الفصـــــل السابع

الاحتمـــالات وتطبيقاتها

Probabilities and its Applications

1/7 مقـــــدمة

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، واحتمال نجاح طالب، واحتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

2/7 بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال

- **التجربة العشوائية** Randomized Experiment

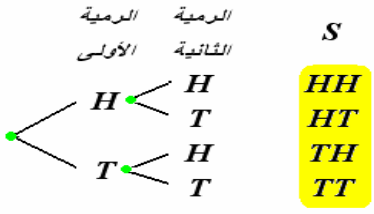
هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث، ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة، فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة" ويرمز لها بالرمز H، أو "ظهور الكتابة" ويرمز لها بالرمز T، أي أن النتائج الممكنة هي: { H , T}، وقبل إلقاء القطعة ، لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر.

- **فراغ العينة** Sample Space

هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز $n(S)$، ومن الأمثلة على ذلك:

1- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو: S:{H , T } ، وعدد النتائج هي: $n(S) = 2$.

2- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين (إلقاء قطعتين مرة واحدة)، فإن فراغ العينة يمكن الحصول عليه من خلال شجرة الاحتمالات كما يلي:



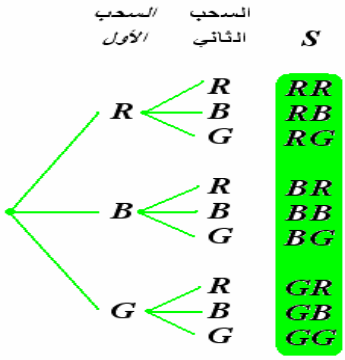
أي أن $n(S)=4$

3- عند رمي زهرة نرد غير متحيزة مرة واحدة، فإن فراغ العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي: S:{1, 2, 3, 4, 5, 6} ، أي أن : $n(S)=6$.

4- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة عدد من المرات حتى نحصل على الصورة مرة واحدة، نجد أن التجربة هي عدد من المحاولات يتم إيقافها عندما نحصل على الصورة مرة واحدة ، إذا فراغ العينة هو :

S:{H, TH, TTH, TTTH,.....}، ويكون : $n(S)=\infty$.

5- عند سحب كرتين بدون إرجاع من كيس به خمس كرات حمراء (red)، ثلاث كرات زرقاء (blue)، وكرتان خضراء (green)، نجد أن فراغ العينة هو:



أي أن: $n(S)=(10\times9)=90$ ، (لأنها حالات غير متزنة).

6- عند فرز صندوق به خمس وحدات من سلعة معينة، يكون فراغ العينة لعدد الوحدات المعيبة هو ..... واجب منزلي

- **الحادث** Event

هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز للحادث بحرف من الحروف الهجائية [A, B ,C,...] ، وينقسم الحادث إلي نوعين هما:

1- حادث بسيط Simple Event: وهو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.

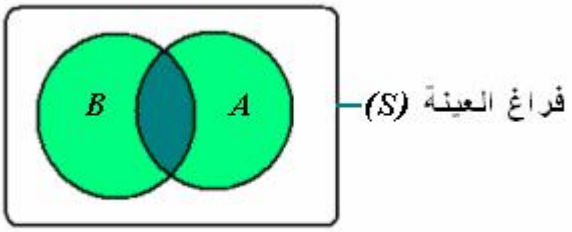
2- حادث مركب Component Event: ويشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة، أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.
ويرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز $n(A)$, $n(B)$,... وهكذا.

فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين ، وعرف الحادث A بأنه ظهور الصورة مرتين ، والحادث B ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، نجد أن فراغ العينة في هذه الحالة هي S:{HH, HT, TH, TT} ، وبالنسبة للحادث A فهو حادث بسيط ، يشمل نتيجة واحدة هي A:{HH} ، أي أن n(A)=1 ، أما الحادث B فهو حادث مركب يشمل ثلاث نتائج هي B:{HT, TH, HH} ، أي أن n(B)=3 ، وهذا الحادث يمكن تقسيمه إلى أحداث بسيطة .

- **الاتحاد (∪)** Union

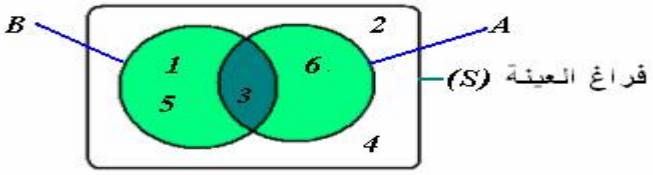
يعبر اتحاد الحادثان A , B عن وقوع أحدها على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cup B)$ أو $(A \text{ or } B)$، ويمكن الاستعانة بشكل "فن" Ven. Diagram كما يلي:

شكل (7-1)



الجزء المظلل يعبر عن الاتحاد $(A \cup B)$

ومثال على ذلك ، عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة ، وعرف الحادث A بأنه ظهور وجه يقبل القسمة على 3 ، والحادث B بأنه ظهور عدد فردي، يلاحظ أن:
S:{1,2,3,4,5,6}, A:{3,6}, B:{1,3,5} ، ويكون اتحاد الحادثان A , B هو: $(A \cup B)$:{1,3,5,6}، ويعبر عن ذلك في شكل Ven كما يلي:

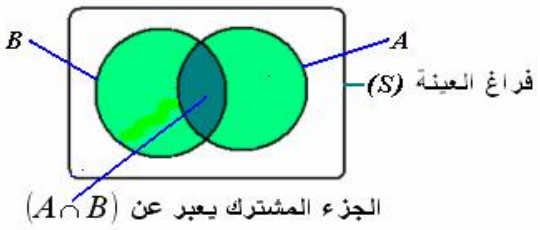


$(A \cup B)$:{1,3,5,6}

- **التقاطع (∩)** Intersection

يعبر تقاطع الحادثان A , B عن وقوع الاثنان في آن واحد ، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cap B)$ أو $(A \text{ and } B)$ ، ويظهر ذلك في شكل "فن" كما يلي :

شكل (7-2)

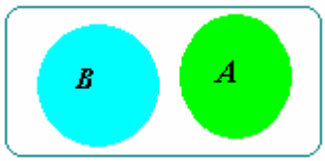


ففي المثال السابق ، نجد أن $(A\cap B):\{3\}$.

- **الأحداث المتنافية** Mutually Exclusive evens

يقال أن الحادثان A, B متنافيان، إذا كان وقوع أحدها ينفي وقوع الحدث الآخر، بمعنى استحالة وقوعهما في آن واحد، ومن ثم يكون نتيجة تقاطع الحادثان المتنافيان هي الفئة الخالية ويرمز لها بالرمز f أي أن $A\cap B=f$ ، ويمكن تمثيلها بشكل " فن " كما يلي:

شكل (7-3)

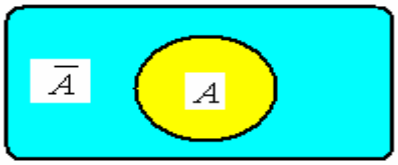


لا توجد نتائج مشتركة $(A\cap B)=f$

- **الحادث المكمل** Compliment Event

الحادث المكمل للحادث A هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث A، ويرمز للحادث المكمل بالرمز $\overline{A}$ ، ومن ثم نستنتج أن : $\left(A\cap\overline{A}\right)=f$, $\left(A\cup\overline{A}\right)=S$ كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (7-4)



مثـــــال (7-1)

ألقيت قطعة عملة غير متحيزة ثلاث مرات، وعرفت الأحداث التالية:

الحادث A ظهور الصورة مرتين.

الحادث B ظهور الصورة مرة واحدة.

الحادث C ظهور الصورة في الرمية الأولى.

والمطلوب:

1- إيجاد الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$$A\cup B\ ,\ A\cup C\ ,\ B\cup C\ ,\ A\cup B\cup C$$

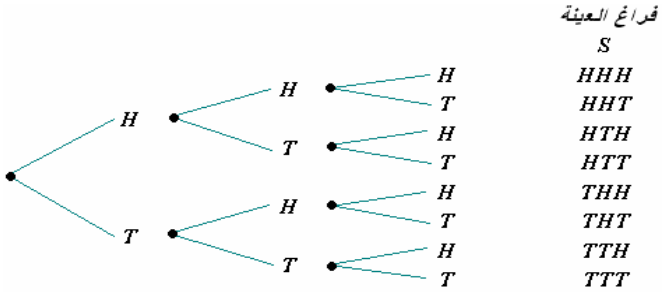
2- إيجاد الأحداث الخاصة بالتقاطعات:

$$A\cap B\ ,\ A\cap C\ ,\ B\cap C\ ,\ A\cap B\cap C$$

3- أوجد الحادث $\overline{B}$

الحـــــــل

- فراغ العينة لهذه التجربة هو:



$$n(S)=8$$

- وأما الأحداث هي:

$$A:\{HHT,HTH,THH\},\ B:\{HTT,THT,TTH\},\ C:\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$$
$$n(A)=3 \qquad n(B)=3 \qquad n(C)=4$$

1- الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$$(A\cup B):\{HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}\ ,\ n(A\cup B)=6$$
$$(A\cup C):\{HHT,HTH,THH,HHH,HTT\}\ ,\ n(A\cup C)=5$$
$$(B\cup C):\{HHH,HHT,HTH,HTT,THT,TTH\}\ ,\ n(B\cup C)=6$$
$$(A\cup B\cup C):\{HHH,HHT,HTH,HTT,THT,TTH,THH\},n(A\cup B\cup C)=7$$

2- الأحداث الخاصة بالتقاطع:

$$(A\cap B):f\ ,\ n(A\cap B)=0$$
$$(A\cap C):\{HHT,HTH\}\ ,\ n(A\cap C)=2$$
$$(B\cap C):\{HTT\}\ ,\ n(B\cap C)=1$$
$$(A\cap B\cap C):f\ ,\ n(A\cap B\cap C)=0$$

3- إيجاد $\overline{B}$ **:**

$$(\overline{B}):\{HHH,HHT,HTH,THH,TTT\}\ ,\ n(\overline{B})=5$$

3/7 طرق حساب الاحتمالات

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعتبر هـذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث A بالرمز $P(A)$، فإن طريقة حساب هذا الاحتمال تتحدد وفقـا لنـوع الاحتمال، وهما نوعان:

- **الاحتمال التجريبي** Empirical probability: ويعبر عنه بالتكرار النسبي، ويحـسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A)=\frac{f(A)}{n} \qquad (٧-١)$$

حيث أن: n هو مجموع التكرارات(العدد الكلي للمشاهدات)، $f(A)$: هو تكرار الحادث A،

فإذا تم إلقاء قطعة عملة غير متحيزة 500 مرة، وتم ملاحظة عدد مرات ظهـور كـل وجـه، ولخصت كالتالي:

الوجه (Face)	H	T	SUM
عدد مرات ظهور الوجه	260	240	500

وإذا كان المطلوب حساب احتمال ظهور الصورة H، يمكن تطبيق المعادلة رقـم (7-1)، والـتي تعتمد على التكرار النسبي، أي أن :

$$P(H)=\frac{f(H)}{n}=\frac{260}{500}=0.52$$

- **الاحتمال النظري** Theoretical Probability: وهو الذي يعتمد في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات، والتي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة، وعـدد النتـائج الممكنة لوقوع الحادث، ومن ثم يحسب هذا النوع من الاحتمال ، بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \qquad (٧-٢)$$

حيث أن: $n(S)$ هو عدد النتائج الممكنة للتجربة، $n(A)$ هو عدد النتـائج الممكنـة لوقـوع الحادث A، فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة ، نجد أن فراغ العينة هو: $S:\{H, T\}$ ، أي أن عدد النتائج الممكنة هي: $n(S)=(2)^1 = 2$، وإذا كان الحادث A هو ظهور صورة ، نجد أن $A:\{H\}$ ، أي أن عدد النتائج المكونة للحادث A هي: $n(A)=1$، ويكون احتمال وقوع

الحادث A هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}=0.5$$

- **العلاقة بين الاحتمال التجريبي و الاحتمال النظري:** عند زيادة عدد المحاولات n يقترب الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(A)}{n}=\frac{n(A)}{n(S)} \qquad (٣-٧)$$

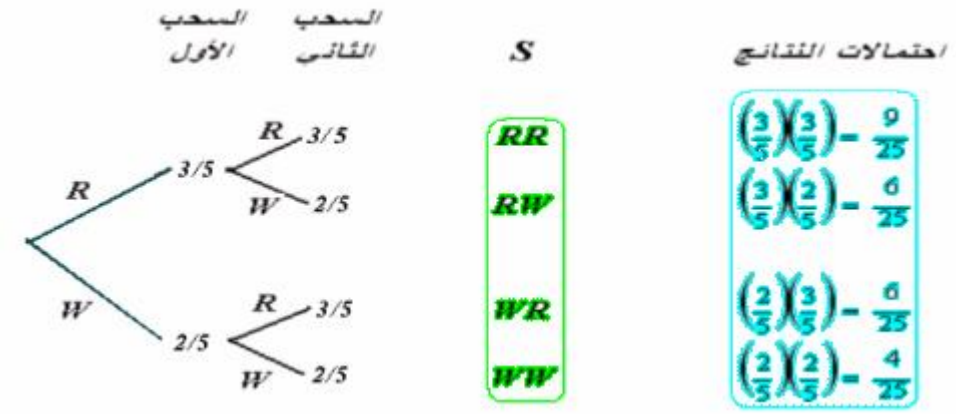
فعند زيادة عدد مرات رمي قطعة العملة، فإن التكرار النسبي للصورة سوف يقترب من القيمة (0.5)، وهي قيمة الاحتمال النظري لظهور الصورة عند رمي قطعة العملة مرة واحدة.

- **النتائج المتشابهة:** إذا أجريت تجربة، وكانت كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة لها نفس الفرصة في الظهور، بمعنى أن كل نتيجة لها احتمال هو $(1/n(S))$، تسمى هذه النتائج بالنتائج المتماثلة أو المتشابهة، فعند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو S:{1,2,3,4,5,6} ، واحتمال كل نتيجة هو (1/6) ، وعند إلقاء الزهرة مرتين نجد أن عدد نتائج فراغ العينة هو: $n(S)=6^2=36$ نتيجة، وهي:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

وهذه النتائج متماثلة، واحتمال كل نتيجة هو (1/36).

- **النتائج غير المتماثلة:** هي النتائج التي تحدث عند تكرار محاولة، بحيث أن احتمالات نتائج كل محاولة غير متساوي، ومن ثم لا تتساوى احتمالات نتائج التجربة، فعند سحب كرتين مع الإرجاع بطريقة عشوائية من كيس به ثلاث كرات حمراء (R)، وكرتان تحملان اللون الأبيض (W)، نجد أنه في كل سحب يكون احتمال ظهور كرة حمراء هو 3/5 ، واحتمال ظهور كرة بيضاء هو 2/5 ، ومن ثم يكون نتائج فراغ العينة، واحتمال كل نتيجة في حالة سحب كرتين هو:



يلاحظ أن احتمال كل نتيجة يختلف عن $(1/4)$ ، فهذه الحالات غير متزنة.

4/7 بعض قوانين الاحتمالات Probability Laws

هناك بعض القوانين التي يمكن تطبيقها لحساب الاحتمالات المختلفة، وهي:

- **قانون جمع الاحتمالات** Addition Law

إذا كان لدينا الحادثان A , B ، فإن الاحتمال $P(A\cup B)$ ، يمكن استنتاج معادلته كما يلي:

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= \frac{n(A\cup B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)} \\ &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{aligned}$$

إذا:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad (٣-٧)$$

وفي حالة ثلاث أحداث A , B , C ، يمكن استنتاج معادلة الاتحاد $P(A\cup B\cup C)$ ، وهي:

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) = {} & P(A)+P(B)+P(C) \\ & -P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) \end{aligned} \qquad (٤-٧)$$

وعندما تكون الأحداث متنافية، فإن احتمالات التقاطعات تساوي أصفار، ويكون:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ ,$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C) \qquad (٥-٧)$$

مثـــــال(7 - 2)

عند إلقاء زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

1- احتمال ظهور وجهين متشابهين.

2- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10.

3- احتمال ظهور وجهين متشابهين أو مجموع نقاطهما 10.

4- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 أو 10.

الحـــــــــل:

نتائج فراغ العينة هي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S)=36$

1- بفرض أن الحادث A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

$A:\{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6.6)\},\ n(A)=6$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

2- بفرض أن الحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10، فإن:

$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\},\ n(B)=3$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

3- لحساب احتمال ظهور وجهين متشابهين أو (or) مجموع نقاطهما 10 ، تستخدم المعادلة (7-3)، حيث أن:

$$P(A)=\frac{1}{6}\ ,\ P(B)=\frac{1}{12}$$

وأما التقاطع $(A\cap B)$ فيعبر عن ظهور وجهين متشابهين و مجموعهما 10 يمكن حسابه كما يلي:

$$(A\cap B):\{(5,5)\}\ ,\ n(A\cap B)=1$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{36}$$

ومن ثم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

4- بفرض أن الحادث C هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7، والحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10 ، نجد أن:

$$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\}\ ,\ C:\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$$

$$n(B)=3 \qquad n(C)=6$$

$$P(B)=3/36 \quad ، \quad P(C)=6/36$$

يلاحظ أن الحادثين C, B حادثين متنافيين، لذا تستخدم المعادلة (7-5) في حساب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{3}{36}+\frac{6}{36}$$

$$=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

- **قانون الاحتمال الشرطي** Conditional probability

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد، وكاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، إذا علم أنه يقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريجي يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين من أقسام كلية الزراعة، والأمثلة على ذلك كثيرة.

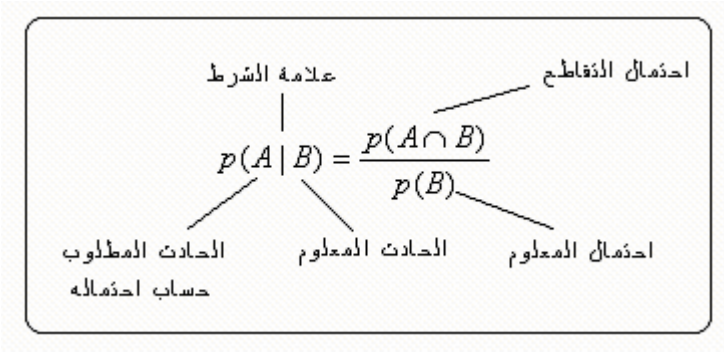
فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B ، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(A\mid B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} \qquad (٦-٧)$$

ويعرف الاحتمال $p(A\mid B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث B بمعلومية الحادث A ، وذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B\mid A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \qquad (٧-٧)$$

ومن المعادلة (7-6)، (7-7) يلاحظ أن الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين إلى الحادث المعلوم، حيث أن :



مثـــــال (7-3)

فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

التخصص \ المهنة	عمل حكومي	قطاع خاص	عمل حر	Sum
اقتصاد زراعي	15	5	10	30
علوم أغذية	8	17	10	35
علوم تربة	12	10	13	35
Sum	35	32	33	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

2- ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

3- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم عوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا.

الحل:

أولا: نرمز لنوع المهنة بالرمو A، ولنوع التخصص بالرمز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

التخصص \ *المهنة*		*عمل حكومي* A_1	*قطاع خاص* A_2	*عمل حر* A_3	*Sum*
اقتصاد زراعي	B_1	*15*	*5*	*10*	*30*
علوم أغذية	B_2	*8*	*17*	*10*	*35*
علوم تربة	B_3	*12*	*10*	*13*	*35*
Sum		*35*	*32*	*33*	*100*

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين و يعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

1- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

2- حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

3- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الآخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم عوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون عملا حرا A_3 بشرط أنه من خريجي قسم علوم أغذية B_2 ، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

واجب منزلي:

الجدول التالي يبين عدد الوحدات السليمة، والتالفة من الخبز العربي بعد ثلاث أيام من تاريخ الإنتاج في أحد مراكز التموين التي تتعامل مع ثلاث مخابز هي : *(C , B , A)* .

	عدد الوحدات السليمة	عدد الوحدات التالفة	الإجمالي
مخبز A	36	24	60
مخبز B	60	63	123
مخبز C	54	33	87
الإجمالي	150	120	270

إذا اختيرت وحدة من الخبز بطريقة عشوائية، فأوجد الآتي:

1- ما احتمال أن تكون من إنتاج المخبز B ؟

2- ما احتمال أن تكون تالفة ؟

3- إذا كانت الوحدة سليمة ، ما احتمال أن تكون من إنتاج المخبز C ؟

4- ما احتمال أن تكون الوحدة من إنتاج المخبز A أو تكون تالفة ؟

5- إذا كانت الوحدة من إنتاج المخبز A، ما احتمال أن تكون تالفة ؟

- **قانون ضرب الاحتمالات** Probability Multiplying Law

ويعكس هذا القانون احتمال وقوع الأحداث معا، أي احتمال التقاطعات، فإذا كـــان A , B ، حادثان يمكن وقوعهما معا، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن حسابه كحاصل ضرب احتمالين، هما:

$$\begin{aligned} & P(A \cap B) = P(B)\ P(A|B) \\ \text{or} \quad & P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A) \end{aligned} \qquad (٨-٧)$$

مثـــــال (7-4)

إذا كانت نسبة مزارع الخضروات التي تستخدم أسلوب معين للتسميد 60%، وإذا كـــان نسبة المبيعات من إنتاج الخضروات المسمد 70%، بينما نسبة المبيعات من الخضروات غـــير المـــسمدة 80%، إذا اختيرت أحد المزارع التي تنتج الخضروات عشوائيا ، فأوجد الآتي:

1- ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد؟
2- إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، ما احتمال أن تبيع إنتاجها؟
3- ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها؟
4- ما احتمال أن هذه المزرعة ممن لا يستخدمون أسلوب التسميد و تبيع إنتاجها؟

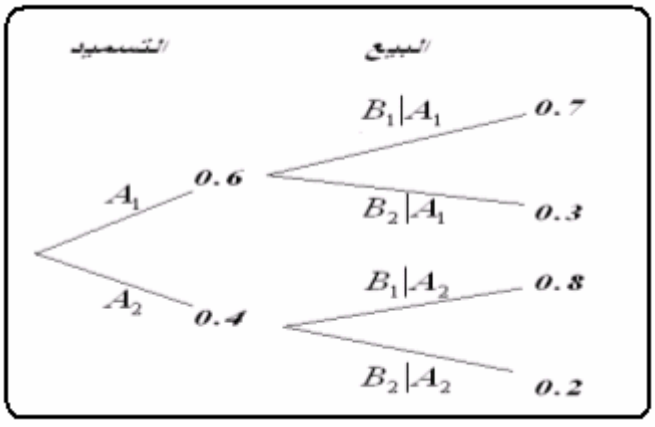
الحـــــل

إذا فحصنا حال المزرعة المسحوبة، نجد أننا نتعامل مع نتيجتين متعاقبتين هما:

النتيجة الأولي ولها حالتان: {المزرعة تستخدم طريقة التسميد (A_1) أو المزرعة لا تستخدم (A_2) }

النتيجة الثانية ولها حالتان: { المزرعة تبيع الإنتاج (B_1)، أو المزرعة لا تبيع الإنتاج (B_2) }

لذا يمكن استنتاج شجرة الاحتمالات للحصول على النتائج الكلية كالتالي:



وفيما يلي حساب الاحتمالات:

1- احتمال أن المزرعة تستخدم أسلوب التسميد هو:

$$P(A_1) = 0.6$$

2- إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، فإن احتمال أن تبيع إنتاجهاهو:

$$P(B_1|A_1) = 0.7$$

3- احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها عبارة عن احتمال وقوع حادثتان معا *(B_1 and A_1)*، لذا يحسب هذا الاحتمال بتطبيق المعادلة **(7-8)** كما يلي:

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)\ \ P(B_1|A_1)$$
$$= (0.6)(0.7) = 0.42$$

4- احتمال أن المزرعة لا تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها هو:

$$P(A_2 \cap B_1) = P(A_2)\ \ P(B_1|A_2)$$
$$= (0.4)(0.8) = 0.32$$

- **الأحداث المستقلة** Independent Events

إذا كانت الحادثتان A , B يمكن وقوعهما معا، ولكن وقوع أحدهما ليس له علاقة بوقوع أو عدم وقوع الحادث الآخر، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن التعبير عنه كالتالي:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \qquad (٩-٧)$$

وفي هذه الحالة يقال أن الحاثتان A , B مستقلتان.

مثـــــــال(7-5)

إذا كان نسبة المزارع التي تنتج خضروات 60% ، ونسبة المزارع التي تنتج فاكهـــه 75%، ونسبة المزارع التي تنتج الخضروات و الفاكهة 50%، أوجد الآتي:

1- ما احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات؟

2- ما احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة ؟

3- هل انتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات؟

الحـــل:

بفرض أن A حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات "، B هو حادث يعبر عن " المزرعة تنتج فاكهة"، فإن:

$$P(A) = 0.6\ \ ,\ \ P(B) = 0.75\ \ ,\ \ P(A \cap B) = 0.5$$

ويكون:

1- احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= (0.6) + (0.75) - 0.5 = 0.85$$

2- احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة هو:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.75 = 0.25$$

3- لمعرفة ما إذا كان إنتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات يمكن تطبيق المعادلة (7-9)

$$P(A \cap B) = 0.5 \quad , \quad P(A)\ P(B) = (0.6)(0.75) = 0.45$$

وحيث أن : $P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B)$ ، فإن إنتاج المزرعة للفاكهة (A)، غير مستقل عن إنتاجها للخضروات (B).

مثـــــــال(7-6)

إذا كان الحادثان A , B حادثان مـــستقلان ، وكـــان $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ ، فأوجـــد الاحتمال $P(A \cup B)$.

الحـــــــل:

بما أن الحادثان A, B مستقلان، إذا:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$
$$= (0.6)(0.5) = 0.3$$

ويكون احتمال $P(A \cup B)$ هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$$

الفصـــــــل الثامن

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

1/8مقـــــدمة

يهتم هذا الفصل بدراسة المتغيرات العشوائية، من حيث تعريفها، وأنواعهـــا، والتوزيعـــات الاحتمالية لها، وخصائص هذه التوزيعات، والتوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية الخاصة.

2/8 المتغير العشوائي Random Variable:

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجـــال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables

2- المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) Continuous Random Variables

3/8 المتغيرات العشوائية المنفصلة

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة.... $X, Y, Z,$ ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بـــالحروف الأبجديـــة الصغيرة، ... $x, y, z,$ ، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.

2- عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 10 دقائق Y، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.

3- عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.

4- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.

5- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

وهكذا..... الأمثلة كثيرة

1/3/8 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي تـــرتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفـــصل X يأخـــذ القـــيم، $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، وكـــان

$P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X : \{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X = x_i) = f(x_i)$ ، أي أن:

جدول (8-1)

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
⋮	⋮
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الاحتمال، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1- \quad 0 < f(x_i) < 1 \\ 2- \quad \sum f(x_i) = 1 \end{array}} \qquad (1-8)$$

مثـــــال (8-1)

إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد العملاء عبوتين، والمطلوب:

1- كون فراغ العينة.

2- إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X = 1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$
- حدد قيمة الوسيط، والمنوال لعدد العبوات المشتراة.

الحـــــل:

تكوين فراغ العينة:

التجربة هنا هو شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:

- **التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي X**

من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفـــاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$ **إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)**

$x=1$ **إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، أمريكـــي) أو (أمريكي،آخر)**

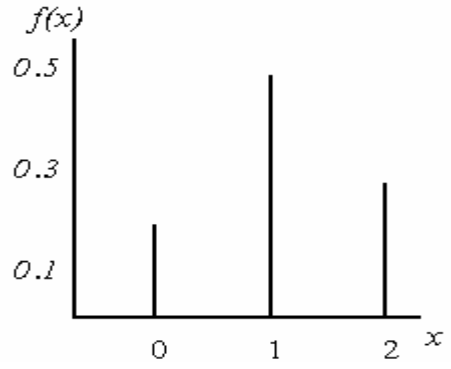
$x=2$ **إذا كان العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي ، أمريكي)**

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ **، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:**

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

- **رسم دالة الاحتمال $f(x)$:**



- **تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:**

التوزيع التجميعي، هو جدول يشمل الاحتمالات الناتجة من حساب الاحتمال $P(X \le x)$ ، ويرمز

له بالرمز $F(x)$ ، أي أن دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي تأخذ الصورة التالية:

$$F(x) = P(X \le x) \qquad (٢-٨)$$

ومن ثم يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من التفاح الأمريكي كما يلي:

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراه من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0) = P(X \le 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \le 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \le 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Σ	1	

- حساب الاحتمالات:- $P(X=1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$

$$P(X=1) = f(1) = 0.48$$
$$P(X \le 1) = F(1) = 0.64$$
$$P(X=1.5) = f(1.5) = 0$$
$$P(X \le 1.5) = F(1.5) = F(1) = 0.64$$

- تحديد قيمة الوسيط، والمنوال.

الوسيط:- رتبة الوسيط هو 0.50 ، إذا الوسيط M هو القيمة التي تحقق الاحتمال:

$P(X \le M) = F(M) = 0.50$ ، وهذا الاحتمال يقع بين القيمتين $(1,0)$ كما هو مبين بالرسم التالي:

	x_i	$F(x_i)$	
M	0	0.16	
	1	0.64	$F(M) = 0.50$
	2	1.00	

إذا الوسيط قيمته هي:

$$M = 0 + \frac{0.5 - 0.16}{0.64 - 0.16} \times (1-0) = 0.71$$

حساب المنوال:

المنوال $Mode$ = القيمة x_i المناظرة لأكبر قيمة احتمالية.

إذا المنوال هو: $Mode = 1$ حيث أنه يناظر أكبر قيمة احتمالية هي: $f(1) = 0.48$.

2/3/8 الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

أ- يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بالرمز m (ميو)، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\mu = \sum x_i \; f(x_i) \qquad (٣-٨)$$

ب- وأما التباين ويرمز له بالرمز s^2 (سيجما)، فيحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 \; f(x_i) = \sum x_i^2 \; f(x_i) - \mu^2 \qquad (٤-٨)$$

مثـــال (8-2)

في المثال السابق احسب ما يلي:

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي:

ب- احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.

ت- أوجد معامل الاختلاف النسبي:

الحـــل

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة (8-3)، (8-4) وهذا يتطلـــب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: $\sum x_i \; f(x_i)$, $\sum x_i^2 \; f(x_i)$ ، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو: $m = \sum x_i \; f(x_i) = 1.20$

ب- ولحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$s^2 = \sum x_i^2 \; f(x_i) - m^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

ت- معامل الاختلاف النسبي هو:

$$C.V = \frac{s}{m} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

واجب منزلي:-

فيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X ، $X:\{x=0,1,2,3,4,5\}$

x (عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة)	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.15	0.30	0.25	0.23	0.05	0.02

والمطلوب:

1- حدد نوع هذا المتغير (عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة)

2- احسب الوسط والوسيط والمنوال والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

3- كون جدول التوزيع التجميعي $F(x)$ ثم أوجد الآتي:

أ- نسبة الأسر التي يقل استهلاكها عن وحدتين

ب- نسبة الأسر التي يزيد استهلاكها عن 3 وحدات

ت- إذا كان لدينا 500 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يكون استهلاكها على الأقل 3 وحدات؟

4- احسب معامل الالتواء، وكذلك معامل الاختلاف النسبي، وعلق على النتائج.

4/8 التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الخاصة

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة.

ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا المقرر، توزيع ثنائي الحدين، والتوزيع البواسون.

1/4/8 التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

- **عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)**
- **عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)**
- **عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)**
- **نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)**

- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم).

شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين

إذا كررت محاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q = 1 - p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X : \{x = 0,1,2,...,n\}$ ، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ بتطبيق المعادلة التالية:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,2,...n \qquad (٥-٨)$$

حيث أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n مع إهمال الترتيب، وتحسب كما يلي:

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)...3\times 2\times 1} \qquad (٦-٨)$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35 \; = \; \binom{7}{4}$$

$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$$

مثـــــــال (8-3)

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60 ، إذا تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض. إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الـذين المستجيبين (حالات الشفاء) لهذا العقار.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ت- احسب الاحتمالات التالية:

- ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟
- ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
- ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟

ث- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

ج- حدد شكل التوزيع.

الحـــــل:

أ- عدد حالات الاستجابة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هـــو:

$X : \{x = 0,1,2,3,4,5\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال: $n = 5$ ، $p = 0.60$ ، $q = 1 - p = 0.40$ إذا:

$$f(x) = \binom{n}{x}(p)^x (q)^{n-x}$$

$$= \binom{5}{x}(0.6)^x (0.4)^{5-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

ت- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء: $P(x = 3) = f(3)$

$$f(3) = \binom{5}{3}(0.6)^3 (0.4)^{5-3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times 0.216\times 0.16 = 10\times 0.03456$$

$$= 0.3456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل: $P(x \geq 1)$

$$P(x \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1 - f(0)$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0}(0.6)^0 (0.4)^5\right] = 1 - 1\times 1\times 0.01024 = 0.98976$$

- حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر: $P(x \leq 2)$:

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \binom{5}{2}(0.6)^2 (0.4)^3 + \binom{5}{1}(0.6)^1 (0.4)^4 + \binom{5}{0}(0.6)^0 (0.4)^5$$

$$= \frac{5\times4}{2\times1}(0.36)(0.064) + \frac{5}{1}(0.6)(0.0256) + 1(1)(0.01024$$

$$= 0.2304 + 0.0768 + 0.01024 = 0.31744$$

ث- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (m) في حالة التوزيع ثنائي الحدين يحسب بتطبيق المعادلة (**8-3**)، وباستخدام العمليات الرياضية يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

$$\mu = \sum x\, f(x) = np \qquad (٨-٧)$$

إذا الوسط الحسابي هو:

$$m = np = 5(0.60) = 3$$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ولحساب التباين في التوزيع ثنائي الحدين يتم تطبيق المعادلة (**8-4**)، ومنها يمكن التوصل إلى

الصورة التالية:

$$\sigma^2 = npq \qquad (٨-٨)$$

إذا تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$s^2 = npq$$
$$= 5(0.60)(0.40) = 1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة التالية:

$$s = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{1.2} = 1.095$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التالية:

$$V.C = \frac{s}{m} \times 100 = \frac{1.095}{3} \times 100 = 36.5\%$$

ج- تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح p كما يلي:

إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.

إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.

إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

وحيث أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.

2/4/8 التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. $X : \{x = 0,1,2,...\}$

وهكذا الأمثلة كثيرة

شكل التوزيع الاحتمالي البواسوني

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو m، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير العشوائي X هو: $X : \{x = 0,1,2,...\}$، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال

$P(X=x)=f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهـــذا المعـــدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}\ ,\ x=0,1,2,... \qquad (٩-٨)$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e=2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة باتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين:

مثلا إيجاد $e^{-1.5}$

(SHIFT) (e^x) (-) (1.5) (=) (0.22323016) — النتيجة

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x " ويساوي: $x!=x(x-1)(x-2)...3\times2\times1$

مثـــــال (8-4)

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحـــدات الـــتي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير العشوائي؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ح- احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

خ- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

د- حدد شكل التوزيع.

الحـــل:

أ- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,...\}$

ب- شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $m=3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3} 3^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,...$$

ح- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، $f(2)$

$$f(2) = \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = \frac{0.0498(9)}{2 \times 1} = 0.22404$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:

$$P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + ...$$

$$= 1 - f(0) = 1 - \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = \frac{0.0498}{1} = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \frac{e^{-3} 3^3}{3!} + \frac{e^{-3} 3^2}{2!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} 3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$

$$= 0.0498\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

خ- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (m) في حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي:

$$m = 3$$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي:

أي أن: $s^2 = m = 3$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$s = \sqrt{m} = \sqrt{3} = 1.732$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها في الفصل السابق، وهو:

$$V.C = \frac{s}{m} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

د- تحديد شكل التوزيع:

دائما التوزيع البواسون موجب الالتواء.

5/8 المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المزرعة بالأعلاف في المملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من $(30\text{-}40)$، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

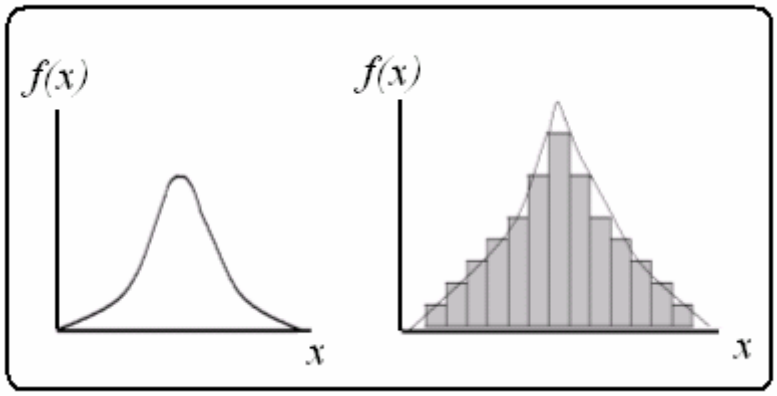
وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.

1/5/8 التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر Continuous Probability

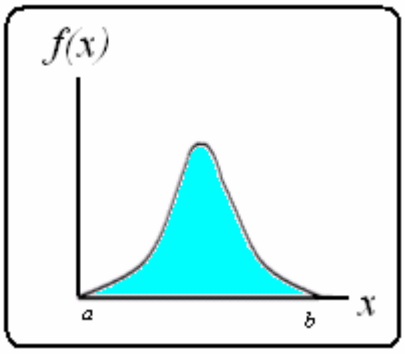
عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (**8-1**)

شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر



والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال Probability Distribution Function$(p.d.f)$ ، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X=\{x: a \pi x \pi b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

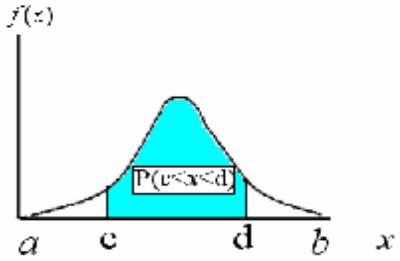
1- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x) \phi 0$ ، $x \in (a,b)$

2- التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح ، أي أن:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\, dx = 1 \qquad (٨-١٠)$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x=a$ حتى $x=b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b).

3- لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c<x<d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$p(c < x < d) = \int_{x=c}^{x=d} f(x)\ dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c) \qquad (11-8)$$

4- في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x = value)$ مساويا للصفر، أي أن:

$$p(x = value) = 0 \qquad (11-8)$$

ولكي يمكننا حساب الاحتمالات، يجب عرض بعض قواعد التكامل التالية:

جدول **(8-2)**

بعض قواعد التكامل

(1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	and	$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$	integration
(2)	$\int e^x dx = e^x$	and	$\int e^{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} e^{(a+bx)}$	
(3)	$\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x)$	and	$\int \frac{1}{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} \log_e(a+bx)$	
(4)	$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! = n(n-1)(n-2)...3 \times 2 \times 1$			gamma
(5)	$I\Gamma(n+1) = \int_0^a x^n e^{-x} dx = n! \left(1 - e^{-a} \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\right)$			Incomplete gamma
(6)	$B(m+1, n+1) = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$			Beta

مثـــال (8-5)

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) & , \ 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت c

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (8,5) ألف ريال خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟

الحـــــــل

1- حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1$$

إذا

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\ dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2- حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين (8,5) ألف ريال خلا الشهر هو.

$$p(5<x<8) = \int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x)\ dx = 0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right] = 0.006[(149.3333)-(83.3333)]$$

$$= 0.006(66) = 0.396$$

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر هو:

$$number\ of\ \ family = 600\ \ p(x<3)$$

$$= 600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9]-0 = 129.6 \approx 130$$

حوالي 130 أسرة.

2/5/8 المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x ، $a < x < b$ فإن التوقــع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$E(h(x)) = \int_a^b h(x)\ dx \qquad (١٢-٨)$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\mu = E(x) = \int_a^b xf(x)dx$$
$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2\ ,\ E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx \qquad (١٣-٨)$$

تابع مثال (8-5)

في المثال السابق أوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري.

الحـــــــل

1- المتوسط الحسابي

$$m = E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x\left(0.006x(10-x)\right) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$
$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$
$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري 5 آلاف ريال.

2- الانحراف المعياري

$$s^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$
$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$
$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $s^2 = 30 - 25 = 5$ ، ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة التالية:

$$s = \sqrt{\text{var}\,iance} = \sqrt{5} = 2.236$$

3- معامل الاختلاف النسبي

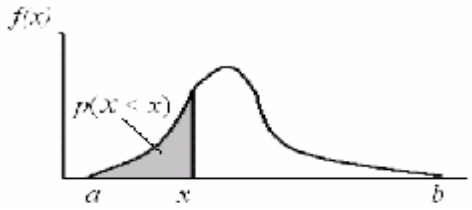
$$C.V = \frac{s}{m} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

دالة التوزيع التجميعي (C.D.F) Cumulative Distribution Function

يرمز لهذه الدالة بالرمز $(C.D.F)=F(x)$ وتحسب بإيجاد الاحتمال:

$$C.D.F = F(x) = P(X \le x) = \int_{a}^{x} f(x)dx \qquad (١٤-٨)$$

ويمكن توضيحها بيانيا بالرسم التالي:



تابع مثال (8-5)

في المثال (8-5) أوجد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$، ثم استخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف جنيه.

الحـــــل

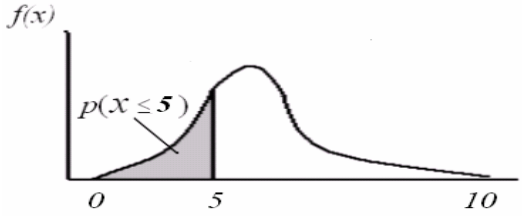
- إيجاد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(x)\ dx$$

$$= \int_{0}^{x} 0.006x(10-x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- حساب الاحتمال المطلوب $F(5) = p(x \le 5)$، كما هو مبين بالرسم التالي:



ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x = 5$ في الدالة $F(x)$ التي تم التوصل إليها، أي أن:

$$F(5) = P(x \le 5) =$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right]$$

$$= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 آلاف ريال.

خصائص دالة التوزيع التجميعي

$F(x) \phi\ 0$ **-1**	$F(a) = 0$ **-2**	$F(b) = 1$ **-3**	$p(X \phi\ x) = 1 - F(x)$ **-4**
$f(x) = dF(x)/dx$ **-5**			

6/8 التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

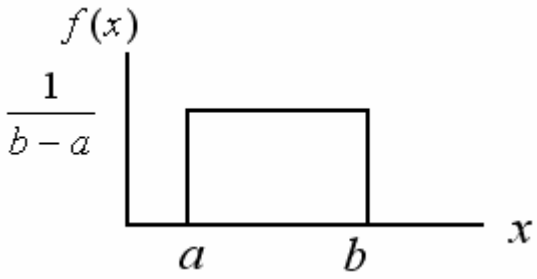
1/6/8 التوزيع المنتظم Uniform distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال *p.d.f*

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم *Uniform*، مداه هو $a < x < b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\ ,\ a < x < b \qquad (١٥-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a) ، ولذا يكتب رمز لهذا التوزيع الصورة $X \sim U(a,b)$

خصائص التوزيع المستطيل

الوسط الحسابي m ، والتباين S^2 لهذا المتغير هما :

$$m = E(x) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad S^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

على الطالب إثبات ذلك:

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a} \qquad (١٦-٨)$$

مثـــال (8-6)

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميـــات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحـــــــل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالـــشهر، أي أن $0 < x < 12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \ , \ 0 < x < 12$$

- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

بفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكية المتبقية بالمخزن بعد مـــرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q \times p(x > 7) = Q \times (1 - F(7)) = 1500(1 - \frac{7-0}{12-0}) = 625 \ Ton$$

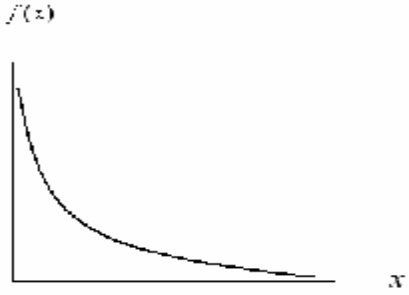
2/6/8 التوزيع الأسي السالب Negative Exponential distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0 < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty,\ \theta > 0 \qquad (١٧-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي (q)

خصائص التوزيع الأسى السالب

الوسط الحسابي m ، والتباين s^2 لهذا المتغير هما:

$$m = E(x) = \frac{1}{q}\ ,\quad s^2 = \frac{1}{q^2}$$

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_0^x f(x)dx = \left(1 - e^{-qx}\right)$$

مثـــــال (8-7)

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.
- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحـــــــل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، فإن المتوسط $1/q = 2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (q) هي: $(q = 0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

3/6/8 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

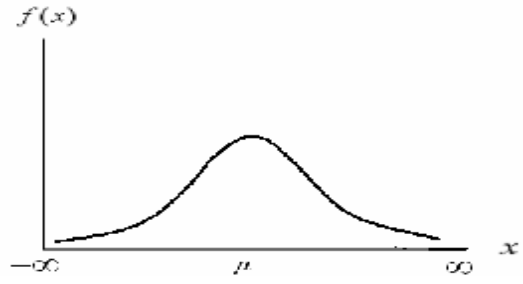
يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < X < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ -\infty < x < \infty\ ,\ \pi = 22/7 \qquad (١٨-٨)$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي m.

معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x) = m$ والتباين : $\text{var}(x) = s^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(m, s^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x

يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط m ، وتباين s^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

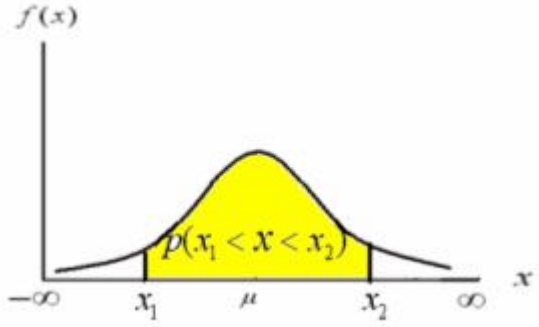
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- الوسط الحسابي m **2**- والتباين s^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط m

كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1 < X < x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية Transform، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-m}{s}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي Standard Normal Variable ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

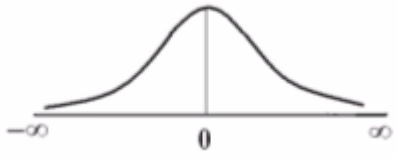
$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad , -\infty < z < \infty \quad , \quad \pi = 22/7 \qquad (١٩-٨)$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- متوسطه هو: $E(z) = 0$ **2**- تباينه هو: $\text{var}(z) = 1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

3- يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



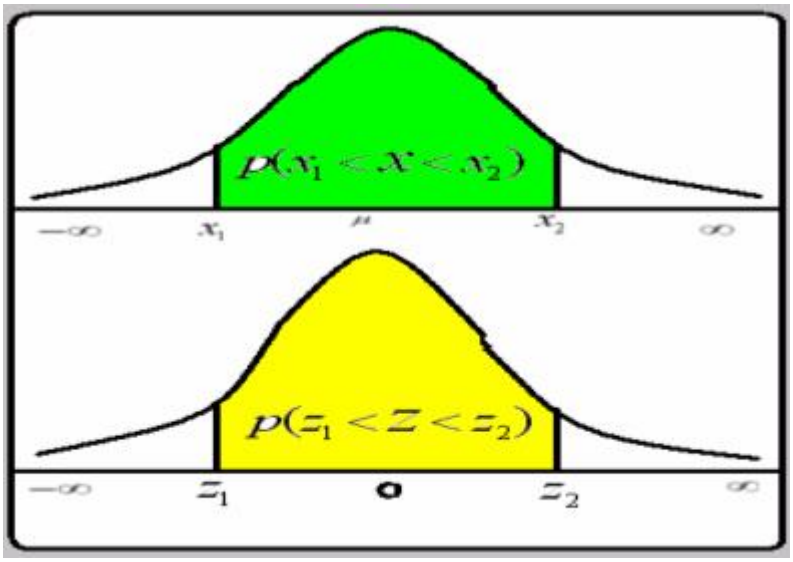
وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z) = P(Z < z)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:

ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $p(x_1 < X < x_2)$ باستخدام التحويلة $z = (x - m)/s$:

1- يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$$z_1 = (x_1 - m)/s \quad , \quad z_2 = (x_2 - m)/s \; .$$

2- ومن ثم يكون الاحتمال: $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$:



3- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال $F(z) = P(Z < z)$

4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات

أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z < 1.57)$ ب- $P(z < -2.33)$ ج- $P(z > 1.96)$ د-

$P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z<1.57)=F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يلي

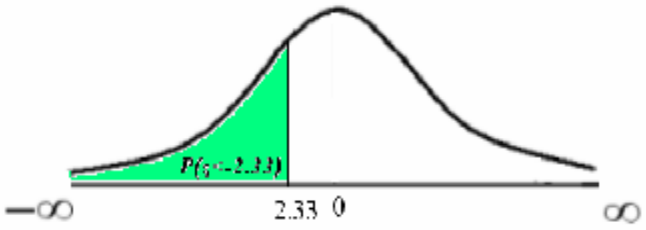
ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
.										
.										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z<1.57)=F(1.57)=0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمـــال $P(z<-2.33)=F(-2.33)$ موضـــحة كالتالي:

P(z<-2.33)

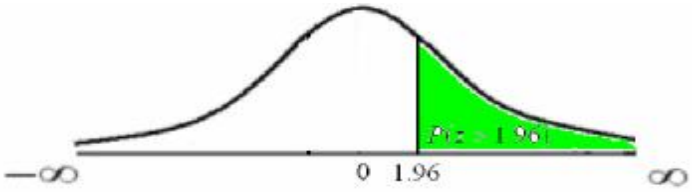


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
- 2.70										
- 2.60										

-2.50	
-2.40	
-2.30	0.0099
.	
.	
.	

ومن ثم يكون : $P(z<-2.33)=0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ كالتالي:



وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

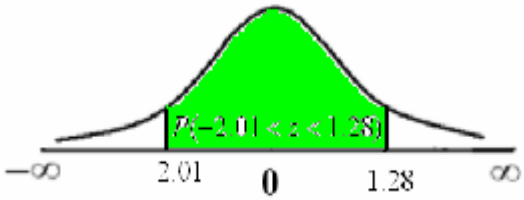
$$P(z>1.96)=1-p(z<1.96)=1-F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 نجد أن :

$p(z<1.96)=0.9750$ ، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(z>1.96)=1-0.9750=0.0250$$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(-2.01<z<1.28)$ هي:



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01<z<1.28)=F(1.28)-F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01<z<1.28)=0.8997-0.0222=0.8775$$

مثـــــــال(8-8)

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد مناطق المملكة يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألـف ريال، وتباينه 900. والمطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال ؟

4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحـــــــل

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيـــع الطبيعـــي، ومعالمه هي:

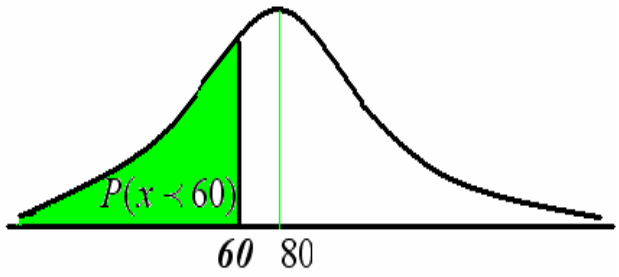
أ- المتوسط $E(x)=m=80$ ب- التباين هو: $Var(x)=s^2=900$

أي أن : $x \sim N(80,900)$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\frac{1}{30\sqrt{2p}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2},\ -\infty<x<\infty\ ,\ p=22/7$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال هي: $P(x\ \pi\ 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-m}{s}\right)$$

$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x < x_1) = p\left(z < \frac{x_1 - 80}{30} \right) = 0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الــصف 1.9 ، والعمود 06. أي أن قيمة $z = 1.96$ ، ويكون :

$$1.96 = \frac{x_1 - 80}{30} \quad , \quad Then \quad x_1 = 30(1.96) + 80 = 138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف ريال في السنة.