## الهندسة الاهليليجة الناقصة :-

أن الهندسة الاهليليجة قائمة على أساس النقيض الثاني لبديهية اقليدس الخامسة وهي لايوجد أي موازٍ للمستقيم أي إن جميع المستقيمات متقاطعة. إن النموذج الذي افترض لتحقيق هذه الهندسة هو سطح كرة مع اعتبار إن المستقيمات هي أجزاء من دوائر عظمى (الدائرة العظمى بالنسبة للكرة هي الدائرة التي يكون نصف قطرها يساوي نصف قطر الكرة) .

نفرض إن معادلة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

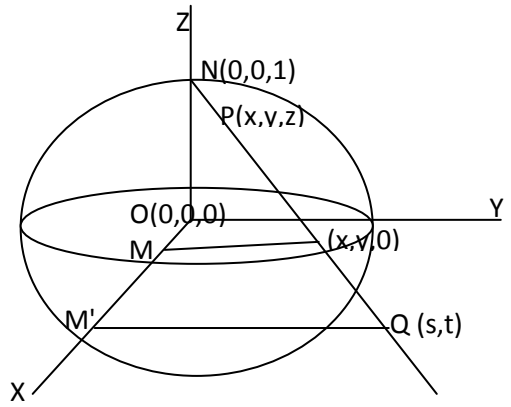
مركز هذه الكرة هو نقطة الأصل (0,0,0)

ونصف قطرها =1.

إن أي مستوي يمر بالمركز يقطع سطح الكرة بدائرة عظمى .

**ملاحظة :-** بين أي نقطتين على سطح كرة (ماعدا كونها نهايتي قطر من أقطارها ) يوجد خط واحد فقط هو جزء الدائرة الناتج من تقاطع المستوي المتعين بالنقطتين ومركز الكرة فمثلا إذا كانت النقطتين على سطح الكرة هما A(X1,Y1,Z1) , B(X2,Y2,Z2) فأنهما تحققان معادلة الكرة وتكون معادلة المستوي المار بالنقطتين B,A ونقطة الأصل معطاة بالمحدد الآتي :-

أن هذه المعادلة الخطية من الدرجة الأولى بالنسبة للمتغيرات الثلاثة Z,Y,X وتمر بالنقطة (0,0,0) وتحقق النقطتين B,A ولغرض دراسة الهندسة الاهليليجة على مستوي كما في الهندسة الهذلولية والاقليدية نستخدم الإسقاط الجسماني الذي ينقل جميع النقاط على سطح الكرة إلى المستوي Y,X مع اعتبار النقطة N(0,0,1) ثابتة (لها مسقط أو مسقطها في مالانهايتي ) فالإسقاط ليس أي نقطة P(x,y,z) من سطح الكرة على مستوي x,y نصل بين النقطتين P,N ونمده حتى يلاقي مستوي XY في نقطة مثل Q وتكون النقطة Q هي مسقط النقطة P



إن هذا الإسقاط يولف إسقاط متباين عدا النقطة N أي إن كل نقطة على سطح الكرة (ماعدا النقطة N) توجد نقطة واحدة فقط على المستوي XY وبالعكس كل نقطة على المستوي XY توجد نقطة واحدة مقابلة لها على سطح الكرة .

**خواص الإسقاط الجسماني :-**

1- النقاط الواقعة على خط الاستواء ($z = 0$) يكون إسقاطها على نفسها .

2- النقاط الواقعة أعلى المستوي XY ($z > 0$) من سطح الكرة تسقط خارج دائرة الاستواء .

3- النقاط الواقعة أسفل المستوي XY ($z < 0$) من سطح الكرة تسقط على نقاط داخل دائرة الاستواء .

**ملاحظة :-**

***-** إذا كانت النقطة $Q(s,t)$ في المستوي XY هي مسقط النقطة $P(x,y,z)$ الواقعة على سطح الكرة فأنهُ يمكن إيجاد إحدى النقطتين بدلالة الأخرى

*- اذا علمت النقطة $Q(s,t)$ فان النقطة $P(x,y,z)$ تحتسب بالعلاقات التالية :-

$$1)\ X = 2S / (s^2 + t^2 + 1)$$

$$Y = 2t / (s^2 + t^2 + 1)$$

$$Z = (s^2 + t^2 - 1) / (s^2 + t^2 + 1)$$

*- اذا علمت النقطة $P(x,y,z)$ فان النقطة $Q(s,t)$ تحتسب بالعلاقات التالية :-

$$2)\ S = X / 1-Z$$

$$t = y / 1-z \qquad -1 < z < 1$$

**مثال :-** جد النقطة التي يكون مسقطها على XY هو $Q\ (5,-2)$ على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ؟

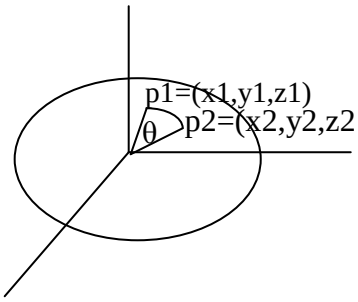
الحل :- $x = 10 / (25+4+1) = 1/3$

$$y = -4 / (25+4+1) = -4/30$$

$$z = (25+4-1) / (25+4+1) = 28/30$$

## المسافة الاهليليجية بين نقطتين :-

المسافة الاهليليجية بين النقطتين p1=(x1,y1,z1) ,p2=(x2,y2,z2) على سطح الكرة تقدر بالزاوية المركزية التي تقابل القوس الأصغر من الدائرة العظمى المارة بالنقطتين (يجب أن تكون الزاوية مقاسه بالزوايا النصف قطرية). أي أن الزاوية P1OP2 ∢ يرمز لها بالرمز تحسب بالعلاقة :-




$$\cos\theta = \frac{(OP1 \,.\, OP2)}{|OP1||P2|}$$

$$= X1X2 + Y1Y2 + Z1Z2$$

(لان $\|OP2\| = \|OP1\| = 1$ "لأنه يساوي نصف القطر")

وإذا كان المسقط الجسماني للنقطتين P2,P1 على المستوي XY هما النقطتين Q1(s1,t1) و Q2(s2,t2)

$$\cos\theta = \frac{4s1s2 + 4t1t2 + (s1^2 + t1^2 - 1)(s2^2 + t2^2 - 1)}{(s1^2 + t1^2 + 1)(s2^2 + t2^2 + 1)}$$

ملاحظة :- من القانون السابق نستخرج قيمة $\cos\theta$ ثم نأخذ له معكوس cos ونأخذ قيمة θ بالتقدير النصف قطري ثم الناتج هو المسافة الاهليليجية بين P2,P1

*لكي نحول زاوية من الدرجات إلى النصف قطري نضربها بـ $\pi/180$

**مثال :-** جد المسافة الاهليليجية بين النقطتين Q1=(8,3)، Q2=(-2,5) ؟

**الحل :-** $\cos\theta = (-64+60+72*28) / (30*74)$

$= 2012 / 2220 = 503 / 555$

$\theta = \cos^{-1}(503/555) = 25.0002$

بالتقدير الدائري $= 0.4363$

## الهندسة الافينية (التآلفية) :-

نشأت الهندسة الافينية على يد العالم الرياضي اويلر(1783 – 1707) حيث يعتبر التوازي قاعدة أساسية إن هذه الهندسة لا تهتم بدراسة الدوائر والزوايا وإنما تعتمد على بديهيات الترتيب مضافاً إليها بديهية اقليدس الخامسة الخاصة بالتوازي لذلك تعتبر الهندسة الافينية هي الهندسة المبنية على مسلمات هندسة الترتيب مضافاً إليها مسلمة اقليدس في التوازي ، في هذه الهندسة تكون اللامعرفات هي النقطة البينية ، المستقيم أما البديهيات فتكون نفس بديهيات هندسة الترتيب مضافاً إليها البديهيتان التاليتان :-

بديهية (1) :- إذا كانت A نقطة لا تقع على المستقيم m فأنه يوجد مستقيم واحد على الأكثر يمر بالنقطة A ولا يلاقي m .

بديهية (2) :- إذا كانت G,F,E,D,C,B,A سبعة نقاط مختلفة بحيث أنه EF,CD,AB ثلاث مستقيمات مختلفة تمر خلال النقطة G وإذا كانت AC موازي للمستقيم BD و CE موازي للمستقيم DF فأن EA موازي للمستقيم FB .