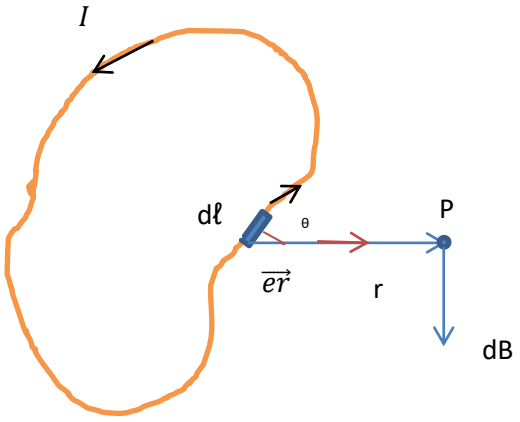
2-1 المجال المغناطيسي للتيار الكهربائي المستمر

لقد وجد اورستيد في بداية القرن التاسع عشر علاقة وثيقة بين المجال الكهربائي و المجال المغناطيسي عندما لاحظ تأثر الابرة المغناطيسية بقوة بقوة مغناطيسية عندما توضع بالقرب من سلك موصل يحمل تيار كهربائي. و كانت هذه القوة المغناطيسية دليلا على ان السلك الذي يسري خلاله تيار كهربائي يولد حوله مجال مغناطيسي . من هذه التجربة و التجارب الاخرى التي قام بها كأوس. فأراداي ، هنري و غيرهم اظهرت ان المغناطيسية ترتبط ارتباطا و ثيقا بالكهربائية وقد بينت النظريات التي وضعت من قبل ماكسويل ان هذه العلاقة حقيقية و ان المجال المغناطيسي يلازم دائما المجال الكهربائي .

2-2قانون بايوت – سافارت Biot-Savart Law:-

لدراسة المجالات المغناطيسية المتولدة من التيارات الكهربائية المستمرة.



نتصور دائرة مغلقة يمر فيها تيار كهربائي (I)

نفرض ان الدائرة مجزئة الى عناصر

تفاضلية صغيرة جدا طول كل منها =dℓ

لقد وجد ان كثافة الفيض المغناطيسيdB

المتولد عن الجزءdℓ في نقطة P

قريبة من العنصر dℓ و تبعد عنه مسافة r

تتناسب طرديا مع كل من الطول dℓ و شدة التيار I ومع جيب الزاوية θ المحصورة بين اتجاهي ($\overline{r}$،$\overline{d\ell}$) وتتناسب عكسيا مع مربع البعد(r). ولقد عبر العالمان بايوت - سافارت عن dB بالعلاقة التالية :-

$$dB\alpha \frac{Id\ell \sin\theta}{r^2}$$

$$dB=k\frac{Id\ell \sin\theta}{r^2} \ldots 1$$

حيث ان

k = كمية ثابتة ويعتمد مقدارها على نوع الوسط الفاصل بين P,dℓ

في النظام العالمي للوحدات (SI) تقاس B بوحدات wb/m^2 او tesla او $\frac{N}{A.m}$ والتيار بوحدات amp والطول m لذا فان وحدات k

N/Amp^2 ، او $\frac{wb}{A.m}$

$$K = \frac{dBr^2}{Id\ell \sin\theta} \Rightarrow K = \frac{\frac{wb}{m^2} * m}{Amp.m.m} = \frac{wb}{Amp.m}$$

$k = 10^{-7} \frac{wb}{Amp.m}$ اذا كان الوسط هواء او فراغ

و غالبا ما تستبدل k بكمية ثابتة اخرى وهي μ و العلاقة بينهما هي :

$$k = \frac{\mu}{4\pi}$$

حيث μ = النفاذية المغناطيسية للوسط *magnetic permeability*

$$\mu = \mu_\circ \mu_r$$

$\mu_\circ$ النفاذية المغناطيسية للهواء

μ_r النفاذية المغناطيسية النسبية

وقيمة μ_r=1(للهواء)

$$k = \frac{\mu_\circ}{4\pi} \dots\dots 2$$

$$dB = \frac{\mu_\circ}{4\pi} \frac{Id\ell sin\theta}{r^2} \dots\dots 3 :.$$

$$\mu_\circ = 4\pi * 10^{-7} \ N/Amp^2$$

لذلك فان مقدار dB يتوقف على نوع الوسط الذي يضم dℓ والنقطة p .

لتعيين dB تعينا كاملا مقداراً و اتجاهاً نعيد كتابة المعادلة (3) بالصيغة الاتجاهية التالية:

$$\overline{dB} = \frac{\mu_\circ}{4\pi} . \frac{I\overline{d\ell} \times \overline{er}}{r^2}$$

$\overline{er}$: هي وحدة المتجه باتجاه r $\Leftarrow$ $er = \frac{\bar{r}}{r}$

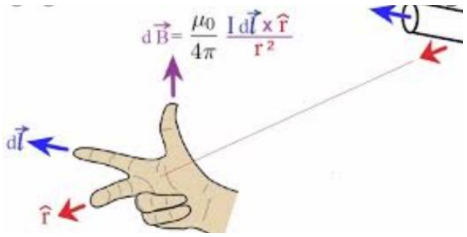
اما اتجاه dB فهو عمودي على المستوي الذي يضم dℓ ومتجه الموضع النسبي r (اي dB عمودي على كل من dℓ,r)

اذ ان اتجاه dℓ هو باتجاه التيار المار خلاله ، واتجاه r فهو من dℓ الى النقطة P

$$\overline{dB}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{I\overline{d\ell}*\overline{r}}{r^3} \dots\dots..4$$

تسمى العلاقة (3)،(4) بقانون بايوت - سافارت .ويستخدم لحساب كثافة الفيض المغناطيسي في اية نقطة قريبة من دائرة مغلقة تحمل تيارا كهربائيا

من الممكن تحديد اتجاه $\overline{dB}$باستخدام قاعدة اليد اليمنى حيث يكون اتجاه $\overline{dB}$ باتجاه ابهام اليد عند لف اصابع اليد اليمنى المتجه $\overline{d\ell}$ الى المتجه $\overline{r}$ باتجاه اصغر زاوية محصورة بينهما .



ملاحظة :- يمكن تحديد اتجاه $\overline{dB}$ ايضا باستخدام قاعدة اخرى لليد اليمنى تسمى قاعدة امبير

قاعدة قبضة اليد اليمنىتسمى (بقاعدة امبير) وُضِعت لتحديد اتجاه المجال المغناطيسي عند مرور تيار كهربائي في سلك مستقيم، حيث يتم تحديد الاتجاه بتصور القبض على السلك الذي يمر فيه التيار باليد اليمنى، وتوجيه الإبهام لاتجاه التيار الكهربائي في السلك - من القطب الموجب إلى القطب السالب - فيدل اتجاه انثناءات الأصابع الأخرى لليد نفسها على اتجاه المجال المغناطيسي المتولد . https://youtu.be/QVM4OqNIM_Y

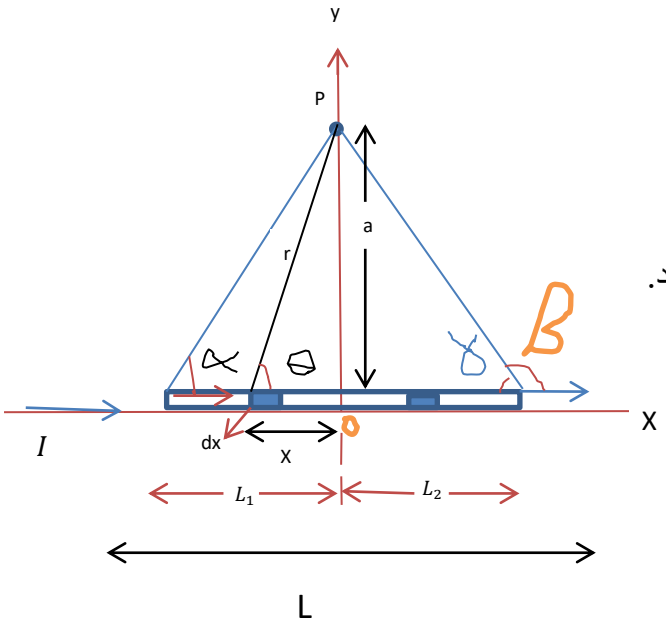
لا يجاد المجال الكلي للسك نجري عملية التكامل الاتجاهي للمعادلة رقم3

$$\boldsymbol{B=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{Id\ell}{r^2}\sin\theta \dots\dots 5}$$

2-3تطبيقات على قانونBiot-Savart Law

1- كثافة الفيض المغناطيسي لسلك موصل مستقيم :

سلك موصل مستقيم طوله L يمتد على محور X يمر فيه تيار كهربائي منتظم شدته I المطلوب ايجاد كثافة الفيض المغناطيسي في نقطة P التي تبعد بمسافة a عن السلك. ثم استنتج كثافة الفيض المغناطيسي لسلك طويل جدا



نعتبر السلك المستقيم والنقطة P يقعان في مستوى واحد.

لنفرض ان السلك يمتد على محور X وطوله

L نفرض ان السلك المستقيم مقسم الى عناصر

تفاضلية صغيرة جدا طول كل منها =dx

وتبعد بمسافة Xعن النقطة 0(0التي

تمثل مسقط P على محور X).

نأخذ احد هذه العناصر من السلك

طوله dx ويبعد بمسافة r عن p ،

الزاوية θ هي الزاوية المحصورة بين متجه dx ومتجه الموضع $\bar{r}$

من قانون بايوت - سافارت يكون الحث المغناطيسي (كثافة الفيض) لعنصر التيار Idx في النقطة p هو.

$$dB = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}sin\theta \ldots\ldots 1$$

وحسب قاعدة اليد اليمنى يكون اتجاه الحث المغناطيسي dB في النقطة p عموديا على المستوى الذي يضم كلا من الذي يضم كلا من $\bar{r}$و$\overline{dx}$لجميع اجزاء السلك . وحسب اتجاه التيار يكون اتجاه B عموديا على الصفحة و متجهه نحو القارئ.

بما ان اتجاه dB لكل اجزاء السلك يكون بنفس الاتجاه لذا نجري عملية التكامل الاتجاهي لطرفي معادلة (1) .

$$B=\int dB$$

$$B = \int \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}sin\theta$$

$$\because \tan\theta = \frac{a}{x}$$

من الشكل نجد ان $x= -a\cot\theta \rightarrow dx= +a\csc^2\theta\, d\theta$

$$B = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_\alpha^\beta \frac{I}{r^2} sin\theta dx \ldots\ldots 2$$

حيث α تمثل الزاوية θ عند دخول التيار للسلك

وتمثل β الزاوية θ عند خروج التيار من السلك.

وكذلك نجد:

$$\sin\theta = \frac{a}{r}$$

$r= a\csc\theta$

$$B= \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_\alpha^\beta \frac{a\, csc^2\theta}{a^2 csc^2\theta} sin\theta d\theta = \frac{\mu_\circ I}{4\pi a}\int_\alpha^\beta sin\theta d\theta$$

$$\therefore B= \frac{\mu_\circ I}{4\pi a}[cos\alpha - cos\beta] \ldots\ldots 3$$

و اتجاه B عموديا على المستوى الذي يضم المتجهين $\overline{dx}$ و$\overline{r}$. ويتم تحديد اتجاهة باستخدام قاعدة امبير لليد اليمنى .

ملاحظة / ɣ ⟵ الزاوية المتممة للزاويةβ

$$\cos\beta = \cos(\pi - \gamma)$$

$$\cos\beta = -\cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2+a^2}} \qquad \cos\beta = \frac{-L_2}{\sqrt{L_2^2+a^2}}$$

اما اذا كان السلك طويل جدا

عند ذلك تقترب قيمة الزاوية α من الصفر

و الزاوية β تقترب من 180

في هذه الحالة تكون كثافة الفيض المغناطيسي في p هي:

$$\therefore B = \frac{\mu_\circ I}{4\pi a}(\cos 0 - \cos\pi) \rightarrow \frac{\mu_\circ I}{4\pi a} \times 2$$

$$B= \frac{\mu_\circ I}{2\pi a}$$

وقد لوحظ عمليا ان خطوط المجالات المغناطيسية المتولدة حول سلك موصل طويل و مستقيم يحمل تيارا كهربائيا هي على شكل دوائر مركزها محور السلك وتقع في مستويات عمودية على السلك ، و تكون هذه الخطوط مسارات دائرية مغلقة تحيط بالسلك ليست لها نقطة ابتداء او نقطة انتهاء و تكون قيمة B لجميع النقاط التي تبعد بمسافات متساوية عن السلك لها نفس القيمة اما اتجاه B فهو باتجاه المماس لتلك النقطة .

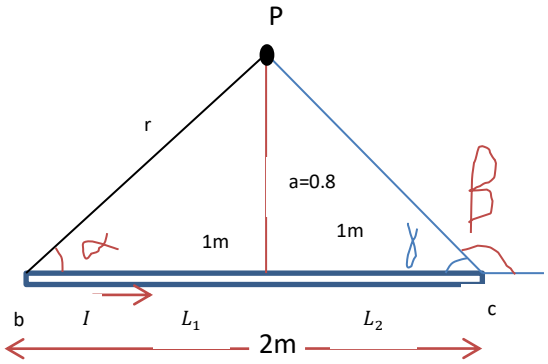
مثال:- bc سلك مستقيم طوله 2m يسري خلاله تيار كهربائي شدته 8Amp بالاتجاه من b الى c جد قيمة الحث المغناطيسي B في نقطة تبعد عن السلك مسافة 0.8m عندما تكون هذه النقطة واقعة:-

١-على العمود المنصف للسلك

٢-على العمود المقام من الطرف c

٣-على العمود المقام من نقطة على امتداد bc و تبعد عن c مسافة 50cm

الحل:-1



$r=\sqrt{(1)^2+(0.8)^2}=1.28m$

$\cos\alpha = 0.78$(H.W)

$\cos\beta = -0.78$(H.W)

$B=\frac{\mu_\circ I}{4\pi a}(cos\alpha - cos\beta)$

$\cos\beta = \cos(\pi - \gamma)$

$= -\cos\gamma$

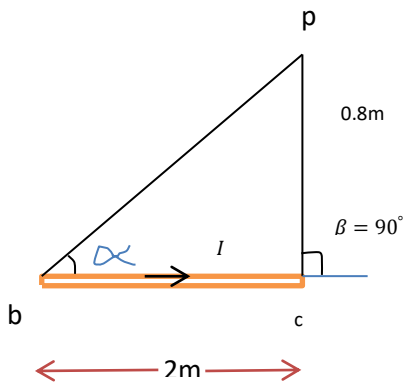
اذا كانت $L_1=L_2$ فان $\cos\beta = -\cos\alpha$

$=\frac{-L_2}{\sqrt{L_2^2+a^2}}$

$$B=\frac{4\pi*10^{-7}*8}{4\pi*0.8}\ (0.78-(-0.78))=1.56*10^{-6}\ T$$

واتجاهه عمودي على الورقة متجه نحو القارئ:-

(2

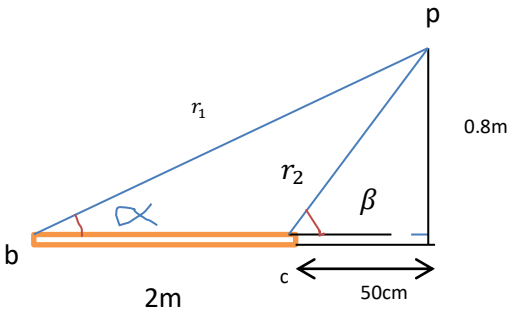


$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(0.8)^2}}=0.93$$

$$\cos\beta=\cos90^{\circ}=0$$

$$B=\frac{4\pi*10^{-7}*8}{4\pi*0.8}*(0.93-0)=0.93*10^{-6}\ T$$

B باتجاه القارئ



$$r_1=\sqrt{(2.5)^2+(0.8)^2}=2.625$$ (3

$$r_2=\sqrt{(0.8)^2+(0.5)^2}=0.95$$

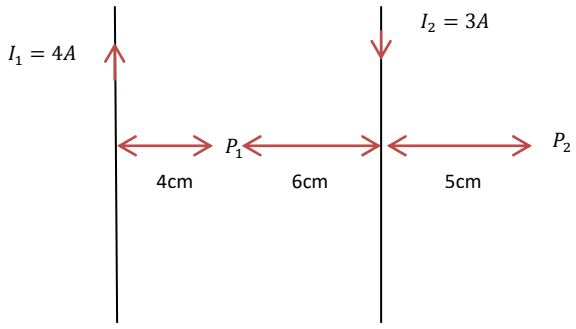
$$\cos\alpha=\frac{2.5}{2.625}=0.95\ ,\ \cos\beta=\frac{0.5}{0.95}=0.53$$

$$B=\frac{4\pi*10^{-7}*8}{4\pi*0.8}\ (0.95-0.53)=0.42*10^{-6}\ T$$

مثال:- سلكان مستقيمان متوازيان طويلان جدا ،المسافة بينهما 10cm يمر خلال الاول تيار شدته(4A) و خلال الثاني (3A) وبعكس اتجاه التيار الاول جد الحث المغناطيسي في كل من نقطتين P_1,P_2.ثم جد موقع النقطة التي تكون فيها B تساوي صفر.

الحل :- بما ان السلكين طويلان جدا فان:

في النقطة P_1



$$B=\frac{\mu_{\circ}I}{2\pi a}$$

كثافة الفيض المتولد من السلك الاول في النقطةP_1

$$B_1=\frac{4\pi*10^{-7}*4}{2\pi*0.04}=2*10^{-5}\ T$$

كثافة الفيض المتولد من السلك الثاني في النقطة P_1

$$B_2 == \frac{4\pi*10^{-7}*3}{2\pi*0.06} = 1*10^{-5}\ T$$

في نقطة P_1 يكون اتجاه كل من B_2,B_1 بنفس الاتجاه وهو عمودي على الورقة مبتعدا عن القارئ لذا فانه محصلة كثافة المغناطيسي في النقطة p_1:

$$B^{-}=B_1^{-}+B_2^{-}= 2*10^{-5}+1*10^{-5} = 3*10^{-5}$$

المحصلة اذن تؤثر بصورة عمودية على سطح الورقة مبتعدة عن القارئ

في نقطة P_2:

كثافة الفيض المتولد من السلك الاول في النقطةP_2

$$B_1=\frac{4\pi*10^{-7}*4}{2\pi*0.15} = 5.3*10^{-6}\ T$$

وتؤثر بصورة عمودية على سطح الورقة و مبتعدة عن القارئ.

كثافة الفيض المتولد من السلك الثاني في النقطة P_2

$$B_2=\frac{4\pi*10^{-7}*3}{2\pi*0.05} = 12*10^{-6}\ T$$

تؤثر بصورة عمودية على سطح الورقة و متجهه نحو القارئ

$$\overline{B} = \overline{B_1} + \overline{B_2} = -5.3*10^{-6}+12*10^{-6}=6.7*10^{-6}\ T$$

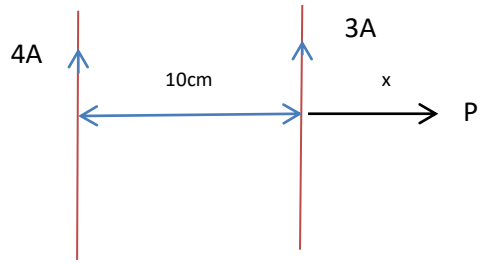
اذن المحصلة تؤثر بصورة عمودية على الورقة نحو القارئ.

جد موقع النقطة التي تكون فيها B تساوي صفر

نفرض ان النقطة واقعه في جهة السلك ضعيف المجال(الذي يمر فيه تيار اقل) وتبعد مسافة X عنه.

$$B = B_1 - B_2 = 0$$

$$B_1 = B_2$$



$$\frac{\mu_\circ I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_\circ I_2}{2\pi r_2} \rightarrow \frac{I_1}{r_1} = \frac{I_2}{r_2} \rightarrow \frac{4}{(10+x)} = \frac{3}{x}$$

$$4x = 30 + 3x \rightarrow x = 30cm$$

ملاحظة / عند اي نقطة تصبح$(B_1 = B_2 = 0)$ عندما يكون التيارين بنفس الاتجاه

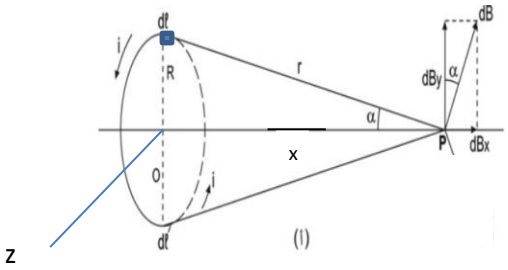
2-4 كثافة الفيض المغناطيسي لسلك دائري :-

سلك دائري نصف قطره R يمر فيه تيار كهربائي منتظم مقداره Iباتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة ، المطلوب ايجاد كثافة الفيض المغناطيسي في اي نقطة p تقع على محور الدائرة و تبعد بمسافة x عن مركز الدائرة.

استنتج كثافة الفيض المغناطيسي لملف دائري عدد لفاته N،ثم جد مقدار Bفي نقطة واقعة :

أ-في مركزه

ب- بعيدة جدا عن مركز الملف



نفرض ان السلك الدائري يقع في المستوى yz،

و النقطة p تقع على محور x و على مسافة

x من مركز الدائرة .

نتصور ان السلك مقسم الى عدد،

كبير من العناصر المتناهية في الصغر .

لنفرض طول احدهما = dℓ

يقع على محور y ويبعد بمسافة r عن p

كثافة الفيض المغناطيسي الناتجة عن عنصر التيار Idℓ هي:

$$dB=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\ \frac{Id\ell sin\theta}{r^2}$$

ويكون اتجاهdB عمودي على المستوى الذي يضم $\overline{d\ell},\overline{r}$

الزاوية θ لجميع اجزاء السلك قائمة ($\theta=90^\circ$) لذا:-

$$dB=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\ \frac{Id\ell}{r^2}$$

بما ان جميع اجزاء السلك الدائري تبعد بنفس المسافة عن النقطة p ، لذا تكون قيمة dB الناتجة عن جميع اجراء السلك متساوية ولكن تتجه باتجاهات مختلفة.

اذن لا يجاد محصلة الحث المغناطيسي في نقطة P ،نحلل المتجه dB الى مركباته العمودية و الافقية ثم نأخذ التكامل الاتجاهي لكل مركبة على انفراد.

1 - المركبة الافقية ل dB تكون باتجاه محور x ومقدارها :

$$dB_x = dB\sin\alpha$$

و المركبة العمودية ل dB تكون موازية للمستوى yz او عمودي على محور x و مقدارها :

$$dB_y = dB\cos\alpha$$

و الزاوية α متساوية لجميع اجزاء السلك الدائري.

بمان كل مركبة عمودية على محور xتساوي بالمقدار و تعاكس بالاتجاه مركبة عمودية اخرى ناتجة عن عنصر تيار اخر يقع في الجهة المقابلة لعنصر التيار الاول لذا تكون محصلة المركبات العمودية تساوي صفر.

$$B_y = \int dB\ cos\alpha = 0$$

اما المركبات الافقية لجميع اجزاء السلك الدائري تكون متوازية وتتجه باتجاه واحد لذلك تكون محصلتها

$$B_x = \int dB\sin\alpha$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{4\pi r^2}\ sin\alpha \int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\mu_\circ I}{4\pi r^2}\ sin\alpha \times 2\pi R$$

$$B_x = \frac{\mu_\circ I\ R\ sin\alpha}{2r^2}\ ,\quad r = \sqrt{R^2 + X^2}$$

من الشكل نجد ان :

$$\sin\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+X^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore B_x = \frac{\mu_\circ I\ R^2}{2\ (R^2+X^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اذن المحصلة الكلية لكثافة الفيض المغناطيسي في p هي :

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_x$$

$$\therefore B = \frac{\mu_\circ I\ R^2}{2\ (R^2+X^2)^{\frac{3}{2}}}$$ وأتجاهلها موازي لمحور الملف

نستنتج بما تقدم ان المجال المغناطيسي في جميع النقاط الواقعة على محور السلك الدائري يكون باتجاه المحور ،و لتحديد اتجاه B نستخدم قاعدة الكف اليمنى. نمسك السلك الدائري باليد اليمنى بحيث تكون لفة الاصابع باتجاه التيار فاتجاه الابهام سيكون باتجاه B (القطب الشمالي للمجال)

اذا كان لدينا ملف دائري يتآلف من N من اللفات المتماثلة وكان سمك الملف صغير جدا بالنسبة الى كل من نصف القطر R و المسافة x .لذا تكون كثافة الفيض لهذا الملف هي:

$$B = \frac{\mu_\circ I\, R^2\, N}{2\,(R^2+X^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اذا كانت النقطة p واقعة في مركز الملف (x=0) فان B في مركز السلك الدائري هي:

$$B = \frac{\mu_\circ I\, N}{2\, R}$$

اذا كانت النقطة p بعيدة جدا عن المركز (x>>R) فان B تكون:-

$$B = \frac{\mu_\circ I\, R^2\, N}{2\, X^3}$$

من الشكل نجد ان قيمة B تكون في قيمتها العظمى في مركز السلك

و تأخذ بالنقصان من الجهتين كلما ابتعدنا عن المركز و يكون النقصان منتظما

https://youtu.be/S4uNHue5aNM