Lagrangian Mechanics ميكانيك لاغرانج

7.1. الاحداثيات المعممة generalized coordinates

أن موضع الجسيم في الفضاء يمكن تعيينه تعينا كاملا بثلاث احداثيات وقد تكون هذه، ديكارتيه ، كروية ، اسطوانية ، او في الحقيقة اية ثلاثة بارامترات مختارة بصورة ملائمة .

في حالة منظومة متكونة من **N** من الجسيمات نحتاج بصورة عامـــــــة الى **3N** من الاحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد أي تعيين الوضع العام للمنظومة.

اما إذا كانت هناك قيود على حركة المنظومة، نحتاج الى عدد من الاحداثيات اقل من 3N لتعيين الشكل العام للمنظومة. فمثلا، نحتاج الى احداثيان فقط إذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستو او سطح ثابت. بينما إذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم أو منحني ثابت فعندئذ يكفي احداثي واحد.

الإحداثيات المعممة هي أي مجموعة من الإحداثيات المستقلة (غير متصلة بأي معادلات قيد) والتي تكفي فقط لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد وبشكل فريد. ويتطلب بصورة عامة أصغر عدد معين **n** لتعيين الشكل العام لمنظومة معينة وسوف ترمز لهذه الاحداثيات بالرموز($q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$) والذي قد يكون الاحداثي زاوية أو مسافة. والعدد المطلوب من الإحداثيات المعممة **n** يساوي عدد درجات الحرية للنظام.

(1) إذا اخترنا قيمة أصغر من n إحداثيات، فإن تكوين النظام (أو حركة النظام) يكون غير محدد.

(2) إذا اخترنا إحداثيات أكبر من n، فيجب أن تكون بعض الإحداثيات قابلة للتحديد من الإحداثيات الأخرى من خلال شروط القيد.

هولو نومك Holonomic

إذا كان بالإضافة الى تعيين شكل المنظومة العام، بإمكان اي احداثي أن يتغير بصورة مستقلة عن الاحداثيات الأخرى فعندئذ يقال عن المنظومة بانها هولو نومك holonomic وفي هذه الحالة يساوى عدد الاحداثيات **n** عدد درجات الحرية للمنظومة degrees of freedom

و في منظومة ليست هولونومك، لا تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة عن بعضها البعض، أى أن عدد درجات الحرية تكون اقل من عدد الاحداثيات الاصغر اللازم لتعيين الشكل.

وفي بحثنا الحالي، سوف تعتبر فقط منظومات الهولونومك. اذا كانت المنظومة متكونة من جسم واحد، فيمكن كتابة الاحداثيات الديكارتية كدوال للإحداثيات المعممة على النحو التالي:

درجة حرية واحدة - الحركة على منحني

$$x = x(q,t)$$

درجتا حرية - الحركة على سطح

$$x = x(q_1, q_2, t)$$

$$y = y(q_1, q_2, t)$$

ثلاث درجات حرية. الحركة في الفضاء

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3, t)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3, t)$$

افترض أن إحداثيات q تتغير من القيم الأولية **($q_1, q_2, \ldots, q_n$)**إلى القيم المجاورة **($\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$)** فالتغييرات المقابلة في الإحداثيات الديكارتية هي كما يلي:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots$$

ولنظام يتكون من عدد كبير من الجسيمات لها **n** من درجات الحرية ، إذن يمكن وصف حركة الجسيم i

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial k}\delta q_k$$

الرمز ***i*** يشير الى المحاور الديكارتية والحرف **k** يشير الى الاحداثيات المعممة . اذن لمنظومة تتكون من N من الجسيمات 1 ستأخذ القيم من 1 الى .N3

مثال : ان المحاور المعممة لحركة جسيم في مستو هي الاحداثيات القطبية

$$q_1 = r \qquad\qquad q_2 = \theta$$

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta$$

$$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \cos\theta \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) = -r\sin\theta \qquad for\ x$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) = \sin\theta \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) = r\cos\theta \qquad for\ y$$

$$\therefore \quad \delta x = \cos\theta\,\delta r - r\sin\theta\,\delta\theta$$

$$\therefore \quad \delta y = \sin\theta\,\delta r + r\cos\theta\,\delta\theta$$

ويمكن إيجاد السرعة:

$$\dot{x} = \sum_{i}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta}$$

$$\therefore \quad \dot{x} = \cos\theta\,\dot{r} - r\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \sum_{i}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta}$$

$$\therefore \quad \dot{y} = \sin\theta\,\dot{r} + r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

يمكننا الحصول على تحويلات السرعة ببساطة عن طريق اشتقاق تحويلات الإحداثيات ول n من درجات الحرية:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\dot{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\dot{z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

معادلة لاكرانج LaGrange Equation

بما ان $x_i = x(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t)$,

$$\therefore \dot{x}_\iota = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

المعادلة $\dot{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k$ هي تعبير عن قاعدة السلسلة للدوال متعددة المتغيرات Multivariable Chain Rule .

التي تنص على أن معدل التغير الكلي للمتغير x، الذي يعتمد على عدة متغيرات أخرى (q_1، q_2، ...، q_n)، حيث ان **q_n=q_n(t)** يحسب بجمع المشتقات الجزئية لـ x بالنسبة لكل متغير q_k، مضروبًا في معدل التغير الزمني لكل متغير q_k.

ببساطة، هذه هي طريقة إيجاد السرعة الكلية لـ x عندما تتحرك جميع مكوناته.

$$dx/dt=(\partial x/\partial q_1)(dq_1/dt)+(\partial x/\partial q_2)(dq_2/dt)+\dots+(\partial x/\partial q_n)(dq_n/dt)+ \partial x/\partial td$$

باشتقاق المعادلة أعلاه ل $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}$

$$\therefore \frac{\partial \dot{x}_\iota}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (1)$$

بضرب معادلة (1) في $\dot{x}_\iota$ ونجري عملية التفاضل بالنسبة للزمن

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \ddot{x}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\dot{x}_i^{\,2}}{2}\right)\right) = \ddot{x}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^{\,2}}{2}\right) \qquad (2)$$

نضرب المعادلة في m فان المعادلة (2) تصبح:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(m\frac{\dot{x}_i^{\,2}}{2}\right)\right) = m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(m\frac{\dot{x}_i^{\,2}}{2}\right) \qquad (3)$$

$$F_i = m_i\ddot{x}_i \;,\; T = m\frac{\dot{x}_i^{\,2}}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_i F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (4)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (5)$$

$$Q_k = \sum_i F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (6)$$ القوة المعممة

في حالة اذا كانت القوة محافظة فان

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$Q_k = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (7)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial T}{q} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (8)$$

وبتعريف دالة لاكرانج =L

L=T-V (9)

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (L+V)}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (11)$$

في حالة ان بعض القوى تكون غير محفوظة مثل $\acute{Q}$ فان معادلة لاكرانج تصبح:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \acute{Q} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (12)$$

مثال: قذف جسم كتلته m في مجال محافظ بحيث ان الطاقة الحركية له هي $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ والطاقة الكامنة له هي V=mgy جد معادلة الحركة له باستخدام معادلات لاكرانج.

$$\boldsymbol{q_1 = x\,,\ q_2 = y}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

$$\therefore L = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + y^2) - mgy$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + y^2) - mgy\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + y^2) - mgy\right) = m\ddot{x}$$

اذا معادلة لاكرانج ل x هي

$$m\ddot{x} - 0 = 0 \gg m\ddot{x} = 0 \gg \ddot{x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + y^2) - mgy\right) = -mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + y^2) - mgy\right) = m\ddot{y}$$

اذا معادلة لاكرانج ل y هي

$$m\ddot{y} + mg = 0$$

مثال: اكتب معادلة الحركة لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية باستخدام معادلة لاكرانج؟

الحل: الجسم الذي يتحرك بتأثير قوة مركزية تكون حركته بمستوي ذو بعدين توصف بدلالة الاحداثيات القطبية. أي ان $q_1 = r\,,\ q_2 = \theta$ وهذا يعني ان معادلة لاكرانج تقسم الى معادلتين هما:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial r_k}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial \theta_k}$$

$$\therefore v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

https://youtu.be/6_lYQAqa-oE