الزوايا (The Angles)

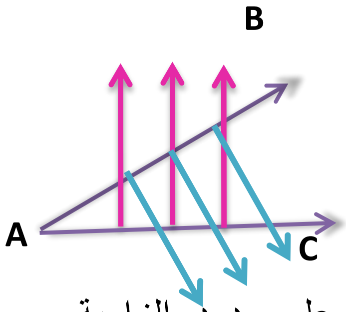
تعـريـــف :- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مختلفين لا يقعان على مستقيم واحد ولهما نقطة بداية مشتركة A فأن إتحاد هذين الشعاعين مع النقطة A تسمى زاوية .

النقطة A تسمى رأس الزاوية و نرمز للزاوية بالرمز $\measuredangle BAC$ أو $\measuredangle CAB$ أو $\measuredangle A$ ، الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ يمثلان ضلعا الزاوية.

مبرهنة (32) :- إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ شعاعين ليس على استقامة واحدة وكانت $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $C' \in \overrightarrow{AC}$

فأن $\measuredangle BAC = \measuredangle B'AC' = \measuredangle B'AC = \measuredangle BAC'$

تعريف: داخل الزاوية $\measuredangle BAC$ هو تقاطع جهة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحوي النقطة B وجهة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ التي تحوي النقطة C.



خارج الزاوية هو مجموعة كل النقاط التي لا تقع في داخل الزاوية ولا على حدود الزاوية.

مبرهنة (**):

١ -يوجد للزاوية رأس واحد فقط.
٢ -داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية.
٣ -داخل الزاوية هو مجموعة محدبة.

واجب

مــبرهنــة(33) : إذا كانت D نقطة في داخل $\measuredangle BAC$ فان كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تكون داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$ (تقع في داخل $\measuredangle BAC$) .

البرهان:- نفرض $X \in \overrightarrow{AD}$

∵ D نقطة داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$ (من الفرض)

∴ D تقع على جهة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ التي تحوي C وتقع على جهة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحوي B

من مبرهنة (6 ،26) جميع نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع على جهة واحدة من $\overrightarrow{AB}$ ومن ضمنها النقطتين X ,D

∵ C , D تقع على جهة واحدة من الشعاع $\overrightarrow{AB}$

∴ مبرهنة (3، 27) C , X تقع على جهة واحدة من الشعاع $\overrightarrow{AB}$

∴ X تقع على جهة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ التي تحوي C

وبنفس الطريقة نبرهن أن النقطة X تقع على جهة واحدة من الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحوي B

∴ x تقع داخل الزاوية $\measuredangle BAC$

∴ كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تكون داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$

مبرهنة (34) :- في الزاوية$\measuredangle BAC$ إذا كانت P,Q نقطتين مختلفتين واقعتين على الضلعين $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ على التوالي فأن كل نقطة R على الخط PQ تكون داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$ إذا وفقط إذا [PRQ] **(واجب)**

مبرهنة (35) :- إذا كانت D نقطة داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$ فأن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقطع قطعة المستقيم $\overline{BC}$.

تعــريــف :- في الزاوية $\measuredangle BAC$ يقال أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذا وفقط إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AD}$ داخل الزاوية $\measuredangle BAC$

مبرهنة (36):- الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ إذا وفقط إذا وجدت نقاط D′ , C′ , B′ تقع على $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ على التوالي بحيث [B′D′C′] .

البرهان:⟸

نفرض إن $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ⟵ $\overrightarrow{AD}$ يقع داخل الزاوية $\measuredangle BAC$ (تعريـف)

(من بديهية 9) توجد نقطة مثل $B' \in \overrightarrow{AB}$ و $C' \in \overrightarrow{AC}$

$\longleftarrow$ $\measuredangle BAC = \measuredangle B'AC'$ (مبرهنة 32)

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ داخل الزاوية $\measuredangle B'AC'$ (تعريف)

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ يقطع $\overline{B'C'}$ في نقطة مثل D' (مبرهنة 35)

$\longleftarrow$ $[B'D'C']$ (مبرهنة 34)

$\Longrightarrow$

نفرض إن $B' \in \overrightarrow{AB}$, $C' \in \overrightarrow{AC}$, $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث $[B'D'C']$.

$\therefore$ D' نقطة داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$ (مبرهنة 34)

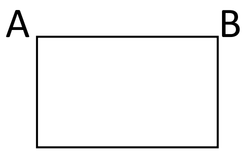
$\because$ $D' \in \overrightarrow{AD}$ $\longleftarrow$ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع داخل الزاوية $\measuredangle BAC$ (مبرهنة 33)

$\longleftarrow$ الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$

مبرهنة (37): إذا كان الشعاع $\overrightarrow{OB}$ بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ وأن $\overrightarrow{OD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{OA}$ فان $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$. **(واجب)**

الشكل الرباعي المحدب :-

إذا كان A, B, C, D أربعة نقاط بحيث لا توجد أي ثلاث نقاط منها على استقامة واحدة فالمجموعة المتكونة من اتحاد النقاط A, B, C, D مع قطع المستقيمات $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ تسمى **شكل رباعي (رباعي الإضلاع)** ، وتسمى النقاط A, B, C, D رؤوس الشكل الرباعي وتسمى المستقيمات $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ أضلاع الشكل الرباعي .



<u>تعـــــاريـــف</u> :-

D C

1) يقال عن ضلعين في شكل رباعي بأنهما متجاورين في نقطة واحدة والضلعين الغير متجاورين هما متقابلين.

2) زاوية الشكل الرباعي هي الزاوية التي ضلعاها ضلعين متجاورين في الشكل الرباعي .

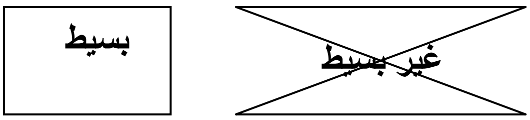
3) يقال عن زاويتين في الشكل الرباعي بأنهما متجاورتين إذا اشتركتا بضلع من الإضلاع . وفي الشكل الرباعي الزاويتين غير المتجاورتين متقابلتين .

4) يقال عن رأسي في الشكل رباعي بأنهما متجاورين إذا كانا رأسي لزاويتين متجاورتين والرأسين المتقابلين هما الرأسي الغير متجاورين .

5) قطر الشكل الرباعي هو قطعة المستقيم الواصلة بين رأسين متقابلين .

تعريـف :- يقال عن الشكل الرباعي بأنه محدب إذا كان لأي رأسين متجاورين في رؤوسه فأن الرؤوس الغير واقعة على الضلع المشترك تكون على جهة واحدة من خط ضلع هذين الرأسين .

تعريـف :- الشكل الرباعي البسيط هو الذي لا يتقاطع فيه ضلعان و غير البسيط هو الذي يتقاطع فية ضلعان.



تعريـف :- داخل رباعي الإضلاع المحدب (الشكل الرباعي محدب) هو تقاطع المجموعات التالية:

١ -جهة الخط AB التي تحتوي D, C
٢ جهة الخط BC التي تحتوي D, A
٣ جهة الخط CD التي تحتوي B, A
٤ جهة الخط AD التي تحتوي B, C

مبرهنة (***): داخل الشكل الرباعي محدب (رباعي الإضلاع المحدب) يكون مجموعة محدبة . **(واجب)**