الـهـنــدســة اللاأقــلـيـديــة:-

لقد باءت جميع المحاولات لإثبات مسلمة أقليدس الخامسة بالفشل والتي نصت على أنه يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة خارجه عنه إلا أن هذه المحاولات مهدت الطريق لظهور الهندسة اللاأقليدية وذلك بسبب الفلسفة التي كانت سائدة آنذاك والتي تعتمد أو تعتقد بأن الفراغ الأقليدي موجود في عقل الإنسان سلفاً ولا يحتاج الى الخبرة وقد تم أكتشاف الهندسة اللاأقليدية على أيدي عدد من العلماء في وقتٍ واحد وفي مناطق مختلفة من العالم سوف نتطرق الى بعض من هؤلاء العلماء :-

1) كَــاوس :-لقد أستطاع تكوين بناء رياضي متآلف خلال فترة حياته حيث أعتبر فيه أنه مسلمة التوازي تختلف عن نظيرتها في الهندسة الأقليدية وأسماها الهندسة الاأقليدية حيث أفترض كَاوس أن الفراغ لا نهائي وغير محدود لقد طور كَاوس مكتشفاتهِ في هذه الهندسة وبعث رسالة لصاحبهُ الرياضي (نورينوس) في عام 1824 جاء فيها أن افتراض مجموع زوايا المثلث لا يساوي (180) درجة يقود الى هندسة غريبة تختلف عن الهندسة الأقليدية ولكنها متآلفة .

2) بـولـيــا :- كان العالم بوليا صاحباً لكَاوس في ألمانيا حيث تبادلا الرسائل بعد افتراضه ما لبرهان المسلمة الخامسة لأقليدس فترجم بوليا مكتشفاته ونظريته وأفكاره في مجلدين أطلق عليهما أسم (TENTAMEN)وبعث بنسخه منه الى كَاوس وكان لبوليا ولد أسمه يوحنا تعلم الهندسة على يد والده وكان له الدور الكبير في الهندسة اللاأقليدية .

3) لوباتشوفسكي (لوباجسفكي) :- وهو رياضي روسي درس في جامعة كازان وعمل محاضراً فيها ليخطف الأضواء من كَاوس وبوليا وكان أول من نشر عمل متكامل عن الهندسة اللاأقليدية وكان له دور في ظهور النظرية النسبية الخاصة .

4) ريــمــان :- وهو عالم ألماني درس الرياضيات على يد كَاوس لم يشاركه أحد في أكتشاف نوع جديد من الهندسة اللاقليدية وكانت جميع النتائج التي توصل إليها بفضل افتراضه أن الفراغ ليس بالضرورة أن يكون غير نهائي وغير محدود ولكن يمكن أن يكون غير نهائي ومحدود ولذلك افترض لا يوجد خطوط متوازية في الهندسة الجديدة علماً أن وجود الخطوط المتوازية في الهندسة اللاقليدية يرجع الى الخطوط المستقيمة لا نهائية وغير محدودة .

جاء بعد ذلك عدة علماء منهم كلاين (Klein)الذي أقترح تسميه الهندسة التي أكتشفها كل من كَاوس وبوليا ولوباتشوفسكي بالهندسة الزائدية والهندسة التي أكتشفها ريمان بالهندسة الناقصية .

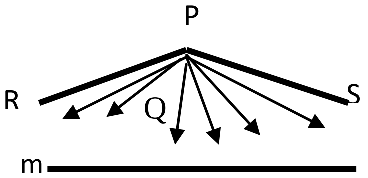
الهندسة الزائدية (الهذلولية) :- " Hyperbolic Geometry "

الهندسة الهذلولية هي احدى الهندسات اللاقليدية والتي عمل على بنائها وتطويرها كلا من العالمين جون بوليا الهنكاري ولوبا جفسكي الروسي في حدود (1820- 1830م) وذلك باخذ نقيض بديهية بليفير (أحدى

مكافئات بديهية التوازي لاقليدس) والذي هو (من نقطة لا تقع على خط معلوم، يمكن رسم اكثر من مواز واحد لذلك الخط المعلوم). وبهذا اصبحت الهندسة الهذلولية نظام بديهي يعتمد على البديهيات الاربعة الاولى لاقليدس بالاضافة الى بديهية اخرى تناقض بديهية التوازي لاقليدس والتي سميت بالبديهية المميزة للهندسة الهذلولية او بديهية التوازي الهذلولية.

بديهية (1) بديهية التوازي الهذلولي (HPP) :-

إذا كان m مستقيم P نقطة خارجه عنه فأنه يوجد شعاعين مثل $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ بحيث :-



a) $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ غير متعاكسين

b) $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ لا يشتركان مع m

c) الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ يقطع المستقيم m إذا وفقط إذا كان يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$

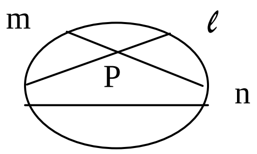
البديهية أعلاه تعني أنه يمكن رسم أكثر من مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة خارجه عنه والتي تمثل نقض بديهية أقليدس الخامسة .

تعريف :- يسمى الشعاعان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ الواردان في بديهية HPP شعاعين متوازيين لخط المستقيم m من نقطة P

لغرض تمثيل الهندسة الهذلولية باستخدام المفاهيم والمصطلحات الاقليدية، هناك نموذجين للتعبير عن الهندسة الهذلولية(الزائدية) هما :-

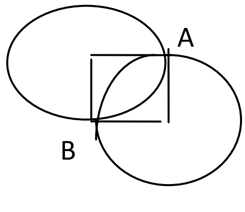
1) نموذج كلاين Klein Model :- النموذج الذي قدمهُ كلاين ينص على أن المستوي الهذلولي (الزائدي) هو عبارة عن النقاط الداخلية لدائرة في المستوي الأقليدي ومستقيمات المستوي الهذلولي هو الأوتار المفتوحة لهذه الدائرة (وتر الدائرة يسمى وتر مفتوح إذا كان لا يحتوي نقاط محيط الدائرة) .

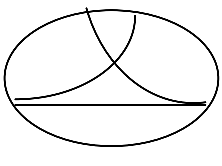
يلاحظ في الشكل أدناه أن المستقيمين ℓ , m اللذان يمران بالنقطة P لا يشتركان مع المستقيم n حسب تعريف التوازي الهذلولي وحقيقة أنهما يلتقيان خارج الدائرة لا تهمنا وذلك لأنها تقع خارج المستوي الهذلولي.



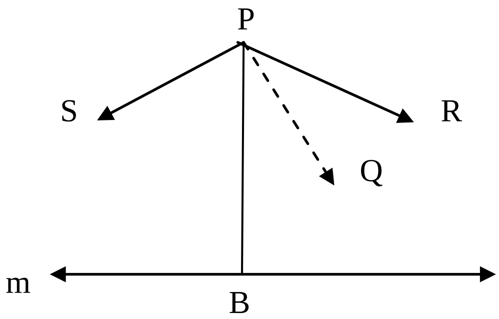
2) نموذج بون كيري Poincare Model :- النموذج الذي قدمهُ ينص على اعتبار المستقيمات (الخطوط) هي أقواس مفتوحة من الدوائر المعامدة لدائرة التي تمثل المستوي الهذلولي (تكون دائرتان متعامدتان

إذا كانت أنصاف أقطار كل منهما المارة بنقطتي التقاطع متعامدة) .





مبرهنة (57):- إذا كان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعان موازيان للمستقيم m من النقطة P الخارجية عنه و B نقطة على m فأن أي شعاع $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$ يقطع m .



البرهان :- نفرض أن الشعاع $\overrightarrow{PB}$ يقطع المستقيم m

∴ من بديهية (HPP) الشعاع $\overrightarrow{PB}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$

نفرض $\overrightarrow{PQ}$يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$

يجب أن نبرهن أن الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m

∴ $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$

∴ $\overrightarrow{PQ}$يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و$\overrightarrow{PS}$ من مبرهنة :

(إذا كان الشعاع $\overrightarrow{BC}$ يقع بين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA}$ وكان $\overrightarrow{BD}$ يقع بين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BE}$فأن $\overrightarrow{BD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BE}$)

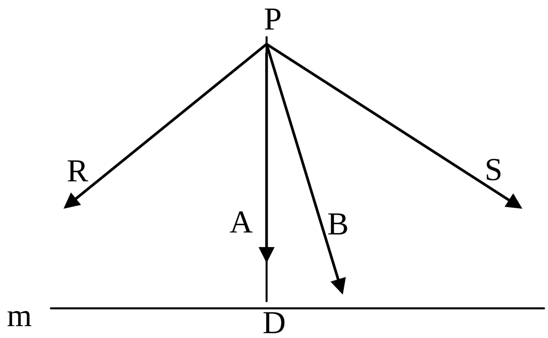
∴ من بديهية (HPP) الشعاع PQ يقطع m.

تعريف :- يقال أن الشعاع $\overrightarrow{OD}$ منصف للزاوية AOB∢ إذا و فقط إذا كان D داخلية للزاوية AOB∢ و BOD∢ ≅ AOD∢.

مبرهنة (58) :- لكل زاوية منصف وحيد .

مبرهنة (59) :- إذا كان $\overleftrightarrow{m}$ مستقيم P نقطة خارجه عنه فأنه يوجد مستقيم واحد عمودي على المستقيم$\overleftrightarrow{m}$ من النقطة P .

مبرهنة (60) :- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ موازيان للمستقيم m من النقطة P فأن المنصف للزاوية RPS∢ يكون عمودياً على المستقيم m .



البرهان :- نفرض أن الشعاع $\overrightarrow{PA}$ منصف للزاوية RPS∢

من بديهية (HPP) الشعاع PA يقطع المستقيم m في نقطة مثل D

يجب أن نبرهن أن الشعاع $\overrightarrow{PA}$ عمودياً على المستقيم m

نفرض أن $\overrightarrow{PA}$ غير عمودي على m

من مبرهنة (59) يوجد شعاع مثل PB عمودياً على m

من مبرهنة (58) BPS∢ ≅ RPB∢

من بديهية (HPP) الشعاع PB داخل الزاوية RPS ∢ و B داخلية للزاوية RPS ∢

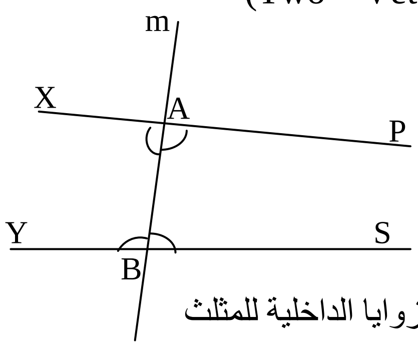
∴ $\overrightarrow{PB}$ يكون منصف للزاوية RPS ∢ وهذا يناقض مبرهنة (58)

∴ PD عمودي على المستقيم m.

نتيجة:- إذا كان الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ عمودياً على مستقيم معلوم المستقيم m ، و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ هما الشعاعان الموازيان للمستقيم m من النقطة P ، فان SPQ ∢ و RPQ ∢ زاويتان حادتان .

المثلث الهذلولي الزائدي :-

تعـــريـــف :- إذا كان الشعاعان XP و YS شُعاعان متوازيان وكان المستقيم m قاطع لهما في نقطتين A وB بحيث أن [XAP] و [YBS] فأن إتحاد الشعاعين AP و BS و A و B وقطعة المستقيم AB يسمى المـثلـث الـهذلـولــي(مثلث ذو راسين) ويرمز له بالرمز (T. V.T)(Two – Vettices – Triangle)



* قطعة المستقيمABتسمى ضلع المثلث T.V.T

* الزاويتين BAP ∢ و ABS∢ تسمى زاويتين المثلث T.V.T وكذلك تسمى الزوايا الداخلية للمثلث

* النقطتين A و B تسمى رؤوس المثلث . الزاويتين XAB ∢ و YBA ∢ تسمى زوايا خارجية للمثلث T.V.T

الزاويتان الداخليتان والخارجيتان للمثلث T.V.T اللتان ليستا متجاورتين تسميان زوايا متبادلة

* داخل المثلث T.V.Tهو تقاطع جهة الخط AB التي تحتوي P وجهة الخط AP التي تحتوي B وجهة الخط BS التي تحتوي A

* النقاط الخارجية للمثلث T.V.Tهي النقاط التي لا تقع داخل وعلى المثلث .

* المثلث T.V.T مع الشعاعين AP و BS وقطعة المستقيم AB سوف نمثلهُ بالشكل PABS

مبرهنة (61) :- إذا كان شعاعان في الاتجاه يوازيان شعاعاً ثالثاً فأن أحدهما يوازي الأخر

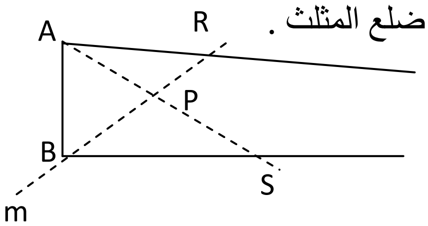
البرهان :-.(الكتاب المنهجي ص268)

مبرهنة (62) :- إذا كانت P نقطة ليست على المستقيم m والشعاع $\overrightarrow{PR}$ موازي للمستقيم m من النقطة P وكانت A نقطة بحيث [PAR] أو [APR] فأن الشعاع $\overrightarrow{AR}$ موازي للمستقيم m. **واجب**

مبرهنة (63) :-

A) المستقيم المار بنقطة داخلية للمثلث RABS (T.V.T) وأحد رؤوس ذلك المثلث فأنه يقطع الشعاع المقابل لذلك الرأس .

B) المستقيم المار بنقطة داخلية للمثلث RABS ويوازي أحد الشعاعين فأنه يقطع ضلع المثلث .

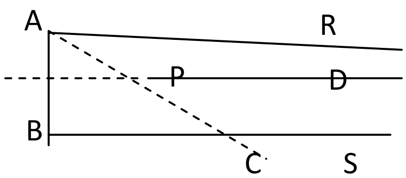


البرهان :- (A) نفرض أن P نقطة داخلية للمثلث RABS

إذا كان المستقيم m يمر بالرأس B

فأنه من مبرهنة (57) الشعاع $\overrightarrow{BP}$ يقطع الشعاع $\overrightarrow{AR}$ وكذلك إذا كان المستقيم يمر بالرأس A

فأنه من مبرهنة (57) الشعاع $\overrightarrow{AP}$ يقطع الشعاع $\overrightarrow{BS}$



(B) نفرض أن نقطة P نقطة داخلية للمثلث RABS

وكذلك المستقيم PD يوازي أحد الشعاعين وليكن $\overrightarrow{BS}$

من مبرهنة (63) (A) الشعاع AP يقطع الشعاع BS في نقطة مثل C

∴ المستقيم PD يقطع AC في نقطة P

∴ من بديهية باش المستقيم PD أما أن يقطع الضلع BC أو الضلع AB ولكن من الفرض PD لا يقطع الضلع BC

∴ يقطع الضلع AB.