مبرهنة (5) :- إذا كانت [ABC] و [ACD] فأن A ,B, C, D مختلفة وعلى أستقامة واحدة .

البرهان :- من بديهية (6) ,A, B, C مختلفة وعلى أستقامة واحدة وكذلك A, B, C, D

للبرهنة على أن B ≠ D نفرض B = D

←[ABC] و [ACB] وهذا يناقض بديهية (7)

∴ النقاط A, B, C, D مختلفة

∵ النقاط B , D على أستقامة واحدة مع A , C

∴ النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى أستقامة واحدة .

مبرهنة (6) :- إذا كانت [ABC] و [ACD] فأنه [ABCD]

البرهان :- من مبرهنة (5) النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة

∴ [ABC]

∴ حسب بديهية (8) احد الاحتمالات التالية متحقق

[ABCD] أو [ABDC] أو [ADBC] أو [DABC]

إذا كان [ABDC] فأنه [ADC]تناقض لأن [ACD]

إذا كان [ADBC] فأنه [ADC]تناقض لأن [ACD]

إذا كان [DABC] فأنه [DAC]تناقض لأن [ACD]

∴ الاحتمال [ABCD] متحقق .

نتيجة :- إذا كانت [ABC] و [ACD] فأنه [ABD] و [BCD]

مبرهنة (7) :- إذا كانت [ABC] و [BCD] فأنه [ABCD]

مبرهنة (8) :- إذا كانت [ABD] و [BCD] فأنه [ABCD]

واجب

مبرهنة (9) :-

(1) إذا كانت [ABD] و [ACD] و B ≠ C فأنه [ABC] أو [ACB]

(2) إذا كانت [ABC] و [ABD] و C ≠ D فأنه [BCD] أو [BDC]

(3) إذا كانت [ABC] و [ABD] و C ≠ D فأنه [ACD] أو [ADC]

البرهان :- النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة حسب مبرهنة (5)

∴ [ABD]

∴ احد الاحتمالات التالية متحققة (حسب بديهية 8)

[ABDC] أو [ABCD] أو [ACBD] أو [CABD]

إذا كانت [ABDC] فأنه [ADC]تناقض لأنه [ACD]

إذا كانت [ABCD] فأنه [ACD] متحقق

إذا كانت [ACBD] فأنه [ACD] متحقق

إذا كانت [CABD] فأنه [CAD]تناقض لأن [ACD]

∴ أما [ABC] أو [ACB]

تعـريــــف :- إذا كانت A1 ≠ φ و A2 ≠ φ مجموعتين جزئيتين من المجموعة S فأن A1 و A2 تشكل تجزئة للمجموعة S

إذا كانت A1 ∩ A2 = φ و A1 U A2 = S

تعـريـف * :- إذا كانت O نقطة على المستقيم m وA نقطة أخرى على المستقيم نفرض أن S1 تمثل كل النقاط على المستقيم m والتي تشمل النقاط A وكل النقاط X بحيث أن [OAX] أو [OXA]
او S1 = {X∈m : [OXA]أو [OAX]}

ونفرض أن S2 تمثل مجموعة كل النقاط Y بحيث أن [YOA]

S2 = {Y∈m : [YOA]}

فأن S1و S2 تسمى أنصاف المستقيم m بالنسبة للنقطة O

مبرهنة (10) :- أنصاف المستقيم m بالنسبة للنقطة O لا تحتوي النقطة O

البرهان :- نفرض أن O ∈ S1

$\rightarrow$[OAO] أو [OOA]

وهذا تناقض لأنها نقاط مختلفة

O S1 .·.

[OOA] ← O S2 نفرض

وهذا تناقض لأنها نقاط مختلفة

O S1 و O S2 .·.

تعريــف :- ليكن φ ≠ S1 و φ ≠ S2 مجموعتين مختلفتين ومنفصلة عن المجموعة S ونفرض ان الشروط التالية متحققة :

١) لأي نقطتين S1 A و S2 B توجد نقطة S C تقع بين النقطتين A , B أي أن [ACB]

٢) لأي نقطتين S1 A , B أو S2 A , B فأنه لا توجد نقطة S C تقع بينهما أي أنه [ACB] غير متحقق فأنه يقال أن S تفصل S1 و S2

مبرهنة (11) :- أي نقطة O على المستقيم m تفصل m ,L مجموعتين غير خاليتين من أنصاف المستقيم والتي تشكل تجزئة للمستقيم m مع النقطة O

البرهان :- نفرض أن S1 ,S2 هي أنصاف المستقيم m واضح أن S1 و S2 مع النقطة O تشكل تجزئة للمستقيم m

للبرهنة على أن النقطة O تفصل m الى مجموعتين غير خاليتين من أنصاف المستقيم

(1) نفرض أن S1 x1 و S2 x2 يجب أن نبرهن أن [x1Ox2]

[Ox1A] ˅ [OAx1] ← S1 x1 ∵

[x2OA]←x2 S2

هناك ثلاث احتمالات للترتيب [x1Ox2] وهي :-

x1 = A أو [Ox1A]^[x2OA] أو [OAx1]^[x2OA]

[OAx1]^[x2OA] حسب مبرهنة (8) [x1AO]^[AOx2] حسب بديهية (5) نحصل على

[x1AOx2]←[x1Ox2]

إذا كان [Ox1A]^[x2OA] حسب بديهية (8) [x2Ox1A]←[x2Ox1]

إذا كانت x1 = A فأن الترتيب [x2OA] يصبح [x2Ox1]

(2) نفرض أن x1 , x2 Є S يجب إن نبرهن أن [x1Ox2] غير متحقق .

x1 Є S1←[Ox1A] ˅ [OAx1]

x2 Є S1←[Ox2A] ˅ [OAx2]

→ ([Ox1A] ˅ [OAx1]) ^ ([Ox2A] ˅ [OAx2])

→ ([Ox1A] ^ [Ox2A]) ˅ ([OAx1] ^ [Ox2A]) ˅ ([Ox1A] ^ [OAx2]) ˅ ([OAx1] ^ [OAx2])

١) إذا كان [Ox1A] ^ [Ox2A]←[Ox2x1] ˅ [Ox1x2] حسب مبرهنة (9-1)
∴ [x1Ox2] غير متحقق

٢) إذا كان [OAx1] ^ [Ox2A] حسب مبرهنة (8) ←[Ox2Ax1] ←[Ox2x1]
∴ [x1Ox2] غير متحقق

٣) إذا كان [Ox1A] ^ [OAx2] حسب مبرهنة (9-3) ˅ [Ox1x2]
[Ox2x1]←[Ox1x2]

٤) إذا كان [OAx1] ^ [OAx2] ←[Ox2x1] ˅ [Ox1x2] حسب مبرهنة (9-3)
∴ [x1Ox2] غير متحقق

إذا كانت x1, x2 Є S2

[x1OA] ^ [x2OA]

[x2x1O] ˅ [x1x2O] حسب مبرهنة (9-2)

∴ [x1Ox2] غير متحقق

∴ O تفصلm

ملاحظة :- المجموعتان S1 , S2 في التعريف * تسمى مجموعتان متعينة بالنقطتين O , A .

مبرهنة (12) :- إذا كانت O, A, A′ ثلاث نقاط مختلفة وعلى استقامة واحدة على المستقيم m فأن أنصاف المستقيمات بالنسبة لنقطة O والمتعينة بالنقطة O , A هي نفسها أنصاف

المستقيم المتعينة بالنقطتين O , A′.