المجموعات القابلة للعد ***:Countable Sets***

تعريف: يقال للمجموعتين A, B بأنهما متكافئتان إذا وجدت دالة تمثل تقابل بين المجموعتين.

مثال إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ فان الدالة $f: A \rightarrow B$ لمعرفة على الشكل $f(1) = a_1\ , f(2) = a_2\ , f(3) = a_3\ , f(4) = a_4\ , f(5) = a_5\ , f(6) = a_6$

تمثل دالة متباينة وشاملة بين المجموعتين A ,B لذلك فأن المجموعتين مكافئتان وتكتب (A~B)

تعريف: يقال للمجموعة $A \subset R$ بأنها قابلة للعد أذا كانت متكافئة مع (مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

تعريف : يقال للمجموعة A بانها منتهية إذا كانت تكافئ مجموعة الاعداد الطبيعية المنتهية $\{1,2,3, \ldots, n\}$.

ملاحظة: اي مجموعة منتهية تكون قابلة للعد.

مثال: برهن ان مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية قابلة للعد.

الحل: نفرض ان $\mathbb{N}_e$ تمثل مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية

إذا كانت $\mathbb{N}_e$ منتهية فأن الدالة $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_e$ المعرفة بالشكل $f(n) = 2n$ تمثل تقابل بين المجموعتين $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_e$ لذلك تكون $\mathbb{N}_e$ قابلة للعد.

إذا كانت $\mathbb{N}_e$ غير منتهية يجب ان نبرهن ان الدالة $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_e$ متباينة وشاملة

متباينة : نفرض ان

$$\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2 \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{f}(\mathrm{n}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{n}_2) \Longrightarrow 2\mathrm{n}_1 = 2\mathrm{n}_2 \Longrightarrow \mathrm{n}_1 = \mathrm{n}_2$$

اذن الدالة f متباينة.

شاملة: الان نفرض ان $\forall k \in \mathbb{N}_e$

$$\Longrightarrow k = f(n) = 2n \Longrightarrow n = \frac{k}{2} \Longrightarrow f\left(\frac{k}{2}\right) = 2\frac{k}{2} = k$$

اذن الدالة f شاملة(الدالة f متقابلة) منه نحصل على ان المجموعة $\mathbb{N}_e$ قابلة للعد.

مثال: برهن أن المجموعة $N \times N$ مجموعة قابلة للعد؟

البرهان:

$$(1,1) \rightarrow (1,2) \quad (1,3) \quad (1,4) \quad (1,5), \ldots$$

$$(2,1) \rightarrow (2,2) \quad (2,3) \quad (2,4) \quad (2,5), \ldots$$

$(3,1) \to (3,2) \quad (3,3) \quad (3,4) \quad (3,5), \ldots$

$(4,1) \to (4,2) \quad (4,3) \quad (4,4) \quad (4,5), \ldots$

… … …. … … ….

… …. …. … ….

…

الدالة $f: N \to N \times N$ المعرفة بالشكل:

1 2 3 4 5 6 7 8 …..

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

(1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (2,2) (3,1) (1,4) (2,3) …..

تمثل تقابل بين المجموعتين نحصل منه المجموعة $N \times N$ قابلة للعد.$(N \sim N \times N)$

مثال: بيّن فيما إذا كانت المجموعة $[-10, 10] \cap \mathbb{Z}$ قابلة للعد.

الحل:

$$\mathbb{Z} \cap [-10, 10] = \{-10, -9, -8, \ldots, 0,1,2,3,4, \ldots 10\}$$

بما ان المجموعة منتهية فأنها قابلة للعد.

مثال: بيّن فيما إذا كانت المجموعة $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 1 \leq 4\}$ قابلة للعد.

الحل:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 5\} \Longrightarrow A = \{x \in Z : |x| \leq \sqrt{5}\}$$

$$\Longrightarrow A = \{x \in \mathbb{Z} : -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}\}$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

اذن المجموعة A منتهيه تحتوي على 5 عناصر فهي قابلة للعد.

خصائص المجموعات القابلة للعد

1- اذا كانت المجموعتان $A\,,B$ *قابلتان للعد فان* $A\cup B,\ \ A\cap B,\ \ A\times B$

2- كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد.

بعض الامثلة عن المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد.

1- مجموعة الاعداد النسبية تكون قابلة للعد.

2- المجموعة $(0,1)$ غير قابلة للعد.

3- مجموعة الاعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

4- مجموعة الاعداد $Z\times Z$ تكون قابلة للعد.

<u>المجموعات المقيدة</u> Bounded sets

تعريف

يقال للمجموعة الغير خالية A بأنها مرتبة (ordered set) اذا وجدت علاقة $(<)$ بحيث ان

1- لكل عنصرين $a,b\in A$ يحقق واحد فقط مما يلي

$$a>b \ \text{او}\ \ a=b\ \ \text{او}\ \ a<b$$

2- اذا كانت $a<b$ و $b<c$ فان $a<c$

مثال: مجموعة الاعداد النسبية , مجموعة الاعداد الصحيحة تكون مجموعة مرتبة

تعريف يقال للمجموعة الغير خالية B بأنها مقيدة من الأسفل (Bounded below) إذا وجد عدد حقيقي مثل b بحيث ان $x\geq b$ لكل $x\in B$ ويسمى العدد b قيد أسفل(قيد سفلي((Lower Bound)) للمجموعة B.

تعريف

يقال للمجموعة الغير خالية A بأنها مقيدة من الأعلى (Bounded above) إذا وجد عدد حقيقي مثل a بحيث ان $x\leq a$ لكل $x\in A$ ويسمى العدد a قيد اعلى(قيد علوي(Upper Bound)) للمجموعة A.

مثال :

1- مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{1,2,3,4 \dots\}$ مقيدة من الأسفل بالعدد $a = 1$.

2- المجموعة $A = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ تكون مقيدة من الأعلى بالعدد b= 0 ومقيدة من الأسفل بالعدد a=-1

تعريف

يقال للعدد b_0 بانه أكبر قيد سفلي (Greatest Lower Bound) او (Infimum) للمجموعة B

إذا كان $b_0 \geq b$ حيث b أي قيد سفلي اخر للمجموعة B ويرمز له بالرمز $b_0 = inf\ B$.

تعريف يقال للعدد a_0 بانه أصغر قيد علوي (Least Upper Bound) او (Supremum) للمجموعة A . إذا كان $a_0 \leq a$ حيث a أي قيد علوي اخر للمجموعة A ويرمز له بالرمز $a_0 = sup\ A$.

تعريف

يقال للمجموعة الغير الخالية A انها مقيدة (Bounded) إذا كانت مقيدة من الأعلى ومن الاسفل. خلاف ذلك تكون غير مقيدة (Unbounded).

ملاحظات:

$inf\ A$ و $sup\ A$ إن وجدت ليس من الضروري تنتمي للمجموعة A.

1) إذا كانت $inf\ A$ و $sup\ A$ موجودة و تنتمي للمجموعة A يكون $inf\ A =$ $min\ A$ و $sup\ A = max\ A$.

2) إذا كان $sup\ A$ غير موجود فيكتب $sup\ A = \infty$.

3) إذا كان $inf\ A$ غير موجودة فيكتب $inf\ A = -\infty$.

4) المجموعة الخالية تكون غير مقيدة حيث $inf\ A = \infty$ و $sup\ A = -\infty$.

5) إذا كانت المجموعة A منتهية فان $inf\ A$ و $sup\ A$ يقع في المجموعة A

6) اصغر قيد علوي وحيد وكذلك اكبر فيد سفلي وحيد

7) إذا كانت المجموعة A غير خالية فان $inf\ A \leq sup\ A$

مثال : المجموعة $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{10}\}$ حيث ان $a_0 < a_1 < \dots < a_{10}$ هي مجموعة مقيدة من الأسفل بالعدد a_0 ومن الأعلى بالعدد a_{10} لذلك فأنها مقيدة $maxA = sup\ A = a_{10} \in A,\ minA = inf\ A = a_0 \in A$.

مثال : المجموعة $A=\{-3\,,-2\,,-1\,,0,1,2,3\}$ هي مجموعة مقيدة من الأســفل بـالعـدد -3 ومن الأعلى بـالعـدد3 لـذلـك فـأنـهـا مقيـدة $maxA = sup\,A\ = 3 \in A,\ minA = inf\ A = -3 \in A$.

مثال : الفترة المغلقة$[a\,,b]$ حيث $a\,,b$ اعداد حقيقية هي مجموعة مقيدة من الأعلى بالعدد b ومن الأسفل بالعدد a لذلك فأنها مجموعة مقيدة.

$$sup[a\,,b]\ = b \in [a\,,b]\ ,\quad inf[a\,,b] = a \in [a\,,b]$$

مثال : مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{1,2,3,4\ldots\}$ مقيدة من الأســفل بالعدد 1 بينما لا يوجد قيد علوي للمجموعة حيث $sup\,\mathbb{N}\ = \infty$ لذلك فهي غير مقيدة.

مثال : إذا كانت $A = \{(-1)^n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ جد $sup\,A\ ,inf\ A$ ان وجدت ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة مقيدة ام لا.

الحل:
$$A = \{(-1)^n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{0,2\}$$
$$sup\,A\ = 2 \in A\,,\quad inf\ A = 0 \in A$$

اذن المجموعة مقيدة.

مثال : إذا كانت $A = \left\{\frac{2^n}{3^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ جد $sup\,A\ ,inf\ A$ ان وجدت ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة مقيدة ام لا.

الحل: $A = \left\{\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{8}{27},\ldots\right\}$ نلاحظ ان اكبر عدد في المجموعة هو $\frac{2}{3}$ و اصــغر عدد نحصل عليه عندما $n \to \infty$ لذلك فان $maxA \neq sup\,A\ = \frac{2}{3} \in A,\ \ minA = \ inf\ A = 0 \notin A$

اذن المجموعة مقيدة.

مثال : إذا كانت $A = \{(-1)^n + m\ : n, m \in \mathbb{N}\}$ جد $sup\,A\ ,inf\ A$ ان وجدت ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة مقيدة ام لا.

الحل: لإيجاد $sup\,A\ ,inf\ A$ نقوم بترتيب عناصر المجموعة في الشكل التالي

-1+1, -1+2, -1+3, -1+4,…

1+1 , 1+2, 1+3, 1+4,…

-1+1, -1+2, -1+3, -1+4,…

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

نلاحظ ان عناصر المجموعة هي اعداد صحيحة موجبة يكون العدد صفر احدها اضافة الى ذلك انها تتوسع الى اللانهاية لذلك فأن $sup\, A = \infty,\ minA = inf\, A = 0 \in A$.

اذن المجموعة غير مقيدة.

مثال : إذا كانت $A = \left\{\frac{(-1)^n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ جد $sup\, A\ , inf\, A$ ان وجدت ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة مقيدة ام لا.

الحل: $A = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots\right\}$ نلاحظ ان أكبر عدد في المجموعة هو $\frac{1}{4}$ بينما أصغر عدد هو $\frac{-1}{2}$ لذلك فان

$$maxA = sup\, A = \frac{1}{4} \in A, \quad minA = inf\, A = -\frac{1}{2} \in A$$

اذن المجموعة مقيدة.

مثال : إذا كانت $A = \{x \in R : x^2 - 9 \geq 0\}$ جد $sup\, A\ , inf\, A$ ان وجدت ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة مقيدة ام لا.

الحل: $A = \{x \in R : x^2 - 9 \geq 0\} = \{x \in R : (x-3)(x+3) \geq 0\}$

$A = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ نلاحظ ان القيود العليا و السفلى غير موجودة لذلك فان

$$sup\, A = \infty, \quad inf\, A = -\infty$$

اذن A غير مقيدة.

مثال إذا كانت $A = \left\{n + \frac{1}{m} : m, n \in N\right\}$ جد $sup\, A\ , inf\, A$ ان وجدت ثم بيّن فيما إذا كانت المجموعة مقيدة ام لا.

الحل: نقوم بترتيب عناصر المجموعة في الشكل التالي

$$1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \dots$$

$$2+1, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \dots$$

$$3+1, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4}, \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

نلاحظ ان عناصر المجموعة تكون اعداد نسبية موجبة اصغرها العدد 1 يمكن الحصول عليه من الصف الاول عندما تتوسع m الى اللانهاية بينما اكبر عنصر لا يمكن الوصول اليه لأننا نلاحظ من العمود الاول ان عناصر المجموعة تتوسع الى اللانهاية لذلك فان

$$sup\, A = \infty , \qquad inf\, A = 1 \in A$$

اذن المجموعة غير مقيدة.

خاصية اصغر قيد العلوي. (خاصية الكمال)

إذا كانت $A \neq \emptyset$ مجموعة الاعداد الحقيقية لها قيد علوي فأنه يوجد عدد حقيقي a_0 بحيث ان $sup\, A = a_0$.

(مبرهنة) خاصية اكبر قيد سفلي

إذا كانت $A \neq \emptyset$ مجموعة الاعداد الحقيقية قيد سفلي فأن يوجد عدد حقيقي b بحيث ان $inf\, A = b$.

البرهان :

لتكن المجموعة T معرفة على الشكل $T = \{-x : x \in A\}$

هذا يؤدي الى ان المجموعة $T \neq \emptyset$ لأن المجموعة $A \neq \emptyset$.

نفرض ان k قيد سفلى للمجموعة A اذن $x \geq k$ لكل $x \in A$ منه نحصل على ان $-x \leq -k$ لكل $x \in A$ هذا يؤدي الى ان العدد $-k$ هو قيد علوي للمجموعة T,

اذن يوجد أصغر قيد علوي للمجموعة T مثل $sup\, T = t$ (خاصية الكمال)

نتيجة الى ذلك نحصل على انه $-x \leq t$ لكل $x \in A$ وبالتالي فان $x \geq -t$ لكل $x \in A$ نتيجة الى ذلك العدد $-t$ يمثل قيد سفلي للمجموعة A.

يجب ان نبرهن الان ان العدد $-t$ هو أكبر قيد سفلي للمجموعة A لذلك نفرض ان a هو اي قيد سفلي اخر للمجموعة A. نحصل على ان $x \geq a$ لكل $x \in A$ بالنتيجة يكون $-x \leq -a$ لكل $x \in A$ و منه نحصل على ان $-a$ قيد علوي للمجموعة T, لكن

$sup\,T$ هو اصـــغر قيـد علوي للمجموعـة T اذن $-a \geq sup\,T$ و بـالتـالي يكون $a \leq -t$. اذن $inf\ A = b = -t$.

نلاحظ من خاصـية القيد العلوي و مبرهنة اعلاه ان الشـروط الضـرورية لوجود القيود العليا و السفلى للمجموعة الغير خالية A هو وجود $sup\,A$ و $inf\ A$.

مثال : جد القيود العليا والسفلى للمجموعة $A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ان وجدت.

الحل:

$$A = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots\right\} \Longrightarrow \quad sup\,A = 2 \in A \ , inf\ A = 1 \notin A$$

اذن الشروط الضرورية متحققة لذلك فان مجموعة القيود العليا هي

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$ و مجموعة القيود السفلى هي $S_2 = \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq 1\}$.

مثال : إذا كانت $B = \{n - m:\ m, n \in \mathbb{N}\}$ جد القيود العليا و السفلى ان وجدت.

الحل: نقوم بترتيب عناصر المجموعة في الشكل التالي

$$1 - 1, 1 - 2, 1 - 3, 1 - 4, \dots$$

$$2 - 1, 2 - 2, 2 - 3, 2 - 4, \dots$$

$$3 - 1, 3 - 2, 3 - 3, 3 - 4, \dots$$

نلاحظ ان المجموعة B تحتوي على اعداد صحيحة موجبة وسالبة. الاعداد السالبة تتوسع الى $-\infty$

بينما الاعداد الموجبة تتوســـع الى ∞ لذلك فأن $sup\, B = \infty, \quad inf\, B = -\infty$ هذا يؤدي الى ان القيود العليـا والســـفلى للمجموعـة B غير موجودة لعدم تحقق الشـــروط الضرورية.

تمارين

1- جد القيود السفلى والعليا للمجموعات التالية ان وجدت ثم بين فيما إذا كان مقيدة ام لا

1) $A_1 = \{ (-1)^n n \ : n \in \mathbb{N}\}$

2) $A_2 = \{\frac{1}{n} + \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

3) $A_3 = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \ : n \in \mathbb{N}\right\}$

4) $A_4 = \{ \sqrt{2} + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$

5) $A_5 = \left\{\frac{1}{n} + m \ : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

6) $A_6 = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} \ : n \in \mathbb{N}\right\}$

2- اذا كانت المجموعة A غير خالية برهن ان $sup\, A$ و $inf\, A$ وحيد.