متتابعة كوشـــي Cauchy sequence

تعريف:

يقال للمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها كوشي، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد طبيعي مثل N . بحيث ان $|S_n - S_m| < \varepsilon \quad , \quad \forall m , n \geq N$. خلاف ذلك المتتابعة ليست كوشي.

مثال: برهن ان المتتابعات التالية هي كوشي

1) $\left\{\frac{n+2}{2n+5}\right\}_{n=1}^{\infty}$

الحل: نأخذ $\varepsilon > 0$ يجب ان نبرهن انه يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \quad , \quad \forall m , n \geq N$$

نفرض ان ، $S_n = \frac{n+2}{2n+5} \quad , S_m = \frac{m+2}{2m+5}$

$$\therefore |S_n - S_m| = \left|\frac{n+2}{2n+5} - \frac{m+2}{2m+5}\right|$$

$$|S_n - S_m| = \left|\frac{n-m}{(2n+5)(2m+5)}\right|$$

$$|S_n - S_m| \leq \frac{n}{(2n+5)(2m+5)} + \frac{m}{(2n+5)(2m+5)}$$

$$< \frac{n}{(2n)(2m)} + \frac{m}{(2n)(2m)}$$

$$< \frac{n}{(n)(m)} + \frac{m}{(n)(m)}$$

$$= \frac{n}{mn} + \frac{m}{mn}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

(حسب خاصية ارخميدس)(نص مطلوب)يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} \quad , \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \qquad \qquad \frac{1}{N} < \varepsilon \quad , \forall m , n \geq N$$

$$|S_n - S_m| < \frac{2}{N} < \varepsilon \quad , \forall m , n \geq N$$

$$\boxed{\forall m , n \geq \frac{2}{\varepsilon}}$$

اذن المتتابعة كوشي .

$\left\{\frac{n^2+1}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (2

الحل: نأخذ $0 < \varepsilon$ يجب ان نبرهن انه يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \quad , \quad \forall m , n \geq N$$

نفرض ان $S_m = \frac{m^2+1}{m^3+1}$, $S_n = \frac{n^2+1}{n^3+1}$

$$\therefore |S_n - S_m| = \left|\frac{n^2+1}{n^3+1} - \frac{m^2+1}{m^3+1}\right|$$

$$= \left|\frac{n^2m^2(m-n) + m^3 - n^3 + n^2 - m^2}{(n^3+1)(m^3+1)}\right|$$

$$= \left|\frac{n^2m^3 - n^2m^2 + m^3 - n^3 + n^2 - m^2}{(n^3+1)(m^3+1)}\right|$$

$$\leq \frac{n^2m^3 + n^2m^2 + m^3 + n^3 + n^2 + m^2}{(n^3+1)(m^3+1)}$$

$$< \frac{n^2m^3 + n^2m^2 + m^3 + n^3 + n^2 + m^2}{(n^3)(m^3)}$$

$$= \frac{n^2m^3}{(n^3)(m^3)} + \frac{n^2m^2}{(n^3)(m^3)} + \frac{m^3}{(n^3)(m^3)} + \frac{n^3}{(n^3)(m^3)} + \frac{n^2}{(n^3)(m^3)} + \frac{m^2}{(n^3)(m^3)}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{nm^3} + \frac{1}{nm^3}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$$

$$= \frac{3}{n} + + \frac{3}{m}$$

(حسب خاصية ارخميدس(نص مطلوب)يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ $\qquad$ $\frac{1}{N} < \varepsilon$ $,\forall m , n \geq N$

$(\forall m , n \geq \frac{6}{\varepsilon})$

$$|S_n - S_m| < \frac{6}{N} < \varepsilon \quad , \forall m , n \geq N$$

اذن المتتابعة كوشي.

(3 $\left\{\frac{n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

الحل: نأخذ $\varepsilon > 0$ يجب ان نبرهن انه يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \quad , \quad \forall m , n \geq N$$

نفرض ان $S_n = \frac{n-1}{n+2} \quad , S_m = \frac{m-1}{m+2}$

$$\therefore |S_n - S_m| = \left|\frac{n-1}{n+2} - \frac{m-1}{m+2}\right|$$

$$= \left|\frac{(m+2)(n-1) - (n+2)(m-1)}{(n+2)(m+2)}\right|$$

$$= \left|\frac{mn - m + 2n - 2 - (mn - n + 2m - 2)}{(n+2)(m+2)}\right|$$

$$= \left|\frac{-3m + 3n}{(n+2)(m+2)}\right|$$

$$= 3\left|\frac{-m}{(n+2)(m+2)} + \frac{n}{(n+2)(m+2)}\right|$$

$$\leq 3\left(\frac{m}{(n+2)(m+2)} + \frac{n}{(n+2)(m+2)}\right)$$

$$< 3\left(\frac{m}{(n)(m)} + \frac{n}{(n)(m)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

(حسب خاصية ارخميدس(نص مطلوب)يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$\frac{1}{N} < \varepsilon \quad , \forall m , n \geq N \qquad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} \; , \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$

$(\forall m , n \geq \frac{6}{\varepsilon})$

$$|S_n - S_m| < \frac{6}{N} < \varepsilon \quad ,\forall m\,,n \geq N$$

$$\therefore \left|\frac{n-1}{n+2} - \frac{m-1}{m+2}\right| \leq \frac{6}{N} < \varepsilon\,,\forall m\,,n \geq \frac{6}{\varepsilon}$$

المتتابعة كوشي

مثال برهن ان المتتابعة $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متتابعة كوشي .

الحل/

نفرض ان المتتابعة كوشي ونأخذ $\varepsilon > 0$ ونفرض ان $S_n = \sqrt{n}$, $S_m = \sqrt{m}$

$$|S_m - S_n| = |\sqrt{n} - \sqrt{m}| = |\tfrac{n-m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}| \leq \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} + \frac{m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$$

بما ان $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي نحصل يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|\sqrt{n} - \sqrt{m}| \leq \sqrt{n} + \sqrt{m} < \epsilon\,, \forall n, m \geq N \in \mathbb{N}$$

وهذا لا يمكن لأن $\forall n, m \in \mathbb{N}$, كذلك $\sqrt{n} \geq \sqrt{N}\,, \sqrt{m} \geq \sqrt{N}$

اذن $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متتابعة كوشي .

مثال: بيّن ان المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست كوشي

الحل:

نفرض ان $\varepsilon = 1$ ونأخذ $m = 2m+1\,, n = 2n$

$$|S_n - S_m| = |(-1)^{2n} - (-1)^{2m+1}|$$

$$= |((-1)^2)^n - ((-1)^2)^m(-1)|$$

$$= |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1$$

المتتابعة ليست كوشي

مثال: بيّن ان المتتابعة $\left\{n + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ليست كوشي

نفرض ان $\varepsilon = 1$ ونأخذ $m = 2N-1\,, n = 2N$

$$|S_n - S_m| = \left|\left(2N + \frac{(-1)^{2N}}{N}\right) - \left((2N-1) + \frac{(-1)^{2N-1}}{2N-1}\right)\right|$$

$$= \left|\left(2N - \frac{1}{N}\right) + \left((-2N+1) + \frac{1}{2N-1}\right)\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{1}{N}\right) + \left(1 + \frac{1}{2N-1}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{N} + 1 + \frac{1}{2N-1}$$

$$1 + \frac{1}{N} + \frac{1}{2N-1} > \varepsilon = 1$$

مبرهنة/ اذا كانت $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي فأنها تكون مقيدة .

البرهان/ نفرض ان $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي و $\forall \in > 0, \exists N \in \mathbb{N}: |S_n - S_m|, \forall n, m \geq \mathbb{N}$

$|S_n - S_m| < \in \to |S_n| \leq \in + |S_m|, \forall n \geq N$

$M = \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots.. |S_{N-1}|, \in + |S_m|\}$

المتتابعة مقيدة $\to |S_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$

مبرهنة/ متتابعة الاعداد الحقيقية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة اذا وفقط اذا كانت متتابعة كوشي .

البرهان/ ← نفرض $\in > 0$ والمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة للعدد S

$$\to \exists N \in \mathbb{N}: |S_n - S| < \varepsilon, \forall n \geq N, |S_m - S| < \varepsilon, \forall m \geq N$$

$$\therefore |S_n - S_m| = |S_n - S_m - (s - s)| = |S_n - S - (S_m - S)|$$

$$\leq |S_n - S| + |S_m - S| < 2\varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

اذن المتتابعة كوشي

→ نفرض ان المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي كوشي

$$\to \exists N_1 \in \mathbb{N}: |S_n - Sm| < \varepsilon, \forall n, m \geq N_1$$

بما ان $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي ← المتتالعة مقيدة ومن مبرهنة بولزانو واير ستراس (كل متتابعة مقيدة تحتوي على متتابعة جزئية)

اذن يوجد متتابعة جزئية متقاربة من $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ولتكن $\{S_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

نفرض $S_{n_k} \to S$ عندما k$\to \infty$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} = \left|S_{n_k} - S\right| < \varepsilon,\ \forall n_k \geq N_2,$$

$$\longrightarrow |S_n - S| = \left|S_n - S - S_{n_k} + S_{n_k}\right| = \left|S_n - S_{n_k} + S_{n_k}\right| \leq \left|S_n - S_{n_k}\right| + \left|S_{n_k} - S\right| < 2\varepsilon, \forall n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$$

اذن المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة .

العمليات الجبرية على المتتابعات

مبرهنة:

إذا كانت $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعتين متقاربتين للعددين $S\ ,t$ على التوالي فأن

- $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n \pm S_n) = S \pm t$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n S_n) = St$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{T_n}\right) = \frac{S}{t} \quad t \neq 0$

البرهان

- $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n + S_n) = S + t$

نأخذ $\varepsilon > 0$ ونفرض ان $S_n \to S$ عندما $n \to \infty$, نحصـل يوجد عدد طبيعي مثل N_1 بحيث ان

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall n \geq N_1$$

وكذلك $T_n \to t$ عندما $n \to \infty$, نحصل يوجد عدد طبيعي مثل N_2 بحيث ان

$$|T_n - t| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall n \geq N_2$$

$$\longrightarrow |S_n + T_n - (S + t)| = |S_n - S + T_n - t| \leq |S_n - S| + |T_n - t| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall n \geq N = \max\{N_1\ , N_2\}$$

اذن

$$\lim_{n\to\infty}(t_n + S_n) = S + t$$

تمارين

1- بين فيما إذا كانت المتتابعات التالية مقيدة ام لا

-1 $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ -2 $\left\{1-\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

2- برهن ان المتتابعات التالية متقاربة

-1 $\left\{\frac{n^3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ للعدد1 -2 $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ للعدد 0 -3 $\left\{\frac{2^n}{2^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

للعدد 1

.3- برهن ان المتتابعات التالية هي كوشي تو لا

-1 $\left\{\frac{2^n}{2^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ -2 $\left\{\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ -3 $\left\{\frac{3^n}{2^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ -4 $\left\{n+\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

.4- برهن ان المتتابعات التالية متباعدة

-1 $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ -2 $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ -3 $\left\{\frac{3^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$