الأعداد الحقيقية(مجموعات الاعداد) Real Numbers

1) مجموعة الاعــداد الطبيعية *Natural Numbers*

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

2) مجموعة الاعـداد الصحيحة *Integer Numbers*

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

3) مجموعة الاعداد النسبية *Rational Number*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z} ; b \neq 0\right\}$$

4) مجموعة الاعداد غير النسبية *Irrationals Number*

هي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتُها على الشكل $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$. سوف نرمز لمجموعة الاعداد غير النسبية بالرمز $\mathbb{Q}^c$.

ملاحظة : أي عدد حقيقي لا يكون عدداً نسبياً يسمى عدد غير نسبي ,تتميز الأعداد النسبية عن الأعداد غير النسبية أنه عند كتابة الأعداد النسبية بالصيغة العشرية يكون دورياً , أما الأعداد غير النسبية عند كتابتها بالصيغة العشرية فإنه يكون غير دوري .

أمثلة :

$0.3 \approx 0.3333\ldots = \frac{1}{3}$

عدد نسبي

$\sqrt{2}$ =0.141421356…

عدد غير نسبي

5) الاعداد الحقيقية Real Numbers

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}^c \cup \mathbb{Q} = (-\infty , \infty)$$

(الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة كل عدد منها يمثل نقطة على محور الاعداد مثل $\sqrt{2}$, $\sqrt{14}$ وغيرها)

امثله على الاعداد النسبية، $2, 3, -5, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$.

امثلة على الاعداد غير النسبية $\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, e \approx 2.71828, \pi$.

مثال: برهن ان العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي.

الحل. نفرض ان العدد $\sqrt{2}$ نسبي, اذن توجد اعداد صحيحة موجبة مثل p و q بحيث ان $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ و $GCD(p,q)=1$.

$$\Longrightarrow \quad 2=\frac{p^2}{q^2} \quad \Longrightarrow \quad p^2=2q^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2=\frac{p^2}{2}$$

اذن العدد 2 يقسم p^2 و منه نحصل على ان العدد 2 يقسم p, لذلك نفرض ان $p=2k$ حيث k

عدد صحيح. هذا يؤدي الى انه

$$4k^2=2q^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2=2k^2 \Longrightarrow \quad k^2=\frac{q^2}{2}$$

وهنا نجد ان العدد 2 يقسم q^2 و منه نحصل على ان العدد 2 يقسم q

$GCD(p,q)=2 \neq 1$ وهذا تناقض اذن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

مثال: برهن ان $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ عدد غير نسبي

الحل: نفرض ان العدد $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ نسبي, اذن توجد اعداد صحيحة مثل p و q بحيث ان

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=\frac{p}{q}, q \neq 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{3}=\frac{p}{q}-\sqrt{2}$$

بتكعيب الطرفين

$$3=\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)^3 \Longrightarrow 3=\frac{p^3}{q^3}-3\sqrt{2}\frac{p^2}{q^2}+6\frac{p}{q}-2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow 3=\frac{p^3}{q^3}-\sqrt{2}\left(3\frac{p^2}{q^2}+2\right)+6\frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \ \frac{p^3}{q^3} + 6\frac{p}{q} - 3 = \sqrt{2}\left(\frac{3p^2 + 2q^2}{q^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p^3 + 6pq^2 - 3q^3}{q^3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{3p^2 + 2q^2}{q^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p^3 + 6pq^2 - 3q^3}{3p^2q + 2q^3}$$

بما انه p و q اعداد صحيحة اذن العدد $\sqrt{2}$ يكون نسبي وهذا غير ممكن (تناقض).

∴ العدد $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ يجب ان يكون غير نسبي.

مبرهنة(1)

إذا كان n عدد صحيح موجب لا يمثل مربع كامل فأن $\sqrt{n}$ عدد غير نسبي.

البرهان. نفرض ان العدد $\sqrt{n}$ نسبي, اذن توجد اعداد صحيحة موجبة مثل a و b بحيث ان $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ و $GCD(a,b) = 1$.

$$n = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \ a^2 = nb^2 \ \Rightarrow \ b^2 = \frac{a^2}{n}$$

اذن a^2 يقبل القسمة على n و منه نحصل على انه a يقبل القسمة على n. نفرض ان $a = nk$

حيث k عدد صحيح موجب هذا يقتضي انه $n^2k^2 = nb^2$ و منه نحصل على انه $\frac{b^2}{n} =$ اذن k^2

b^2 يقبل القسمة على n و منه نحصل على انه b يقبل القسمة على n اذن $GCD(a,b) =$ $n \neq 1$ وهذا تناقض, لذلك يجب ان يكون $\sqrt{n}$ عدد غير نسبي

<u>واجب:</u>

برهن ان كل عدد من الاعداد التالية عدد غير نسبي

1) $\sqrt{10}$ **2)** $\sqrt{7}$ **3)** $\sqrt{2}$ **4)** $\sqrt[3]{3}$ **5)** $\log_3 6$ **6)** $\log_2 7$

خاصية أرخميدس :

إذا كان x, y عدداً حقيقياً وكان $x > 0$, يوجد عدد صحيح موجب مثل n بحيث أن $n.x > y$.

يمكن أخذ حالة خاصة عندما $y=1$ فتصبح خاصية أرخميدس بالشكل التالي :

لكل عدد حقيقي أكبر من صفر مثل $x>0$ يوجد عدد طبيعي مثل n يحقق $n.x > 1$.

مبرهنة (2) فقط نص

إذا كان x عدد حقيقي موجب فإنه يوجد عدد صحيح موجب مثل n بحيث $n \leq x < n + 1$.

مبرهنة الكثافة للأعداد النسبية: **Density Theorem of Rational Numbers**

مبرهنه (3) : بين اي عددين حقيقيين يوجد عدد نسبي

البرهان:

نفرض x, y عددين حقيقيين بحيث أن

$0 < x < y \rightarrow$ يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث ان

$(y - x) > 0$

(حسب خاصية ارخميدس) $(y - x) . N > 1$

حسب مبرهنه (2): يوجد عدد صحيح موجب مثل n بحيث ان:

$\because N.x \in R$

$$n \leq N.\mathrm{x} < n + 1$$

$$\longrightarrow \quad n + 1 \leq N . x + 1 < N . x + N (y - x)$$

$$= N . x + N . y - N . x$$

$$= N . y$$

$$\longrightarrow \quad N . x < n + 1 < N . y$$

$$\rightarrow x < \frac{n+1}{N} < y$$

$\therefore \ \frac{n+1}{N}$ عدد نسبي

<u>مبرهنة كثافة الاعداد غير النسبية</u>

مبرهنه (4) : بين اي عددين حقيقيين يوجد عدد غير نسبي

البرهان:

نفرض x, y عددين حقيقيين بحيث أن $0 < x < y$

$\rightarrow \ y - x > 0 \ \rightarrow (y - x)^2 > 0$

حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب مثل M لا يمثل مربع كامل بحيث ان:

$M(y - x)^2 > 1 \ \rightarrow \ \sqrt{M}(y - x) > 1 \ \rightarrow \ \sqrt{M}\, y \ > \ \sqrt{M}\ (x + 1)$

العدد $\sqrt{M}$ غير نسبي (حسب مبرهنه (1)).

بما ان $x\sqrt{M}$ عدد حقيقي موجب فانه حسب مبرهنه (2) يوجد عدد صحيح موجب مثل n بحيث ان :

$n \ \leq x\sqrt{M} < n + 1$

$\rightarrow n + 1 \ \leq x\sqrt{M} + 1 < y\sqrt{M}$

$\rightarrow x\sqrt{M} < n + 1 < \ y\sqrt{M}$

$\rightarrow x < \frac{n+1}{\sqrt{M}} < y$

العدد $\frac{n+1}{\sqrt{M}}$ عدد غير نسبي يقع بين x, y

<u>مثال:</u> أوجد عدد غير نسبي في الفترة التالية: (0.2 , 0.1)

الحل: $0.2 - 0.1 = 0.1 > 0$ $\qquad (0.1)^2 = 0.01 > 0$

باستخدام خاصية ارخميدس(يوجد عدد صحيح موجب مثل M بحيث لا يمثل مربع كامل) بحيث:

$M(0.01) > 1 \rightarrow \sqrt{M} = \sqrt{101}$ (يمثل عدد غير نسبي)

$\because \left(\sqrt{101}\right)(0.1) \approx 1.004987 \rightarrow 1 \leq \left(\sqrt{101}\right)(0.01) < 2$

العدد غير النسبي المطلوب $\rightarrow \frac{2}{\sqrt{101}}$

أي أن $0.1 < \frac{2}{\sqrt{101}} < 0.2$

***H.W* / أوجد العدد غير النسبي للفترات التالية:**

1- $(1, 1.4)$ 2- $(0, 0.01)$ 3- $(0.01, 0.1)$ 4- $(0, \frac{1}{4})$

1- جد عدد غير نسبي بين العددين 0.1 و $0.02-$

2- جد عدد غير نسبي بين العددين 0.3 و 0.4 .

مثال / حوّل الأعداد التالية من الصيغة العشرية الى الصيغة النسبية

1) $0.\overline{15}$

$0.\overline{15} = 0.151515\ldots$

الحل

$$= 0.15 + 0.0015 + 0.000015 + \cdots$$

$$= \frac{15}{10^2} + \frac{15}{10^4} + \frac{15}{10^6} + \cdots$$

$$= \frac{15}{10^2}(1 + \frac{15}{10^2} + \frac{15}{10^4} + \cdots$$

$$= \frac{15}{10^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}\right) = \frac{15}{99}$$

(1) $0.\overline{121}$ *(2)* $0.15\overline{3}$ *(3)* $12.32\overline{17}$ ***(H.W)***

Some Important Inequalities بعض المتراجحات المهمة

(1) متراجحة هولدر **(Holder's Inequality)** إذا كان $p,q \in R$ بحيث أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فان

$$\sum_{i=1}|x_i y_i| \le (\sum_{i=1}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}|y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

حيث x_i, y_i أعداد حقيقية. وبصورة خاصة إذا كانت $p=2$ فان $q=2$ وان

$$\sum_{i=1}|x_i y_i| \le (\sum_{i=1}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}|y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

وتسمى متراجحة كوشي– شوارز **(Cauchy-Schwars Inequality)**

(2) متراجحة منكوفسكي **(Minkokowsk's Inequality)** إذا كان $p \ge 1$ فان

$$(\sum_{i=1}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

حيث x_i, y_i أعداد حقيقية.

متراجحة كوشي شوارتز ***(Cauchy schwars Inequality)*:**

إذا كان $a_1, a_2 \ldots a_n$ و $b_1, b_2 \ldots b_n$ اعداد حقيقية فأن

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

البرهان: لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الشكل

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2$$

فأن

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} [a_k^2 x^2 - 2a_k b_k x + b_k^2] \geq 0$$

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

نفرض ان

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ , B = 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ \ , C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$\therefore f(x) = Ax^2 - Bx + c \geq 0$$

هذه المعادلة (الدالة) من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x وبما أن $f(x) \geq 0$ هذا يعني أن الدالة اما تمس المحور x (جذور مكرره) أو تقع في الجزء العلوي من محور x (ليس لها جذور حقيقية).

لذلك فان مميز المعادلة يكون

$$B^2 - AC \leq 0 \ \ \rightarrow \ \ (\sum ab)^2 \leq (\sum a_k^2)(\sum b_k^1)$$

مثال: حقق متراجحة كوتشي شوارتز للمجموعات التالية:

(1) $\{ a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{ 0 , 1 , 5 , -4 \}$

$\{ b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \}$

الحل

$(\sum_{k=1}^{n} a_\kappa b_k)^2 \leq$
$(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)$

$$\therefore (\sum_{k=1}^{4} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$
$$= 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 5\left(\frac{1}{5}\right) + (-4)(\frac{1}{7})$$
$$= 0 + \frac{1}{4} + 1 + \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{19}{28}$$

$$\therefore \left(\sum_{k=1}^{n} a_\kappa b_k\right)^2 = \left(\frac{19}{28}\right)^2 = \frac{361}{784}$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_\kappa^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

$$= 0 + 1 + 25 + 16 = 42$$

$$\sum_{k=1}^{4} b_\kappa^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} = \frac{7309}{19600}$$

$$\left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right) = \left(\frac{7309}{19600}\right)(42) = \frac{21927}{1400}$$

$$\therefore \frac{361}{784} \leq \frac{21927}{1400}$$

H.W *(1)* / أذا كانت $a, b, c, d \in R$ فان

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$$

(2) حقق متراجحة كوتشي شوارتز للأعداد

$$\left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{3}, 2, 9, 15\right\}, \quad \left\{1, \frac{1}{2}, 3, -1, \frac{1}{4}\right\}$$

(3) إذا كانت $x = (a, b, c)$, $y = (2,3,5)$ اثبت ان

$$(2a+3b+5c)^2 \leq 38(a^2+b^2+c^2)$$