المتتابعات الرتيبة *Monotone Sequences*

تعريف: يقال للمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$بانها متزايدة (Increasing) اذا كانت $S_n \leq S_{n+1}$ لكل $n \in N$

ويقال بانها متناقصة (Decreasing) اذا كانت $S_n \geq S_{n+1}$ لكل $n \in N$.

اذا كانت اذا كانت $S_n < S_{n+1}$ لكل $n \in N$ فإن المتتابعة تسمى متزايدة بدقة (strictly increasing)،

واذا كانت اذا كانت $S_n > S_{n+1}$ لكل $n \in N$ تسمى المتتابعة متناقصة بدقة (strictly decreasing).

تعريف: يقال *للمتتابعة* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بانها رتيبة (Monotonic) اذا كانت متزايدة او متناقصة. خلاف ذلك تكون غير رتيبة .

امثلة:

1- المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \leftarrow \{1,2,3,\dots\}$ هي متتابعة متزايدة بدقة لان *n<n+1* $\forall n \in N$

2- المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$هي متتابعة متناقصه بدقة $\leftarrow \left\{1,\frac{1}{2},\dots\right\}$ لان *n>n+1* $\forall n \in N$

3-$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$هي متتابعة ليست متناقصة وليست متزايدة $\leftarrow \{-1,1,-1,1,-1,\dots\}$

$\therefore$ ليست رتيبة

مثال: برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{5+n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$هي متتابعة رتيبة

الحل: نفرض ان

$$s_n = \frac{5+n}{2n+1} \quad , s_{n+1} = \frac{5+n+1}{2(n+1)+1} = \frac{6+n}{2n+3}$$

$$s_{n+1} - s_n = \frac{6+n}{2n+3} - \frac{5+n}{2n+1}$$

$$=\frac{(6+n)(2n+1)-(5+n)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$=\frac{12n+6+2n^2+n-10n-15-2n^2-3n}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$=\frac{-9}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

$$s_{n+1} - s_n < 0 \;\; \rightarrow s_{n+1} < s_n$$

∴ متتابعة متناقصة ∴ متتابعة رتيبة

مثال: برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بانها رتيبة

الحل: $s_n = \frac{3}{n+5} \quad , s_{n+1} = \frac{3}{n+1+5} = \frac{3}{n+6}$

$$s_{n+1} - s_n = \frac{3}{n+6} - \frac{3}{n+5}$$

$$= \frac{3(n+5) - 3(n+6)}{(n+5)(n+6)}$$

$$= \frac{3n+15-3n-18}{(n+5)(n+6)}$$

$$= \frac{-3}{(n+5)(n+6)} < 0$$

∴ المتتابعة متناقصة ∴ متتابعة رتيبة

مثال: برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بانها رتيبة

الحل:

$$s_n = \frac{n^n}{n!} \quad , s_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{(n+1}{n})\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1$$

∴ المتتابعة متزايدة ∴ متتابعة رتيبة

مثال: برهن ان المتتابعة $\{\tan^{-1} n\}_{n=1}^{\infty}$ بانها رتيبة

الحل:

$$s_n = \tan^{-1} n$$

$$\therefore \mathrm{f(x)} = \tan^{-1} n \ \rightarrow f^{`}(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$$

∴ المتتابعة متزايدة ∴ المتتابعة رتيبة

تمارين

هل المتتابعات التالية رتيبة؟

1- $s_n = \left\{\frac{n!}{6^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 2- $s_n = \left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 3- $s_n = \left\{\frac{3n+4}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4- $s_n = \left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 5- $s_n = \{(-2)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 6- $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

مبرهنة: إذ ا كانت $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ المتتابعة مقيدة فأنها :

1) تكون متقاربة للعدد $\inf \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ إذا كانت متناقصة ($\lim_{n\to\infty} S_n = inf\{S_n \ , n \in N\}$)

2) تكون متقاربة للعدد $\sup \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ إذا كانت متزايدة ($\lim_{n\to\infty} S_n = sup\{S_n \ , n \in N\}$).

البرهان2:

نفرض ان المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$مقيدة ومتزايدة (رتيبة) نختار $\varepsilon > 0$

∵المتتابعة مقيدة من الاعلئ فانة يوجد عدد حقيقي $S = sup\{S_n \ \}$. بحيث ان

$$S_n \le S < S + \varepsilon \leftarrow |S_n| \le S, \forall n \in N$$

∵ $S = sup\{S_n \ \}$ ← العدد S-ε لا يمثل قيد العلوي للمتتابعة ←يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان العدد S_N يقع في الفترة $(S-\varepsilon, S)$ أي ان $S - \varepsilon < S_n < S$ (مبرهنة كثافة الاعداد النسبية)

∵ المتتابعة متزايدة ← $S_N \le S_n \ , \forall n \ge N$

← $S - \varepsilon < S_N \le S_n < S < S + \varepsilon \quad , \forall n \ge N$

← $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$

← $|S_n - S| < \varepsilon \ , \forall n \ge N$

∴ ان المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة الى $S = sup\{S_n \ \}$

مثال: برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة

الحل: نلاحظ ان المتتابعة مقيدة من الأعلى $M = \frac{1}{2}$ $\left(s_n < \frac{1}{2}, \forall n \in N\right)$ ومقيدة من الأسفل بالعدد 0

يجب ان نبرهن المتتابعة رتيبة

$$s_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad , s_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

$$s_{n+1} - s_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+1) - n(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{1-n-n^2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

$$s_{n+1} < s_n$$

$\therefore$ المتتابعة متناقصة $\qquad$ $\therefore$ المتتابعة رتيبة $\qquad$ $\therefore$ المتتابعة متقاربة الى العدد

$$\inf\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = 0$$

مثال: هل ان المتتابعة $\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ رتيبة ام لا ؟

الحل:

$\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة ليست رتيبة ولكنها متقاربة للعدد صفر اضافة الى ذلك بانها مقيدة

مثال: بين ان المتتابعة التالية $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ثم جد غايتها

$$\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

الحل: نلاحظ ان المتتابعة مقيدة من الأعلى للعدد 1 لذلك

$$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} < 1 \quad ,\forall n$$

كذلك ان المتتابعة متزايدة فتكون متقاربة $\sup \left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1$.

تمارين: 1- بين فيما اذا كانت المتتابعات متقاربة لو لا؟

-1 $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ -2 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

-2 بين ان المتتابعات التالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ثم جد غايتها .

المتتابعــــات الجزئية sub sequences

تعريف: إذا كانت $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الاعداد الحقيقية $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتابعة من الاعداد الطبيعية. بحيث

$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ فأن $\{S_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ تسمى متتابعة جزئية للمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$$

مثال / المتتابعة $\{\frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

مثال/ المتتابعة $\{1,1,1,1,\ldots..\}$ هي متتابعة جزئية من المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

مثال: المتتابعة $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

مثال: المتتابعة $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

مثال/ اذا كانت المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ معرفة بالشكل ; $S_n = \begin{cases} -1 & ,n \in \mathbb{N}e \\ \frac{-n}{n+1} & n \in N_o \end{cases}$

1-هل ان المتتابعة مقيدة؟

2-هل ان المتتابعة متقاربة ؟

3-هل تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة ؟اذا كان الجواب نعم اوجدها .

الحل:-

-1 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}=\{S_1,S_2,S_3,\ldots.\}=\{\frac{-1}{2},-1,\frac{-3}{4},-1\ ,\frac{-5}{6},\ldots..\}$

$$\{|S_n|\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{4},1\ ,\frac{5}{6},\ldots..\}$$

يوجد عدد مثل M=1 بحيث ان: $|S_n|\le 1$ لكل $n\in N$ ← المتتابعة مقيدة

← $Inf(S_n)=-1\ ,\quad Sup(S_n)=\frac{-1}{2}$

-2 نعم المتتابعة متقاربة الى العدد $S=-1$ لان

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n+1}\right)=-1$ عندما n عدد فردي

, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)=-1$ ←عندما n عدد زوجي

-3 نعم تحتوي متتابعتان جزئيتان $\{-1,-1,-1,\ldots.\}$, $\{\frac{-(2k-1)}{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ كلاهما متقاربتان .

مبرهنة: بدون برهان (بولزانوا ـ واير ستراس)

كل متتابعة مقيدة تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة .

مبرهنة / المتتابعة المقيدة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة الى العدد S اذا وفقط اذا كانت جميع المتتابعات الجزئية للمتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة للعدد S.

ملاحظة/ 1) اذا امكن إيجاد متتابعتين جزئيتين متقاربتين الى نهايتين مختلفتين فان المتتابعة الاصل $<X_n>_{n=1}^{\infty}$ ليست متقاربة

مثال/ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متقاربة

الحل/

$\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}=<(-1)^{2n}>_{n=1}^{\infty}$, $\{(S_{2n-1})\}_{n=1}^{\infty}=\{((-1)^{2n-1})\}_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}=1$ متقاربة , متقاربة $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n}=1$

2) اذا اوجدنا متتالية (متتابعة) جزئية $<X_{nk}>_{k=1}^{\infty}$ غير متقاربة فان المتتابعة الام $<X_n>_{n=1}^{\infty}$ غير متقاربة .

مثال/

ليست متقاربة $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$,

ليست متقاربة $< S_n >= \begin{cases} n & ,n \in \mathbb{N}e \\ \dfrac{1}{n} & n \in N_o \end{cases}$ $\therefore$

مبرهنة:

المتتابعة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة للعدد S . إذا وفقط إذا كانت جميع المتتابعات الجزئية منها متقاربة الى العدد S.

مثال: المتتابعة $\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لعدد 0 ، لأنها تحتوي على المتتابعات الجزئية $\left\{\frac{1}{2^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{-1}{2^{2n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ وهاتين المتتابعتين يقتربان للعدد 0

مثال: المتتابعة $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لعدد 0 ، لأنها تحتوي على المتتابعات الجزئية $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{-1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ وهاتين المتتابعتين يقتربان للعدد 0

مثال: المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة، لأنها تحتوي على المتتابعات الجزئية $\{1,1,1,1,1,\dots\}$ حيث تقترب للعدد 1 بينما تقترب المتتابعة $\{-1,-1,-1,-1,-1,\dots\}$ الى العدد -1 وهاتين الغايتين مختلفتين .

تمارين

A. جد الحد العام للمتتابعات التالية: -

1. $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$
2. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\right\}$
3. $\{2,2,2,0,0,0,\dots\}$
4. $\{-4,-4,-4,-4,4,4,4,4,\dots\}$

B. بين فيما إذا كانت المتتابعات التالية رتيبة ام لا

1. $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\left\{\frac{4n+3}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

C. بين فيما إذا كانت المتتابعات التالية متقاربة ام لا

1. $\left\{2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots\right\}$

2. $\left\{3+2\,, 3-\frac{2}{2}\,, 3+\frac{2}{3}\,, 3-\frac{2}{4}\,, \dots\right\}$

3. $\left\{\frac{1}{2}\,, 1\frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, 1\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, \dots\right\}$

4. $\{-1, -4\,, -9\,, -16\,, \dots\}$

D. إذا كانت $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة معرفة بالشكل

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2n+1} & if\ \ n\ \ is\ odd \\ 1 & if\ \ n\ \ is\ even \end{cases}$$

1) هل المتتابعة مقيدة

2) هل ان المتتابعة متقاربة

3) هل تحتوي على متتابعات جزئية متقاربة؟ إذا كان الجواب نعم اوجدها