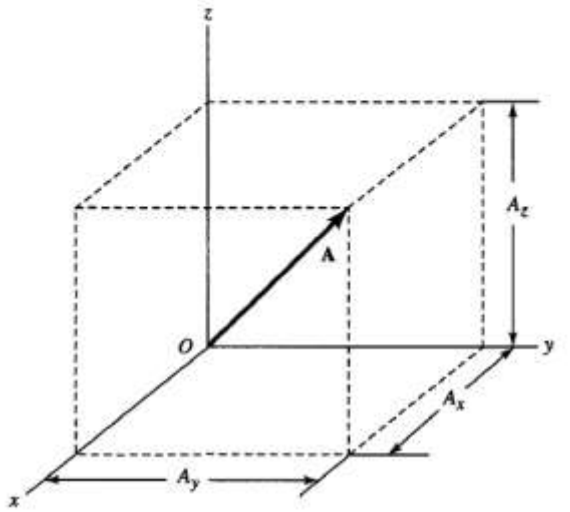
1.1. تغيير نظام الإحداثيات و مصفوفة التحويل (التدوير).

Change of Coordinate System: The Transformation Matrix

نظام الإحداثيات الكارتيزية.

يمكن تعيين اي متجه بصورة كاملة بذكر مقداره واتجاهه بالنسبة الى محاور يتفق عليها كمرجع وكما في الشكل



الشكل: المتجه A ومركباته في الإحداثيات الديكارتيزية.

أن مساقط المتجه A على محاور x,y,z هي A_x , A_y , A_z على التوالي والتي تسمى بمركبات المتجه A التي تستخدم في تمثيل المتجه بالعلاقة التالية:

$$\vec{A} = \boldsymbol{i}\, A_x + \boldsymbol{j} A_y + \boldsymbol{k}\, A_z \qquad \textbf{(1.1)}$$

يعني أنه يمكن استخدام الرمز A أو مجموعة المركبات الثلاثة $\mathbf{A_x , A_y , A_z}$ المشار إليها بنظام إحداثيات معين لتحديد المتجه.

اذا تم تدوير هذه المحاور وكما نلاحظ بالشكل حول محور بزاوية مقدارها **φ** حيث يصبح المتجه **A** بدلالة المحاور الجديدة ´A ومركباته الثلاث تصبح ($\mathbf{A'_x, A'_y, A'_z}$) التي تستخدم في تمثيل المتجه بالعلاقة التالية:

$$\vec{A} = \boldsymbol{i'} A'_x + \boldsymbol{j'} A'_y + \boldsymbol{k'} A'_z \qquad \textbf{(1.2)}$$

من العلاقتين أعلاه نحصل على معادلات التحويل (التدوير) بين نظامي الاحداثيات باستخدام خاصية الضرب العددي وكما يلي:

$$A'_x = \vec{A}\,.\; i' = (i\,.i')A_x + (j\,.i')A_y + (k\,.i')A_z$$

$$A'_y = \vec{A}\,.j'. = (i\,.j')A_x + (j\,.j')A_y + (k\,.j')A_z \qquad (1.3)$$

$$A'_z = \vec{A}.\; k' = (i\,.k')A_x + (j\,.\; k')A_y + (k\,.\; k')A_z$$

ويمكن كتابة المعادلات اعلاه بدلالة متجه الوحدة i, j, k كالاتي:

$$\begin{bmatrix} A_x^{/} \\ A_y^{/} \\ A_z^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i.i' & j.i' & k.i' \\ i.j' & j.j' & k.j' \\ i.k' & j.k' & k.k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

تسمى المصفوفة اعلاه بمصفوفة التحويل والتي يمكن صياغتها بدلالة الزوايا بين المحاور قبل وبعد التدور كالاتي:

$$\begin{bmatrix} A_x^{/} \\ A_y^{/} \\ A_z^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi_{i.i'} & cos\varphi_{j.i'} & cos\varphi_{k.i'} \\ cos\varphi_{i.j'} & cos\varphi_{j.j'} & cos\varphi_{k.j'} \\ cos\varphi_{i.k'} & cos\varphi_{j.k'} & cos\varphi_{k.k'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.5)$$

حيث يمكن ان نحصل على المعادلات التي تستخدم لحساب قيمة كل احداثي بعد التدوير:

$$\begin{aligned} A_x' &= A_x cos\varphi_{i.i'} + A_y cos\varphi_{j.i'} + A_z cos\varphi_{k.i'} \\ A_y' &= A_x cos\varphi_{i.j'} + A_y cos\varphi_{j.j'} + A_z cos\varphi_{k.j'} \\ A_z' &= A_x cos\varphi_{i.k'} + A_y cos\varphi_{j.k'} + A_z cos\varphi_{k.k'} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

في حالة خاصة عند تدوير المحاور حول محور z وبزاوية φ فانه يمكن إيجاد مصفوفة التحويل باتباع مايلي:

$$i.i' = |i|.|i'|\, cos\varphi = cos\varphi$$

$$j.i' = |j|.|i'|\, cos\varphi = cos(90-\varphi) = sin\varphi$$

$$j.j' = |j|.|j'|\, cos\varphi = cos\varphi$$

$$i.j' = |i|.|j'|\, cos\varphi = cos(90+\varphi) = -sin\varphi$$

$$k.k^{/} = |k|.|k|\, cos\varphi = 1$$

$$k.i' = k.\,j' = i.k' = j.k' = 0$$

وهكذا، بشكل عام، لدينا في حالة ثلاثة أبعاد فان مصفوفة التحويل تدوير المحاور حول محور **z** تصبح:

$$\begin{bmatrix} A_x^{/} \\ A_y^{/} \\ A_z^{/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

اما اذا تم تدوير المحاور حول محور X فان مصفوفة التحويل تصبح تساوي:

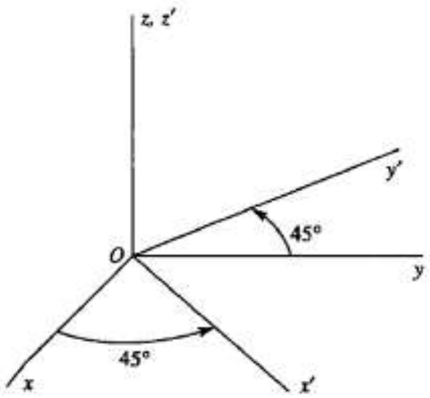
$$\begin{bmatrix} A_x^/ \\ A_y^/ \\ A_z^/ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \\ 0 & -sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

اما اذا تم تدوير المحاور حول محور y فان مصفوفة التحويل تصبح تساوي:

$$\begin{bmatrix} A_x^/ \\ A_y^/ \\ A_z^/ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

مثال: مثل المتجه $A = 3i + 2j + k$ بدلالة متجهات الوحدة 'i'j'k، افرض ان المحورين x'y قد دارا بزاوية 45^o حول المحور z وكما في الشكل

الحل: من الشكل نلاحظ ان المحوران z و 'z متطابقان وان معاملات التحويل تكون ككالاتي:



$A_x^/ = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi = 3 * \cos 45 + 2 * \sin 45$

$A_x^/ = 2.121 + 1.414 = 3.535$

$A_y^/ = - A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi = - 3 * \sin 45 + 2 * \cos 45$

$A_y^/ = - 3 * 0.707 + 2 * 0.707 = - 2.121 + 1.414 = - 0.707$

$A_z^/ = 1$

وبذلك يمكن كتابة $A^/$ كالاتي

$A^/ = 3.535\, i^/ - 0.707\, j^/ + k^/$

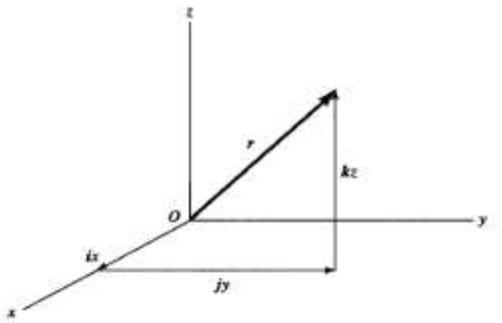
ومن ثم ، فإن مصفوفة التحويل تصبح:

$$\begin{bmatrix} A_x^/ \\ A_y^/ \\ A_z^/ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.2. متجهات الموضع و السرعة و التعجيل:

1.2.1 نظام الإحداثيات الكارتيزية.Cartesian coordinates

أن أهم الحركات الشائعة في الطبيعة، كدوران القمر حول الأرض أو الكواكب حول الشمس، تتم باكثر من بعد واحد اي لوصف حركة جسم (الازاحة، السرعة والتعجيل) نحتاج الى ثلاثة ابعادد هما x,y,z .



نفرض ان جسم تحرك من نقطة الاصل عند زمن t الى نقطة تبعد عن نقطة الاصل بمتجه الموضع $\vec{r}$. يمكن تحديد متجه الموضع لجسيم في المحاور الكارتيزية باستخدام متجهات الوحدة وحسب العلاقة التالية:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{ix} + \boldsymbol{jy} + \boldsymbol{kz} \qquad \textbf{(1.10)}$$

حيث ان x,y,z يمثلان ازاحة الجسم عند النقطة عن المحور x,y,z على التوالي. وهي دوال للزمن ،

$$x= x(t) \;, \quad y= y(t) \quad , \quad z= z(t)$$

عامة يمكن ايجاد قيمة r كالاتي:

$$\boldsymbol{r} = |\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2} + \boldsymbol{z^2}} \qquad \textbf{(1.11)}$$

ان مشتقة r بالنسبة إلى t تسمى السرعة وهي كمية اتجاهية لها نفس اتجاه r والتي يمكن وصفها باستخدام مركبات متجه الموضع. فان التغير بالموضع سوف يساوي

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}} \qquad \textbf{(1.12)}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i\dot{x}} + \boldsymbol{j\dot{y}} + \boldsymbol{k\dot{z}} \qquad \textbf{(1.13)}$$

حيث تشير النقاط إلى المشتقة لمركبات r للزمن t.

$$\textbf{(1.20)}\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{iv_x} + \boldsymbol{jv_y} + \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{v_z}$$

حيث ان v_x, v_y, v_z هما مركبات السرعة باتجاه x,y,z.

ويمكن حساب مقدار السرعة :

$$|v| = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v_z^2} \qquad (1.14)$$

ان التعجيل هو التغير في السرعة v لوحدة الزمن t وهو كمية اتجاهية لها نفس اتجاه v ويساوي:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d2r}{dt^2} \qquad (1.15)$$

$$\vec{a} = i\frac{dv_x}{dt} + j\frac{dv_y}{dt} + k\frac{dv_z}{dt} \qquad (1.16)$$

$$a = i\ddot{x} + j\ddot{y} + k\ddot{z} = i\frac{d2x}{dt^2} + j\frac{d2y}{dt^2} + k\frac{d2z}{dt^2} \qquad (1.17)$$

مثال : يوصف متجه موضع الجسم حسب المعادلة التالية: $r(t) = i\ bt + j\ (ct - \frac{gt^2}{2})$

جد سرع وتعجيل الجسم؟

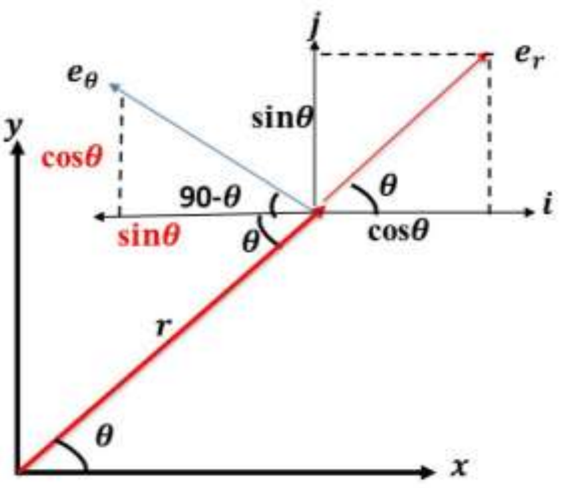
الحل : ان السرعة تساوي

$$v = \frac{dr}{dt} = ib + j(c - gt)$$

اما التعجيل فيساوي

$$a = \frac{dv}{dt} = -jg$$

1.2.2. نظام الإحداثيات القطبية Polar Coordinates



غالبًا ما يكون من الملائم استخدام الإحداثيات القطبية r، θ للتعبير عن موضع الجسيم المتحرك في المستوى. بشكل متجهي ، يمكن كتابة موضع الجسيم على أنه حاصل ضرب المسافة r بواسطة وحدة متجه القطري e_r:

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r \qquad (1.18)$$

حيث يسمى e_r بوحدة متجه الموضع القطري

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.19)$$

ومتجه زاوي θ بواسطة وحدة المتجه الزاوي e_θ والذي يكون اتجاهه عموديًا على e_r.:

$$\vec{\theta} = \theta\,\hat{e}_\theta \qquad (1.20)$$

حيث يسمى e_θ بمتجه الموضع الزاوي

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1.21)$$

من الشكل نلاحظ ان العلاقة بين متجهات الوحدة e_r , e_θ و i , j يمكن ان تكتب كلاتي:

$$e_r = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta \qquad (1.22)$$

$$e_\theta = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta \qquad (1.23)$$

يمكن كتابة المعادلتان أعلاه على شكل مصفوفة التحويل من المحاور الكارتيزية الى المحاور القطبية:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{bmatrix} \qquad (1.23)$$

اذا تعويض معادلة (1.22) في معادلة (1.18) سوف نحصل على

$$\vec{r} = r\ \hat{\imath}\ cos\theta + r\ \hat{\jmath}\ sin\theta \qquad (1.24)$$

$$\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y \qquad (1.25)$$

عندما يتحرك الجسيم ، يتغير كل من r و e_r ؛ وبالتالي ، فهما يتغيران مع الزمن. ومن ثم ، إذا اشتقنا r في المعادلة (1.25) بالنسبة إلى t لنحصل على السرعة v :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\ e_r + r\ \frac{de_r}{dt} \qquad (1.26)$$

باشتقاق معادلة (1.22) نحصل على:

$$\frac{de_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{\imath}cos\theta + \hat{\jmath}sin\theta)$$

$$\frac{de_r}{dt} = -\dot{\theta}\ \hat{\imath}\ sin\theta + \dot{\theta}\ \hat{\jmath}\ cos\theta$$

$$\frac{de_r}{dt} = \dot{\theta}\ (-\hat{\imath}\ sin\theta + \hat{\jmath}\ cos\theta) \qquad (1.27)$$

اذا من معالة (1.27) ومعادلة (1.23) نحصل على

$$\frac{de_r}{dt} = \hat{e}_\theta\dot{\theta} \qquad (1.28)$$

اذا السرعة في المعادلة (1.26) تصبح

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (1.29)$$

وبالتالي، فإن $\dot{r}$ هو المركب القطري لمتجه السرعة، و $r\dot{\theta}$ هو المركب المستعرض.

لإيجاد متجه التعجيل، نأخذ مشتقة السرعة بالنسبة إلى الزمن لنحصل عل مايلي:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \qquad (1.30)$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{\imath}cos\theta - \dot{\theta}\ \hat{\jmath}\ sin\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\hat{\imath}cos\theta + \ \hat{\jmath}\ sin\theta) = \hat{e}_r\dot{\theta} \qquad (1.31)$$

بتعويض معادلة (1.28) و (1.31) في معادلة (1.30) نحصل على

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \qquad (1.31)$$

وبالتالي ، فإن المركبة القطرية لمتجه التعجيل هي

$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \qquad (1.32)$$

والمركبة المستعرضة(الزاوية) لمتجه التعجيل هي

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad (1.33)$$

مثال: يتحرك جسيم على مسار حلزوني بحيث ان ازاحتة القطرية r تساوي ، r = b - Ct ، بينما تزداد السرعة الزاوية بمعدل ثابت $\dot{\theta} = kt$، أوجد السرعة كدالة من الزمن.

الحل: من معادلة (1.29) نجد $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

حيث ان $\dot{r} = \frac{d}{dt}(b - Ct) = -C$

$$\vec{v} = -C\ \hat{e}_r + (b - Ct)\ kt\ \hat{e}_\theta$$

$$v = \sqrt{C^2 + (b-c)^2k^2t^2}$$

مثال: يتحرك جسيم على مسار حلزوني بحيث ان موضعه بالاحداثيا القطبية تساوي: $r = bt^2$، $\theta = ct$ ، حيث b وc هي ثوابت. أوجد السرعة والتعجيل للجسيم.

الحل: $\dot{r} = 2bt$, $\ddot{r} = 2b$, $\dot{\theta} = c$, $\ddot{\theta} = 0$

من معادلة (1.33) :

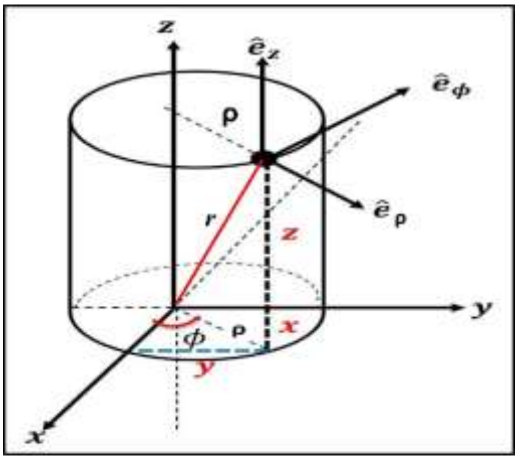
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = 2bt\hat{e}_r + bc\ t^2\hat{e}_\theta$$

اما التعجيل فيمكن ايجاده من المعادلة (1.40)

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (2b - bt^2c^2)\hat{e}_r + (0 + 4bct)\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = b(2 - t^2c^2)\ \hat{e}_r + 4bct\ \hat{e}_\theta$$



1.2.3 نظام الإحداثيات الإسطوانية Cylindrical Coordinates

ان الإحداثيات الاسطوانية هي ρ, ϕ, z والتي ستخدم في وصف موضع الجسم وسرعته وتعجيله.

ان ρ هو متجه الموضع القطري والذي يمكن ايجاد قيمته بنفس المعادلة التي استخدمت في نظام الإحداثيات القطبية

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \rho\, cos\varphi \qquad (1.34a)$$

$$y = \rho\, sin\varphi \qquad (1.34b)$$

$$z = z \qquad (1.34c)$$

$$\phi = tan^{-1}(\frac{y}{x}) \qquad (1.34d)$$

متجهات الوحدة باتجاه ρ, φ, z هي $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\phi$, $\hat{e}_z$ على التوالي بحيث ان $\hat{e}_\rho \perp \hat{e}_\varphi \perp \hat{e}_z$

ان الاحداثيات الاسطوانية تنشا من تدوير المحاور الكارتيزية حول z *بزاوية* ϕ ومصفوفة التحويل هي

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(1.35)}$$

معكوس المصفوفة هو:

$$\begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{e_\rho} \\ \widehat{e_\varphi} \\ \widehat{e_z} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(1.36)}$$

من مصفوفة التحويل (1.35)نحصل على:

$$e_\rho = i\, cos\varphi + j\, sin\varphi \qquad (1.37)$$

$$e_\varphi = -i\, sin\varphi + j\, cos\varphi \qquad (1.38)$$

ان متجه الموضع في المحاور الكارتيزية يساوي:

$$\vec{r} = i\, x + jy + kz \qquad (1.39)$$

باستخدام المعادلات (1.34) نحصل على:

$$\vec{r} = i\, \rho\, cos\varphi + j\rho\, sin\varphi + kz = \rho(i\, cos\varphi + j\, sin\varphi) + kz$$

$$\boxed{\vec{r} = \rho e_\rho + z\, e_z} \qquad (1.40)$$

السرعة في المحاور الاسطوانية تساوي:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho e_\rho + z\, e_z\right) \ggg v = \dot{\rho} e_\rho + \rho\, \frac{de_\rho}{dt} + \dot{z}\, e_z \qquad (1.41)$$

$$\frac{de_\rho}{dt} = -i\dot{\varphi}\, sin\varphi + j\dot{\varphi}\, cos\varphi = \dot{\varphi}\, (-i\, sin\varphi + j\, cos\varphi)$$

بمقارنة المعادلة أعلاه مع معادلة (1.38) نحصل على ان

$$\frac{de_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\, e_\varphi \qquad (1.42)$$

بتعويض معادلة (1.42) في معادلة (1.41) نجد ان السرعة في المحاور الاسطوانية تساوي:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\, \hat{e}_r + \rho\, \dot{\varphi}\, \hat{e}_\phi + \dot{z}\, \hat{e}_z} \qquad \textbf{(1.43)}$$

ويمكن إيجاد التعجيل من مشتقة السرعة في المعادلة (1.43) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\, \hat{e}_\rho + \rho\, \dot{\varphi}\, \hat{e}_\phi + \dot{z}\, \hat{e}_z)$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\, \hat{e}_\rho + \dot{\rho}\, \frac{de_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\, e_\varphi + \rho\, \dot{\varphi}\, \frac{de_\varphi}{dt} + \ddot{z}\, \hat{e}_z \qquad (1.44)$$

باشتقاق معادلة (1.38) نحصل على:

$$\frac{de_\varphi}{dt} = -i\, \dot{\varphi}\, cos\varphi - j\, \dot{\varphi}\, sin\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho \qquad (1.45)$$

بتعويض معادلة (1.42) ومعادلة (1.45) في معادلة (1.44) نحصل على:

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\, \hat{e}_\rho + \dot{\rho}\, \dot{\varphi}\, e_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\, e_\varphi - \rho\, \dot{\varphi}^{\,2}\, \hat{e}_\rho + \ddot{z}\, \hat{e}_z$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z} \qquad \textbf{(1.46)}$$

مثال: تنزلق خرزة على سلك مثني على شكل لولب ، وتعطى حركة الخرزة في إحداثيات أسطوانية بواسطة $r = b$، $\phi = dt$، $z = Ct$. أوجد متجهي السرعة والتعجيل كدالة للزمن.

الحل: من معادلة السرعة

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$$

$$r = b \gg \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\phi = dt \gg \dot{\phi} = d \gg \ddot{\phi} = 0$$

$$z = Ct \gg \dot{z} = C \gg \ddot{z} = 0$$

بتعويض القيم اعلاه في معادلة السرعة

$$\vec{v} = 0\hat{e}_r + bd\hat{e}_\phi + C\hat{e}_z = bd\hat{e}_\phi + C\hat{e}_z$$

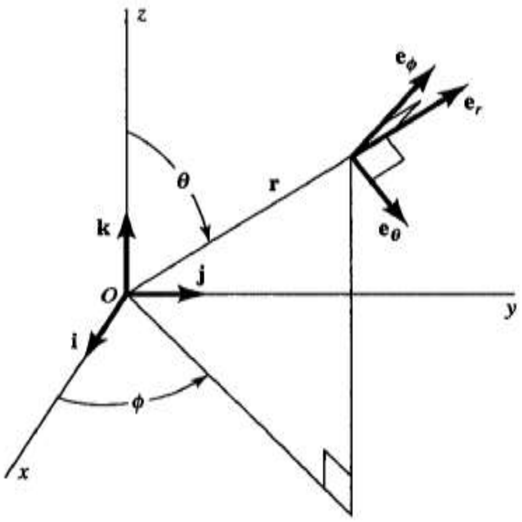
ومن معادلة التعجيل $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$

$$\vec{a} = (0 - b * d^2)\hat{e}_r + (2 * 0 * d + b * 0)\hat{e}_\phi + 0\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = -bd^2\hat{e}_r$$

وهكذا ، في هذه الحالة ، تكون كل من السرعة والتعجيل غير متغيران مع الزمن، لكنهما يختلفان في الاتجاه لأن كل من $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$ و $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$ يتغيران مع الزمن بينما تتحرك الخرزة.

1.3. 4 نظام الإحداثيات الكروية Spherical Coordinates



ان الإحداثيات الكروية هي **r**، **θ**، **φ** والتي ستخدم في وصف موضع الجسم وسرعته وتعجيله. حيث ان ان r هو متجه الموضع القطري

متجهات الوحدة باتجاه **r,θ, φ,** **هي** $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}\ , \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}},\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\phi}$ على التوالي بحيث

ان $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \perp \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \perp \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$

يمكن إيجاد مصفوفة التحويل من المحاور الكارتيزية الى المحاور الكروية من خلال اجراء عمليتي تدوير للمحاور الكارتيزية حول محور z بزاوية φ وبعد ذلك تدوير المحاور التاتجة حول y' بزاوية θ . لذلك فان مصفوفة تدوير التي تربط بين وحدات المتجه في المحاور الكروية $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}\ , \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}},\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\varphi}}$ مع وحدات المتجه بالمحاور الكارتيزية $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ هي:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta\ cos\varphi & sin\theta\ sin\varphi & cos\theta \\ cos\theta\ cos\varphi & cos\theta\ sin\varphi & -sin\theta \\ -sin\phi & cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \qquad (1.47)$$

ان متجه الموضع في المحاور الكارتيزية يساوي:

$$\vec{r} = i\ x + jy + kz \qquad (1.48)$$

$$\begin{aligned} x &= r\ cos\varphi\ sin\theta \\ y &= r\ sin\varphi\ sim\theta \\ z &= r\ cos\theta \end{aligned} \qquad (1.49)$$

من المعادلتين أعلاه نجد ان :

$$\vec{r} = i\ r\ cos\varphi\ sin\theta + jr\ sin\varphi\ sim\theta + k\ r\ cos\theta$$

$$\vec{r} = \ r\ (i\ cos\varphi\ sin\theta + j\ sin\varphi\ sim\theta + k\ cos\theta) \qquad (1.50)$$

وبالرجوع الى مصفوفة التدوير (العلاقة 1.48) نلاحظ ان الحدود المحصورة داخل القوسين في معادلة (1.50) هي تساوي وحدة المتجه القطري $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ وهذا يعني ان متجه الموضع في المحاور الكروية r يمكن ان يوصف كالاتي:

$$\vec{r} = r\, e_r \qquad (1.51)$$

ان السرعة في المحاور الكروية تساوي

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \dot{r} e_r + r\frac{de_r}{dt} \qquad (1.52)$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(i\, sin\theta\, cos\varphi + j\, sin\theta\, sin\varphi + k\, cos\theta)$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = i\dot{\theta}\, cos\theta\, cos\varphi - i\, \dot{\varphi} sin\theta\, sin\varphi + j\, \dot{\theta}\, cos\theta\, sin\varphi + j\, \dot{\varphi}\, sin\theta\, cos\varphi - k\dot{\theta}\, sin\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(i\, cos\theta\, cos\varphi + j\ \ cos\theta\, sin\varphi - k\, sin\theta) + \dot{\varphi}\, sin\theta(-i\, sin\varphi + j\, cos\varphi) \qquad (1.53)$$

وبالرجوع الى مصفوفة التدوير (العلاقة 1.48) نلاحظ ان الحدود المحصورة داخل القوسين في معادلة (1.53) هي تساوي وحدة المتجه $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$, على التوالي. لذلك فان معادلة (1.53)تصبح:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \hat{e}_\varphi \dot{\phi} sin\theta + \hat{e}_\theta \dot{\theta} \qquad (1.54)$$

بتعويض معادلة (1.54)في معادلة (1.52) فان السرعة في المحاور الكروية تساوي:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{r}}\, \hat{\boldsymbol{e}}_r + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\, \boldsymbol{sin\theta}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi} \qquad (1.55)$$

ويمكن إيجاد التعجيل من مشتقة السرعة في المعادلة (1.55) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\, \hat{e}_r + r\dot{\theta}\, \hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\, sin\theta\, \hat{e}_\varphi)$$

$$\vec{a} = \ddot{r} e_r + \dot{r}\frac{de_r}{dt} + r\dot{\dot{\theta}}\, \hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\, \hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\, \frac{de_\theta}{dt} + \dot{r}\, \dot{\varphi}\, sin\theta\, \hat{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\, sin\theta\, \hat{e}_\varphi + r\, \dot{\varphi}\dot{\theta}\, cos\theta\, e_\varphi + r\dot{\varphi}\, sin\theta\, \frac{de_\varphi}{dt} \qquad (1.56)$$

$$\frac{de_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{i}\, cos\theta\, cos\varphi + j\, cos\theta\, sin\varphi - ksin\theta)$$

$$\frac{de_\theta}{dt} = -i\, \dot{\theta} sin\theta\, cos\varphi - i\, \dot{\varphi} cos\theta\, sin\varphi - j\dot{\theta} sin\theta sin\varphi + j\, \dot{\varphi}\, cos\theta\, cos\varphi - k\, \dot{\theta}\, cos\theta$$

$$\frac{de_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(i\, sin\theta\, cos\varphi + j\, sin\theta sin\varphi + k\, cos\theta) + \dot{\varphi} cos\theta(-i\, sin\varphi + j\, cos\varphi)$$

$$\frac{de_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\, e_r + \dot{\varphi}\, cos\theta\, e_\varphi \qquad (1.57)$$

$$\frac{de_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(-i\ sin\phi + j\ cos\varphi)$$

$$\frac{de_\varphi}{dt} = -i\ \dot{\varphi}\ cos\varphi - j\ \dot{\varphi}\ sin\varphi) = -\dot{\varphi}\ (i\ cos\varphi + j\ sin\varphi) \qquad (1.58)$$

ان معكوس مصفوفة التحويل هو:

$$\begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta\ cos\varphi & cos\theta\ cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\theta\ sin\varphi & cos\theta\ sin\varphi & cos\varphi \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} \qquad (1.59)$$

من معادلة (1.59) في معادلة (1.58) نحصل على:

$$\frac{de_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\ (\ sin\theta\ cos^2\varphi\ e_r + cos\theta\ cos^2\varphi e_\theta - sin\varphi\ cos\varphi e_\varphi + sin\theta\ sin^2\varphi e_r$$
$$+ cos\theta\ sin^2\varphi\ e_\theta + sin\varphi\ cos\varphi e_\varphi)$$

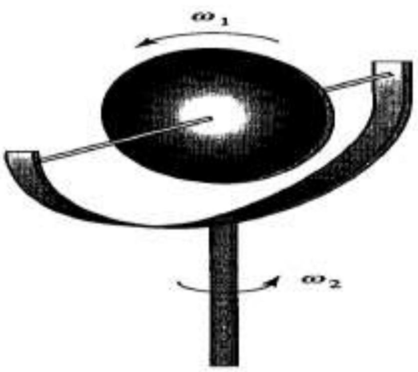
$$\frac{de_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(sin\theta\ e_r + cos\theta\ e_\theta) \qquad (1.60)$$

إذا من معادلة (1.54) ومعادلة (1.57) ومعادلة (1.60) في معادلة (1.56) نجد ان التعجيل يساوي:

$$\vec{a} = \ddot{r}e_r + \dot{r}(\dot{\phi}sin\theta\hat{e}_\phi + \dot{\theta}\hat{e}_\theta) + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\ \hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\ (-\dot{\theta}\ e_r + \dot{\varphi}\ cos\theta\ e_\varphi) + \dot{r}\ \dot{\varphi}\ sin\theta\ \hat{e}_\varphi$$
$$+ r\ddot{\varphi}\ sin\theta\ \hat{e}_\varphi + r\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\ cos\theta\ e_\varphi + r\dot{\varphi}\ sin\theta\ (-\dot{\varphi}(sin\theta\ e_r + cos\theta\ e_\theta))$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta\ cos\theta)\hat{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi}\ sin\theta +}$$
$$\boldsymbol{2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta)\hat{e}_\phi \qquad (1.61)}$$

مثال: تدور عجلة نصف قطرها b بسرعة زاويّة ثابتة تبلغ ω_1 حول محورها ، والتي بدورها تدور بسرعة زاويّة ثابتة ω_2 . باستخدام الإحداثيات الكروية جد تعجيل أي نقطة على حافة العجلة.



الحل: ان الإحداثيات الكروية هي على هذا النحو التالي:

$$\dot{\theta} = \omega_1(\theta = \omega_1 t)\ , \qquad \dot{\phi} = \omega_2(\omega_2 = \omega_2 t),$$
$$r = b \gg \dot{r} = 0$$

من معادلة التعجيل

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sin\theta\ cos\theta\right)\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi} sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\ sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} cos\theta)\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = (0 - b\omega_2^2 sin^2\omega_1 t - b * \omega_1^2)\hat{e}_r + (b * 0 + 2 * 0 * \omega_1 - b * \omega_2^2 * sin\omega_1 t\ cos\omega_1 t)\hat{e}_\theta + (b * 0\ sin\omega_1 t + 2 * 0 * \omega_2 sin\omega_1 t + 2b\omega_1\omega_2 cos\omega_1)\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = (-b\omega_2^2 sin^2\omega_1 t - b\omega_1^2)\hat{e}_r - b\omega_2^2\ sin\omega_1 t\ cos\omega_1 t\ \ \hat{e}_\theta + 2b\omega_1\omega_2\ cos\omega_1 t\ \ \hat{e}_\phi$$