التحـويـلات الـهـنـدسـيــة :-

تعريف (التحويل الهندسي) :- هو تقابل من نقاط المستوي إلى نفسها أي أنه إذا كان π مستوي فأن $f : \pi \to \pi$ يمثل تحويل هندسي معرف بالشكل التالي :-

$$\forall\, p \in \pi \,,\ f(p) = p$$

* التحويل f المعرف بالشكل $f(\ell) = \ell$ حيث ℓ هو مستقيم في المستوي يسمى هذا التحويل متسامت

* يسمى التحويل f متساوي القياس إذا كان $P'Q' = PQ$ لكل نقاط Q, P حيث

$$P' = f(P)$$

$$Q' = f(Q)$$

* إذا كان π و π' مستويين متوازيين وكان $f : \pi \to \pi'$ و $g : \pi' \to \pi$ تحويليين فأن التحويل $g \circ f$ يسمى إزاحة على طول المستقيم العمود على المستويين أما إذا كان المستويين متقاطعان فأن التحويل $g \circ f$ يسمى دوران حول المحور ℓ حيث ℓ هو مستقيم تقاطع المستويين .

* التحويل المحايد المعرف بالشكل $i(S) = S$ هو تحويل إزاحة وليس دوران

* الانعكاس حول النقطة M هو تحويل يعين لكل نقطة في الشكل المعكوس نقطة تناظرها بالنسبة إلى النقطة M وهذا الانعكاس يكافئ دوران حول النقطة M مقدارها (180)

* الانعكاس حول المستقيم ℓ هو تحويل يعين لكل نقطة في الشكل المعكوس نقطة تناظرها بالنسبة إلى المستقيم ℓ ويسمى المستقيم ℓ محور التناظر

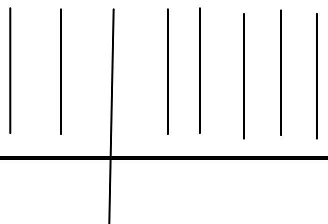
* التحويل f يسمى تشابه من النسبة r إذا كان $P'Q' = PQ$ لكل نقاط Q, P حيث $P' = f(P)$ ، $Q' = f(Q)$

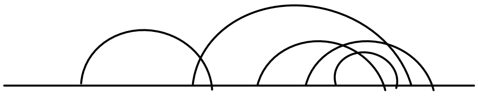
نموذج على الهندسة الهذلولية الزائدية :-

لغرض إمكانية تصور أفكار هذه الهندسة نستعرض نموذج جون كاري، يتكون هذا الفضاء من مجموعة النقاط Y, X في المستوي بحيث $Y > 0$ أي كل النقاط الواقعة في الجزء العلوي من المحور X .

تعرف المستقيمات في هذا الفضاء بأنها الأنصاف العليا لدوائر مراكزها على المحور X وكذلك المستقيمات العمودية على المحور X والواقعة في النصف العلوي من المحور X .

هذه المستقيمات تسمى بـ المستقيمات الهذلولية أي المستقيمات الهذلولية تكون معادلتها في هذا الفضاء بالشكل التالي :-





معادلة الدائرة $Y = \sqrt{r^2 - (X-h)^2}$

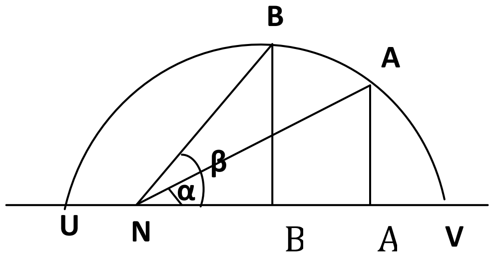
و المستقيمات $Y > 0\ ,\ X = a$

تُعرف المسافة الهذلولية بين النقطتين A , B بأنها جزء قوس الدائرة المار بالنقطتين A , B ومركزها يقع على المحور X، من اجل إيجاد قياس هذه المسافة الهذلولية نأخذ مسقطهما على المحور X مثل A', B'

وتعُرف المسافة الهذلولية بالشكل التالي :-

حيث $h(AB)$ نعني به الطول الهذلولي بين النقطتين A , B و $(A'B', UV)$ هي النسبة التبادلية لأربعة نقاط.

ملاحظة :- إذا انطبقت النقطة A على النقطة V أو النقطة B على النقطة U فان المسافة تكون لانهائية ولذلك نعتبر نقاط محور X نقاط لا نهائية



اذا فرضنا ان الزاوية $\sphericalangle \alpha$ $\sphericalangle ANV$

$\sphericalangle \beta$ $\sphericalangle BNV$

فأنه ممكن إيجاد المسافة الهذلولية بدلالة الزاويتين α و β وكالاتي :-

$$h(AB) = \mathrm{Log}\,(\tan(\beta/2) / \tan(\alpha/2))$$

استخدام صيغ إنصاف الضلال $\tan(\alpha/2) = \sin(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$

$$= \sqrt{1-\cos\alpha} / \sqrt{1+\cos\alpha} = (1-\cos\alpha) / \sin\alpha = \sin\alpha / (1+\cos\alpha)$$

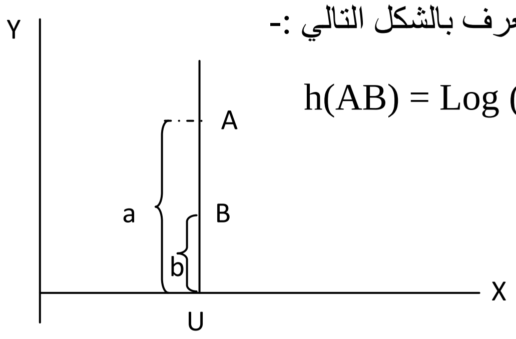
$$\tan(\beta/2) = (1-\cos\beta) / \sin\beta$$

$$e^{h(AB)} = \frac{(1-\cos\beta)\,(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

$$e^{-h(AB)} = \frac{(1+\cos\beta)\,(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

$$\cosh(AB) = \frac{e^{h(AB)})+e^{-h(AB)}}{2} = \frac{1-\cos\alpha * \cos\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

ملاحظة :- إذا كانت المسافة ذات امتداد عمودي على المحور x فأنها تعرف بالشكل التالي :-



$$h(AB) = \text{Log}\,(UB / UA) = \text{Log}(b/a)$$

باستخدام الدوال الزائدية نجد إن

$$\cosh(AB) = \frac{b^2+a^2}{2ab} \quad , \qquad \sinh(AB) = \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

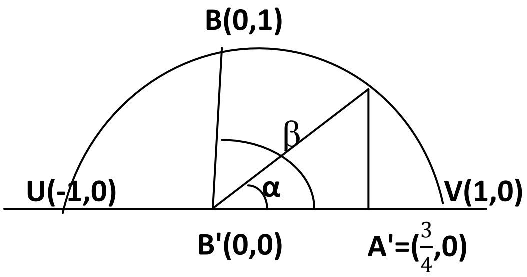
مثال :- جد المسافة الهذلولية بين النقطتين $B = (0,1)$, $A = (3/4 , \sqrt{7}/4)$

الحل :- $h(AB) = 1/2\,\text{Log}\,(A'B' , UV)$

(نستخدم هذا القانون لان يقع على مستقيم ليس عمودي على X ونعرفه من قيم X لــ B,A وفي المثال قيم X مختلفة)

∵ النقطتين تنتمي للدائرة $(X-h)^2 + Y^2 = r^2$

النقطتان B,A تحققان معادلة الدائرة، نعوض عن النقطة A، B



$$(3/4 - h)^2 + 7/16 = r^2 \qquad ....(1$$

$$h^2 + 1 = r^2 \qquad ....(2$$

أنياً

$$h = 0 \rightarrow r = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

$$h(AB) = 1/2\,\text{Log}\,(A'B' , UV) = 1/2\,\text{Log}\,(A'U.B'V) / (A'V.B'U)$$

$$= 1/2\,\text{Log}\left[\frac{(-1-(3/4))\,(1-0)}{(1-(3/4))(-1-0)}\right] = 1/2\,\text{Log}\,7$$

$$= \text{Log}\,\sqrt{7}$$

طريقة أخرى

$$h(AB) = \text{Log}[\,(\tan \beta/2) / (\tan \alpha/2)]$$

واضح أن $\beta = \pi/2$ ،

$\tan \alpha/2 = \sqrt{1-\cos \alpha} / \sqrt{1+\cos \alpha}$ $\qquad \cos \alpha = 3/4$

$= \sqrt{1-(3/4)} / \sqrt{1+(3/4)} = 1/\sqrt{7}$

$h(AB) = \text{Log} (\tan \pi/4) / (1/\sqrt{7}) = \text{Log} \sqrt{7}$

تمرين:- 1) جد المسافة الهذلولية بين النقطتين $A = (3/4 , \sqrt{7/4})$ ، $B = (-1/2 , \sqrt{3/2})$

2) إذا كانت النقطتين $A = (6 , 3)$ ، $B = (6, \sqrt{24})$ واقعتين على مستقيم هذلولي جد $\tanh(AB)$

معادلة المستقيم الهذلولي الذي يمر بين نقطتين معلومتين :-

إن معادلة المستقيم الهذلولي بين النقطتين $A(X_1 , Y_1)$ و $B(X_2 , Y_2)$ هي معادلة نصف الدائرة العليا المارة بين النقطتين A,B ويقع مركزها على محور X تعطى هذه المعادلة بالمحدد التالي :-

وإذا كانت النقطتين على خط عمودي على محور X أي إن $X_1=X_2$ فالمعادلة في المحدد أعلاه تصبح $X = X_1 = X_2$ هي معادلة المستقيم

مثال :- جد معادلة المستقيم الهذلولي المار بالنقطتين $A(3,2)$ ، $B(-2,1)$ ثم جد المسافة الهذلولية

الحل :-

$\longrightarrow [3(X^2 + Y^2) + 5x - 26] - [15 -2(X^2 + Y^2) + 13x] = 0$

$5 X^2 + 5 Y^2 - 8x - 41 = 0$