

ميكانيك لاغرانج Lagrangian Mechanics

7.1. الاحاديث المعممة generalized coordinates

أن موضع الجسيم في الفضاء يمكن تعبينه تماماً كاملاً بثلاث احداثيات وقد تكون هذه، ديكارتية ، كروية ، اسطوانية ، او في الحقيقة ايّة ثلاثة بارامترات مختارة بصورة ملائمة .

في حالة منظومة متكونة من N من الجسيمات تحتاج بصورة عامة الى $3N$ من الاحاديث لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد أي تعين الوضع العام للمنظومة.

اما إذا كانت هناك قيود على حركة المنظومة، تحتاج الى عدد من الاحاديث اقل من $3N$ لتعيين الشكل العام للمنظومة. فمثلاً، تحتاج الى احداثيان فقط إذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستوى او سطح ثابت. بينما إذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم او منحني ثابت فعنده يكفي احداثي واحد.

الاحاديث المعممة هي أي مجموعة من الإحداثيات المستقلة (غير متصلة بأي معادلات قيد) والتي تكفي فقط لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد وبشكل فريد. ويطلب بصورة عامة أصغر عدد معين n لتعيين الشكل العام لمنظومة معينة وسوف ترمز لهذه الاحاديث بالرموز (q_1, q_2, \dots, q_n) والذي قد يكون الاحداثي زاوية او مسافة. والعدد المطلوب من الاحاديث المعممة n يساوي عدد درجات الحرية للنظام.

(1) إذا اخترنا قيمة أصغر من n إحداثيات، فإن تكوين النظام (أو حركة النظام) يكون غير محدد.

(2) إذا اخترنا إحداثيات أكبر من n ، فيجب أن تكون بعض الإحداثيات قابلة للتحديد من الإحداثيات الأخرى من خلال شروط القيد.

هولو نومك Holonomic

إذا كان بالإضافة إلى تعين شكل المنظومة العام، بإمكان اي احداثي أن يتغير بصورة مستقلة عن الاحاديث الأخرى فعنده يقال عن المنظومة بأنها هولو نومك holonomic وفي هذه الحالة يساوى عدد الاحاديث n عدد درجات الحرية للمنظومة degrees of freedom

و في منظومة ليست هولونومك، لا تتغير جميع الاحاديث بصورة مستقلة عن بعضها البعض، أي أن عدد درجات الحرية تكون اقل من عدد الاحاديث الأصغر اللازم لتعيين الشكل.

وفي بحثنا الحالي، سوف تعتبر فقط منظومات الهولونومك. اذا كانت المنظومة متكونة من جسم واحد، فيمكن كتابة الاحاديث الديكارتية كدوال للإحداثيات المعممة على النحو التالي:

$$x = \\ x(q, t)$$

درجة حرية واحدة - الحركة على منحني

$$x = x(q_1, q_2, t)$$

درجة حرية - الحركة على سطح

$$y = y(q_1, q_2, t)$$

ثلاث درجات حرية. الحركة في الفضاء

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3, t)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3, t)$$

افرض أن إحداثيات q تتغير من القيم الأولية (q_1, q_2, \dots, q_n) إلى القيم المجاورة $(\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n)$ فال滂غيارات المقابلة في الإحداثيات الديكارتية هي كما يلي:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

ولنظام يتكون من عدد كبير من الجسيمات لها n من درجات الحرية ، إذن يمكن وصف حركة الجسم i

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k$$

الرمز i يشير إلى المحاور الديكارتية والحرف k يشير إلى الإحداثيات المعممة . اذن لمنظومة تتكون من N من الجسيمات 1 ستأخذ القيم من 1 إلى N .

مثال : ان المحاور المعممة لحركة جسم في مستوى هي الإحداثيات القطبية

$$q_1 = r$$

$$q_2 = \theta$$

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta) = \cos \theta \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) = -r \sin \theta \quad \text{for } x$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta) = \sin \theta \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta) = r \cos \theta \quad \text{for } y$$

$$\therefore \delta x = \cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta$$

$$\therefore \delta y = \sin \theta \delta r + r \cos \theta \delta \theta$$

ويمكن إيجاد السرعة:

$$\dot{x} = \sum_i^n \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

$$\therefore \dot{x} = \cos \theta \dot{r} - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \sum_i^n \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

$$\therefore \dot{y} = \sin \theta \dot{r} + r \cos \theta \dot{\theta}$$

يمكنا الحصول على تحويلات السرعة ببساطة عن طريق اشتقاق تحويلات الإحداثيات ول n من درجات الحرية:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\dot{y} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\dot{z} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

معادلة لاكرانج LaGrange Equation

بما ان $x_i = x(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t)$,

$$\therefore \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

باشتراك المعادلة أعلاه ل $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}$

$$\therefore \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (1)$$

بضرب معادلة (1) في \dot{x}_i ونجري عملية التفاضل بالنسبة للزمن

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \quad (2)$$

نضرب المعادلة في m فان المعادلة (2) تصبح:

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(m \frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \right) = m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(m \frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \quad (3)$$

$$F_i = m_i \ddot{x}_i, \quad T = m \frac{\dot{x}_i^2}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (4)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (5)$$

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (6) \quad \text{القوة المعممة}$$

في حالة اذا كانت القوة محافظة فان

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$Q_k = \sum_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (7)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (8)$$

وبتعريف دالة لاكرانج $L = T - V$

$$L = T - V \quad (9)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (11)$$

في حالة ان بعض القوى تكون غير محفوظة مثل \dot{Q} فان معادلة لاكرانج تصبح:

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{Q} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (12)$$

مثال: اكتب معادلة الحركة لجسم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية باستخدام معادلة لاكرانج؟

الحل: الجسم الذي يتحرك بتأثير قوة مركزية تكون حركته بمساري ذو بعدين توصف بدلالة الاحداثيات القطبية. أي ان

وهذا يعني ان معادلة لاكرانج تقسم الى معادلتين هما: $q_1 = r, q_2 = \theta$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial r_k}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial \theta_k}$$

$$\therefore v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$