المتتابعات (المتتاليات) Sequences

تعريف2.1.1:

المتتابعة هي دالة مجالها الاعداد الطبيعية ومجالها المقابل الاعداد الحقيقية أي ان :

وتكتب بالشكل $: \mathbb{N} \to U \subseteq \mathbb{R}$

$$f(n) = S(n) = S_n \, , n \in \mathbb{N}$$

يرمز للمتتابعة بالرمز $< S_n >_{n=1}^{\infty}$ او بالرمز $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، بالتالي فأن

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$$

امثلة:

$$\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1,2,3,4,5, \ldots\}$$

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1, \ldots\}$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$$

$$\{1\}_{n=1}^{\infty} = \{1,1,1,1,1,1, \ldots\}$$

$S_n \in u \subseteq R$, S_n يمثل الحد النوني للمتتابعة

المتتابعة المقيدة

تعريف:

يقال للمتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ انها مقيدة، إذا وجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث $|S_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, خلاف ذلك يقال انها غير مقيدة .

ملاحظة: المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون مقيدة اذا كانت المجموعة $\{S_n : n \in N\}$ مقيده

مثال : بين فيما إذا كانت المتتابعات التالية بأنها مقيدة ام لا

1. $\{-n\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\left\{\frac{n+2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ H.W
5. $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ H.W

الحلول:

1. $\{-n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\{|-n\ |\}_{n=1}^{\infty}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

نحصل على ان متتابعة القيم المطلقة غير مقيدة بالتالي المتتابعة $\{-n\}_{n=1}^{\infty}$ غير مقيدة

2. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left\{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}$$

نحصل على ان متابعة القيم المطلقة مقيدة من الأعلى بـــ 1 ومن الأسفل بـــ 0`

اذن متابعة القيم المطلقة مقيدة ، اذن يوجد M يحقق الشرط ، اذن المتتابعة مقيدة

$$\left\{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}\leq 1=M$$

3. $\left\{\frac{n+2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left\{\left|\frac{n+2}{2n+1}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1,\frac{4}{5},\frac{5}{7},\frac{6}{9},\ldots\right\}$$

نحصل على ان متابعة القيم المطلقة مقيدة من الأعلى بـــ 1 ، اذن يوجد M يحقق الشرط

$$\left\{\left|\frac{n+2}{2n+1}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}\leq 1=M$$

تقارب المتتابعة

تعريف

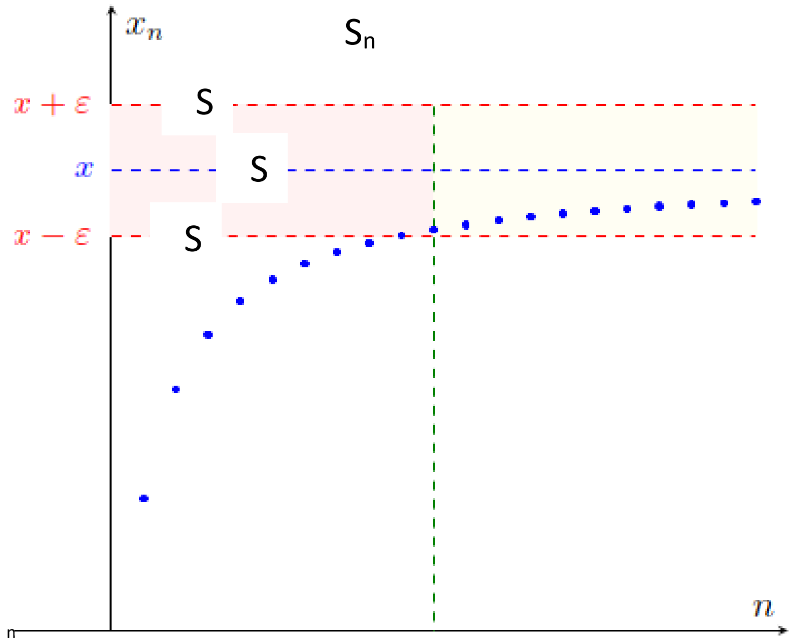
يقال للمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها متقاربة (convergent) للعدد S ، إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي(عدد صحيح موجب) مثل N بحيث أن

$$|S_n-S|<\varepsilon\ ,\forall\, n\geq N$$

خلاف ذلك تسمى المتتابعة متباعدة (Divergence)

- نكتب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ ، $S_n\to S$ عندما $n\to\infty$ ، وأن العدد S يســمى غاية (limit)المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

المتتاليات المتقاربة



مثال : برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد 1

الحل: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}: |S_n - S| < \varepsilon \;, \forall\, n \geq N$

نأخذ لكل $\varepsilon > 0$ يجب ان نبرهن ان يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S| < \varepsilon \;, \forall\, n \geq N$$

$$|S_n - S| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right|$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \;, \forall\, n \geq N$$

بمان $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان $\frac{1}{N} < \varepsilon \leftarrow \varepsilon N > 1$ (خاصية ارخميدس)

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \;, \forall\, n \geq N$$

اذن المتتابعة متقاربة للعدد 1.

مثال : برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n+1}{3n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد $\frac{1}{3}$

الحل: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathrm{N}: |S_n - S| < \varepsilon \ , \forall\, n \geq N$

نأخذ لكل $\varepsilon > 0$ يجب ان نبرهن ان يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S| < \varepsilon \ , \forall\, n \geq N$$

$$|S_n - S| = \left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{9n+6}\right|$$

$$\frac{1}{9n+6} < \frac{1}{9n} < \frac{1}{n}$$

$$\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \quad , \forall\, n \geq N$$

بمان $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان $\varepsilon N > 1 \leftarrow \frac{1}{N} < \varepsilon$ (خاصية ارخميدس)

$$\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \ , \forall\, n \geq N$$

اذن المتتابعة متقاربة للعدد $\frac{1}{3}$.

مثال : برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد 0

الحل: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathrm{N}: |S_n - S| < \varepsilon \ , \forall\, n \geq N$

نأخذ لكل $\varepsilon > 0$ يجب ان نبرهن ان يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S| < \varepsilon \ , \forall\, n \geq N$$

$$|S_n - S| = \left|\frac{1}{2n+1} - 0\right| = \left|\frac{1}{2n+1}\right|$$

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

$$\left|\frac{1}{2n+1} - 0\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \quad , \forall\, n \geq N$$

بمان $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان $\varepsilon N > 1 \leftarrow \frac{1}{N} < \varepsilon$ (خاصــية ارخميدس)

$$\left|\frac{1}{2n+1} - 0\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \quad < \varepsilon \ , \forall\, n \geq N$$

اذن المتتابعة متقاربة للعدد 0.

مثال : برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{4n+5}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد $\frac{4}{3}$

الحل: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathrm{N}: |S_n - S| < \varepsilon\ , \forall\, n \geq N$

نأخذ لكل $\varepsilon > 0$ يجب ان نبرهن ان يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|S_n - S| < \varepsilon\ , \forall\, n \geq N$$

$$|S_n - S| = \left|\frac{4n+5}{3n+1} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{11}{9n+3}\right|$$

$$\frac{11}{9n+3} < \frac{11}{9n} < \frac{11}{n}$$

$$\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{4}{3}\right| < \frac{11}{n} \leq \frac{11}{N}\quad , \forall\, n \geq N$$

بمان $\frac{\varepsilon}{11} > 0$ عدد حقيقي موجب يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان $\frac{\varepsilon}{11}N > 1 \leftarrow \frac{11}{N} < \varepsilon$ (خاصية ارخميدس)

$$\left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{4}{3}\right| < \frac{11}{n} \leq \frac{11}{N} < \varepsilon\ , \forall\, n \geq N$$

اذن المتتابعة متقاربة للعدد $\frac{4}{3}$.

مثال : برهن ان المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة

الحل: نفرض ان المتتابعة متقاربة للعدد $\varepsilon = 1, S$

اذن يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$$|n - S| < \varepsilon \quad , \forall\, n \geq N$$

$$n - |S| < |n - S| < \varepsilon$$

$$n - |S| < \varepsilon$$

$$n \leq \varepsilon + |S| \quad , \forall\, n \geq N$$

نلاحظ ان

$$N > N - 1 > N - 2 > \cdots > 1$$

نفرض ان

$$M = max\{N, \varepsilon + |S|\}$$

اذن $n < M$ لكل $n \geq 1$

اذن المتتابعة مقيدة

وهذا تناقض (لان المتتابعة غير مقيدة) ، اذن يجب ان تكون $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة .

تمارين :

1- برهن ان المتتابعة $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة

2. برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد 1

1- برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد $1/2$

2- برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{1}{6^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد 0

3- برهن ان المتتابعة $\left\{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العدد0

مبرهنة :غاية المتتابعة المتقاربة تكون وحيدة .

البرهان: نأخذ $\varepsilon > 0$ ونفرض ان S_1 , S_2 غايتين للمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, يجب ان نبرهن ان $S_1 \sim S_2$

بما ان $S_n \to S_1$ عندما $n \to \infty$ يوجد عدد مثل N_1 بحيث ان

$$|S_n - S_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall\, n \geq N_1$$

بالمثل $S_n \to S_2$ عندما $n \to \infty$ يوجد عدد مثل N_2 بحيث ان

$$|S_n - S_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall\, n \geq N_2$$

$$\therefore |\, S_2 - S_1 \,| = |\; S_1 - S_2 + S_n - S_n || \,(S_n - S_1) - (S_n - S_2)\,|$$

$$\leq |S_n - S_1| + |S_n - S_2|$$

$$\longrightarrow |S_2 - S_1\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \forall n \geq max\{\, N_1 \,, N_2\}$$

$$S_1 \sim S_2$$

مبرهنة: إذا كانت $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة، فأنها تكون مقيدة؟

البرهان: نأخذ $\varepsilon > 0$ ونفرض ان المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة للعدد S

يجب ان نبرهن انه يوجد عدد حقيقي مثل M $|S_n| < M \,, \forall n \geq N$

$\because$ المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة للعدد S

$\Leftarrow$ يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان $|S_n - S| < \varepsilon \quad , \forall n \geq N$

$\because$ $|S_n| - |S| < |S_n - S|$

$$\Rightarrow |S_n| - |S| < \varepsilon \quad , \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |S_n| < \varepsilon + |S| \quad , \forall n \geq N$$

نفرض ان $M = max\{|S_1|, |S_2|, \dots, |S_{N+1}|, \varepsilon + |S|\}$

$$\Rightarrow |S_n| < M \quad , \forall n \geq 1$$

$\therefore$ المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$مقيدة

ملاحظة: من المبرهنة أعلاه نلاحظ ان التقيد شرط ضروري لتقارب المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. أي ان في حاله عدم كون المتتابعة مقيدة فهي تكون متباعدة

ملاحظة: عكس المبرهنة اعلاه ليس دائماً صحيحاً اي ان ليس كل متتابعة مقيدة تكون متقاربة المثال التالي يوضح ذلك

مثال: المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$هي متتابعة مقيدة بالعددين 1,1- ولكنها ليست متقاربة وذلك لوجود غايتين للمتتابعة هما 1,1-

مثال: \المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$هي متتابعة متقاربة فإن هي مقيدة حسب المبرهنة مقيدة بالعددين0,1

مثال\ المتتابعة $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$هي متتابعة متقاربة فهي مقيدة بالعددين $\frac{1}{2}$,1