j}$

$= (t^2-t^3)\hat{i} + (2t-2t^2)\hat{j}$

$\therefore \frac{d}{dt}[f(t)\vec{A}(t)] = (2t-3t^2)\hat{i} + (2-4t)\hat{j}$

كذلك $\frac{d}{dt}[\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)] = \vec{A}(t)\times\frac{d}{dt}\vec{B}(t) + \frac{d}{dt}\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)$

الطريقة الأولى (a) $= [t^2\hat{i}+2t\hat{j}]\times[\hat{i}-2t\hat{k}] + [2t\hat{i}+2\hat{j}]\times[t\hat{i}+\hat{j}-t^2\hat{k}]$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & 2t & 0 \\ 1 & 0 & -2t \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ t^2 & 2t \\ 1 & 0 \end{matrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t & 2 & 0 \\ t & 1 & -t^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 2t & 2 \\ t & 1 \end{matrix}$

الناتج $= -4t^2\hat{i} - 2t\hat{k} + 2t^3\hat{j} - 2t^2\hat{i} + 2t\hat{k} - 2t\hat{k} + 2t^3\hat{j}$

$= -6t^2\hat{i} + 4t^3\hat{j} - 2t\hat{k}$

الثانية (b) نقول $\vec{A}(t)\times\vec{B}(t) = [t^2\hat{i}+2t\hat{j}]\times[t\hat{i}+\hat{j}-t^2\hat{k}]$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & 2t & 0 \\ t & 1 & -t^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ t^2 & 2t \\ t & 1 \end{matrix}$

$= -2t^3\hat{i} - t^2\hat{k} + t^4\hat{j} \Rightarrow \frac{d}{dt}[\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)] = -6t^2\hat{i} + 4t^3\hat{j} - 2t\hat{k}$

وهو المطلوب