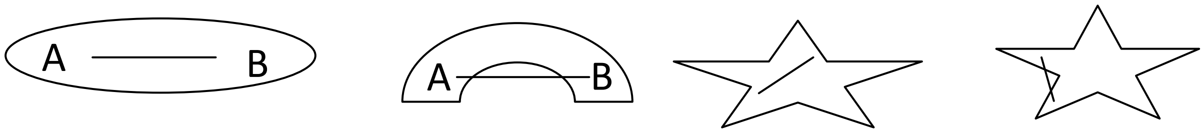
المجموعات المحدبة:-

تعـريـف :- تسمى المجموعة S مجموعة محدبة (Convex sets) إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين P,Q Є S فأنه قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين Q، P تكون محتواه فعلياً في المجموعة S

أي أنه المجموعة S محدبة ↔ P , Q Є S→P-Q ⊆ S



مبرهنة (24) :-

a) كل مستقيم مجموعة محدبة.

البرهان :- ليكن m خط مستقيم و لتكن A,B نقطتان على المستقيم m وهما تعينان $\overline{AB}$

حسب مبرهنة(16): $\overline{AB} \subseteq m$

من تعريف المجموعة المحدبة يكون m مجموعة محدبة

b) كل نصف مستقيم بالنسبة O مجموعة محدبة .

c) أنصاف المستوي (جهتي المستقيم) تكون مجموعة محدبة. **واجب**

مبرهنة (25) :- قطعة المستقيم مجموعة محدبة

البرهان :- نفرض P-Q قطعة مستقيم يجب أن نبرهن P-Q مجموعة محدبة

نفرض X1-X2 Є P-Q يجب أن نبرهن أن X1-X2 ⊆ P-Q

نفرض Y Є X1-X2→[X1YX2]

من الفرض X1 , X2 Є P-Q نحصل على [PX1Q] ^ [PX2Q] حسب مبرهنة(1-9) نحصل

[PX1X2] V [PX2X1]

عندما [PX2X1]→من بديهيه 5 نحصل[X1X2P] ولدينا [X1YX2]

حسب مبرهنة ....

[X1X2P] ^ [X1YX2] ⟶[X1YX2P] → [X1YP] ⊆

من بديهيه 5 نحصل [PYX1] ولدينا [PX1Q]

حسب مبرهنة ....

$[PYX1] \wedge [PX1Q] \rightarrow [PYX1Q] \rightarrow [PYQ] \rightarrow Y \in P\text{-}Q$

عندما [PX1X2] ولدينا [X1YX2]

حسب مبرهنة ....

$[PX1X2] \wedge [X1YX2] \rightarrow [PX1YX2] \rightarrow [PYX2]$

ولدينا [PX2Q]

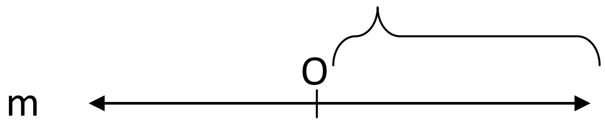
حسب مبرهنة ....

$[PYX2] \wedge [PX2Q] \rightarrow [PYX2Q] \rightarrow [PYQ] \rightarrow Y \in P\text{-}Q$

$\therefore$ P-Q مجموعة محدبة.

مبرهنة (*) :- تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة. **واجب**

تعـريــف :- مجموعة كل النقاط على المستقيم m والواقعة على جانب واحد من النقطة O تسمى شعاع (ray)وتسمى النقطة Oمصدر الشعاع .



يتعين الشعاع بمصدره ونقطة أخرى عليه . فإذا كانت النقطة A تنتمي إلى الشعاع الذي مصدره النقطة O فأنه يرمز لهذا الشعاع بالرمز $\overrightarrow{OA}$ ويقال للشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بأنهما متعاكسين إذا كانت النقطتين A وB واقعتين على جانبين متعاكسين من النقطة O.(إي ان الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هو مجموعة كل نقاط X على المستقيم m بحيث ان O لا تقع بين X و A بتعبير أخر $[OXA] \vee [OAX]$).

تعـريــف :- (جهة خط المستقيم)

إذا كان m مستقيم و P نقطة خارجه عنهُ فأنه تسمى أنصاف المستوي المتعينة بالمستقيم m جهتي خط المستقيم m

مبرهنة (26) :-

1) الشعاع مجموعة محدبة وليست خالية .

2) الشعاع مجموعة جزئية من المستقيم . **واجب**

3) لكل شعاع مصدر وحيد .

4) مصدر الشعاع لا ينتمي الى الشعاع . **واجب**

5) لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له

6) الشعاع الذي مصدرهُ واقعاً على خط مستقيم ولكنهُ لايقع على الخط المستقيم تكون جميع نقاطه واقعة على جانب واحد من ذلك الخط المستقيم .

مبرهنة (27) :-

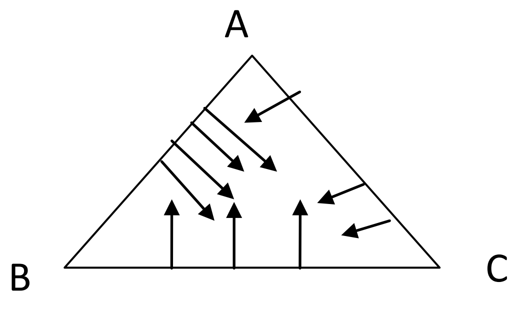
1) إذا كانت A , B نقطتين واقعتين على جهتين من الخط m و B , C واقعتين على جهة واحدة من m فأن A , C واقعتين على جهتين مختلفتين من m

2) إذا كانت A , B واقعتين على جهتين من الخط m و B , C واقعتين على جهتين مختلفتين من m فأن A , C واقعتين على جهة واحدة من الخط m

3) إذا كانت A , B واقعتين على جهة واحدة من الخط m و B , C واقعتين على جهة واحدة من الخط m فأن A , C واقعتين على جهة واحدة من الخط m

تعـريـف :- (داخـــل المثــلــث)

إذا كان ΔABC رؤوسهُ النقاط C , B , A فأننا نعني بداخل المثلث ABC هو مجموعة كل النقاط المتكونة من تقاطع كل من :-



1) جهة الخط AB التي تحوي النقطة C

2) جهة الخط BC التي تحوي النقطة A

3) جهة الخط AC التي تحوي النقطة B

لذلك فالنقاط التي تقع على المثلث تسمى نقاط حدودية والنقاط التي تقع داخل المثلث تسمى نقاط داخلية وماعدا ذلك تسمى نقاط خارجية .

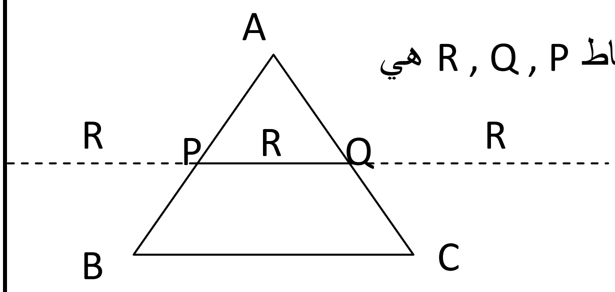
مبرهنة (28) :-

١ - داخل المثلث مجموعة محدبه . **واجب**

٢ - **اذا كانت** نقطتين **......** مبرهنة

٣ -داخل المثلث مجموعة غير خالية **. واجب**

مبرهنة (29) :- إذا كان ABC مثلث و Q , P نقطتين مختلفتين واقعتين على الضلعين AC , AB على التوالي وكانت R نقطة داخلية للمثلث ABC وتقع على المستقيم PQ فأنه [PRQ]



البرهان :- من بديهية 7 هنالك ثلاث احتمالات لترتيب النقاط R , Q , P هي

[PQR] ∨ [PRQ] ∨ [RPQ]

نفرض أن [RPQ]

من مبرهنة (27,1) النقاط Q , R تقعان على جهتين مختلفتين من الخط AB

من مبرهنة (6، 26) جميع نقاط الشعاع $\overrightarrow{AC}$ تقع على جهة واحدة من الخط AB

ومن ضمنها النقطتين C , Q

من مبرهنة (27، 1) النقطتان C , R تقعان على جهتين مختلفتين من الخط AB

وهذا يناقض كون R نقطة داخلية

∴ الترتيب [RPQ]غير ممكن

وبنفس الطريقة نبرهن أن الترتيب [PQR]غير ممكن (واجب)

∴ [PRQ] متحقق .