الفصـــــــل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Central Tendency

1/3 مقدمة

في كثير من النواحي التطبيقية يكون الباحث في حاجة إلى حساب بعض المؤشرات التي يمكن الاعتماد عليها في وصف الظاهرة من حيث القيمة التي تتوسط القيم أو تنزع إليها القيم ، ومن حيث التعرف على مدى تجانس القيم التي يأخذها المتغير، وأيضا ما إذا كان هناك قيم شاذة أم لا . والاعتماد على العرض البياني وحدة لا يكفى ، ولذا يتناول هذا الفصل، والذي يليه عرض بعض المقاييس الإحصائية التي يمكن من خلالها التعرف على خصائص الظاهرة محل البحث، وكذلك إمكانية مقارنة ظاهرتين أو أكثر ، ومن أهم هذه المقاييس ، مقاييس النزعة المركزية والتشتت .

2/3 مقاييس النزعة المركزية

تسمى مقاييس النزعة المركزية بمقاييس الموضع أو المتوسطات ، وهى القيم التى تتركز القيم حولها ، ومن هذه المقاييس ، الوسط الحسابي ، والمنوال ، والوسيط ، والوسط الهندسي ، والوسط التوافقي ، والرباعيات ، والمئينات ، وفيما يلي عرض لأهم هذه المقاييس

1/2/3 الوسط الحسابي Arithmetic Mean

من أهم مقاييس النزعة المركزية ، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية ، ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة ، كما يلي :

أولا: الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

يعرف الوسط الحسابي بشكل عام على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها . فإذا كان لدينا n من القيم ، ويرمز لها بالرمز : $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

فإن الوسط الحسابي لهذه القيم ، ونرمز له بالرمز $\overline{X}$ يحسب بالمعادلة التالية :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} \qquad (1-3)$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

حيث يدل الرمز Σ على المجموع .

مثـــال (3-1)

فيما يلي درجات 8 طلاب في مقرر **122** إحصاء تطبيقي .

34 32 42 37 35 40 36 40

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لدرجة الطالب في الامتحان .

الحـــل

لإيجاد الوسط الحسابي للدرجات تطبق المعادلة رقم (**3-1**) كما يلي:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$= \frac{34+32+42+37+35+40+36+40}{8} = \frac{296}{8} = 37$$

أي أن الوسط الحسابي لدرجة الطالب في اختبار مقرر **122** إحص يساوي 37 درجة

ثانيا: الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

من المعلوم أن القيم الأصلية ، لا يمكن معرفتها من جدول التوزيع التكراري ، حيث أن هذه القيم موضوعة في شكل فئات ، ولذا يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة بمركز هذه الفئة ، ومن ثم يؤخذ في الاعتبار أن مركز الفئة هو القيمة التقديرية لكل مفردة تقع في هذه الفئة.

فإذا كانت k هي عدد الفئات ، وكانت $X_1, X_2, \ldots, X_k$ هي مراكز هذه الفئات، $f_1, f_2, \ldots, f_k$ هي التكرارات ، فإن الوسط الحسابي يحسب بالمعادلة التالية:

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i-1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i-1}^{k} f_i} \qquad (٣-٢)$$

مثـــال (3-2)

الجدول التالي يعرض توزيع 40 تلميذ حسب أوزانهم .

فئات الوزن	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
عدد التلاميذ	4	7	13	10	5	1

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي.

الحـــــل

لحساب الوسط الحسابي باستخدام المعادلة رقم (3-2) يتم إتباع الخطوات التالية :

1- إيجاد مجموع التكرارات $\sum f$. 2- حساب مراكز الفئات x .

3- ضرب مركز الفئة في التكرار المناظر له (xf)، وحساب المجموع $\sum xf$

4- حساب الوسط الحسابي بتطبيق المعادلة رقم (3-2) .

فئات الوزن (C)	التكرارات f	مراكز الفئات x	$x\ f$
32-34	4	2=33÷(32+34)	33=132×4
34-36	7	35	35=245×7
36-38	13	37	37=481×13
38-40	10	39	39=390×10
40-42	5	41	41=205×5
42-44	1	43	43=43×1
المجموع	40		1496

إذا الوسط الحسابي لوزن التلميذ هو :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{1496}{40} = 37.4\ k.g$$

أي أن متوسط وزن التلميذ يساوي 37.4 k.g

خصائص الوسط الحسابي

يتصف الوسط الحسابي بعدد من الخصائص ، ومن هذه الخصائص ما يلي :

1- الوسط الحسابي للمقدار الثابت يساوى الثابت نفسه ، أي أنه إذا كانت قيم x هي : $x : a, a, ..., a$ ، فإن الوسط الحسابي هو:

$$\overline{x} = \frac{a + a + \ldots + a}{n} = \frac{na}{n} = a \qquad (٣-٣)$$

ومثال على ذلك ، لو اخترنا مجموعة من 5 طلاب ، ووجدنا أن كل طالب وزنه 63 كيلوجرام ، فإن متوسط وزن الطالب في هذه المجموعة هو :

$$\overline{x} = \frac{63+63+63+63+63}{5} = \frac{315}{5} = 63\ k.g$$

2- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوى صفرا ، ويعبر عن هذه الخاصية بالمعادلة .

$$\sum (x - \overline{x}) = 0 \qquad (٤-٣)$$

ويمكن التحقق من هذه الخاصية باستخدام بيانات مثال (3-1) ، نجد أن درجات الطلاب هي

34, 32, 42, 37, 35, 40, 36, 40: ، والوسط الحسابي للدرجة هو $\bar{x}=37$ ، إذا :

x	34	32	42	37	35	40	36	40	296
$(x-\bar{x})$	34-37	32-37	42-37	37-37	35-37	40-37	36-37	40-37	0
$(x-37)$	-3	-5	5	0	-2	3	-1	3	

أي أن : $\sum(x-37)=0$

3- إذا أضيف مقدار ثابت إلى كل قيمة من القيم ، فإن الوسط الحسابي للقيم المعدلة (بعد الإضافة) يساوى الوسط الحسابي للقيم الأصلية (قبل الإضافة) مضافا إليها هذا المقدار الثابت . فإذا كانت القيم هي : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، وتم إضافة مقدار ثابت (a) إلى كل قيمة من القيم ، ونرمز للقيم الجديدة بالرمز y ، أي أن $y=x+a$ ، فإن : الوسط الحسابي لقيم y (القيم بعد الإضافة) هو:

$$\bar{y} = \bar{x} + a \qquad (٣-٥)$$

حيث أن $\bar{y}$ هو الوسط الحسابي للقيم الجديدة ، ويمكن التحقق من هذه الخاصية باستخدام بيانات مثال رقم (**3-1**) .

إذا قرر المصحح إضافة 5 درجات لكل طالب ، فإن الوسط الحسابي للدرجات المعدلة يصبح قيمته {(37+5)=42} ، والجدول التالي يبين ذلك .

x	34	32	42	37	35	40	36	40	296
$y=(x+5)$	34+5	32+5	42+5	37+5	35+5	40+5	36+5	40+5	336
	39	37	47	42	40	45	41	45	

نجد أن مجموع القيم الجديدة هو : $\sum y=336$ ، ومن ثم يكون الوسط الحسابي للقيم الجديدة هو :

$$\bar{y}=\frac{\sum y}{n}=\frac{336}{8}=42 \quad \longrightarrow (\bar{x}+5=37+5=42)$$

4- إذا ضرب مقدار ثابت (a) في كل قيمة من القيم ، فإن الوسط الحسابي للقيم المعدلة (القيم الناتجة بعد الضرب) يساوى الوسط الحسابي للقيم الأصلية (القيم بعد التعديل) مضروبا في هذا المقدار الثابت . أى أنه إذا كان : $y=a\ x$ ، ويكون الوسط الحسابي للقيم الجديدة y هو :

$$\bar{y} = a\ \bar{x} \qquad (٣-٦)$$

ويمكن للطالب أن يتحقق من هذه الخاصية باستخدام نفس بيانات المثال السابق . فإذا كان تصحيح الدرجة من 50 ، وقرر المصحح أن يجعل التصحيح من 100 درجة ، بمعنى أنه سوف يضرب كل درجة في قيمة ثابتة (a=2) ، ويصبح الوسط الحسابي الجديد هو :

$$\bar{y} = a\ \bar{x} = 2(37) = 74$$

5- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل ما يمكن ، أي أن:

$$\sum (x-\bar{x})^2 < \sum (x-a)^2 \quad if \quad a \neq \bar{x} \qquad (٧-٣)$$

وفي المثال السابق فإن : $\sum (x-37)^2 < \sum (x-a)^2$ لجميع قيم $a \neq 37$

ثالثا: الوسط الحسابي المرجح

في بعض الأحيان يكون لكل قيمة من قيم المتغير أهمية نسبية تسمى أوزن ، أو ترجيحات ، وعدم أخذ هذه الأوزان في الاعتبار عند حساب الوسط الحسابي ، تكون القيمة المعبرة عن الوسط الحسابي غير دقيقة ، فمثلا لو أخذنا خمسة طلاب ، وسجلنا درجات هؤلاء الطلاب في مقرر الإحصاء التطبيقي ، وعدد ساعات الاستذكار في الأسبوع .

مسلسل	1	2	3	4	5	sum
X (الدرجة)	23	40	36	28	46	173
W (عدد ساعات الاستذكار)	1	3	3	2	4	

نجد أن الوسط الحسابي غير المرجح للدرجة الحاصل عليها الطالب هي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{23+40+36+28+46}{5} = \frac{173}{5} = 346$$

وإذا أردنا أن نحسب الوسط الحسابي للدرجات X المرجحة بعدد ساعات الاستذكار W ، يتم تطبيق المعادلة التالية :

$$(\bar{w}) = \frac{\sum xw}{\sum w} = \frac{23\times1+40\times3+36\times3+28\times2+46\times4}{1+3+3+2+4}$$

$$= \frac{23+120+108+56+184}{13} = \frac{491}{13} = 37.769$$

وهذا الوسط المرجح أكثر دقة من الوسط الحسابي غير المرجح .

إذا الوسط الحسابي المرجح $(\bar{w})$ يحسب بتطبيق المعادلة التالية :

$$\left(\overline{w}\right) = \frac{\sum xw}{\sum w} \qquad (٨-٣)$$

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

يتميز الوسط الحسابي بالمزايا التالية :

- أنه سهل الحساب .
- يأخذ في الاعتبار كل القيم .
- أنه أكثر المقاييس استخداما وفهما .

ومن عيوبه .

- أنه يتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة .
- يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية .
- يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة .

2/2/3 الوسيط Median

هو أحد مقاييس النزعة المركزية، والذي يأخذ في الاعتبار رتب القيم ، ويعرف الوسيط بأنه القيمة التي يقل عنها نصف عدد القيم $(n/2)$ ، ويزيد عنها النصف الآخر $(n/2)$ ، أي أن 50% من القيم أقل منه، 50% من القيم أعلى منه. وفيما يلي كيفية حساب الوسيط في حالة البيانات غير مبوبة ، والبيانات المبوبة.

أولا: الوسيط للبيانات غير المبوبة

لبيان كيف يمكن حساب الوسيط للبيانات غير المبوبة ، نتبع الخطوات التالية:

- ترتب القيم تصاعديا .
- تحديد رتبة الوسيط، وهي : رتبة الوسيط = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$
- إذا كان عدد القيم *(n)* فردي فإن الوسيط هو:

$$\text{الوسيط} = \text{القيمة رقم} \left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad (٩-٣)$$

- إذا كان عدد القيم (n) زوجي، فإن الوسيط يقع بين القيمة رقم $(n/2)$، والقيمة رقم $((n/2)+1)$، ومن ثم يحسب الوسيط بتطبيق المعادلة التالي:

$$\text{الوسيط} = \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\text{القيمة رقم} + \left(\frac{n}{2}\right)\text{القيمة رقم}}{2} \qquad (٣-١٠)$$

مثـــال (3-3)

تم تقسيم قطعة أرض زراعية إلى 17 وحدة تجريبية متشابهة ، وتم زراعتها بمحصول القمح ، وتم استخدام نوعين من التسميد هما : النوع (a) وجرب على 7 وحدات تجريبية ، والنوع (b) وجرب على 10 وحدات تجريبية ، وبعد انتهاء الموسم الزراعي ، تم تسجيل إنتاجية الوحدة بالطن / هكتار ، وكانت على النحو التالي :

النوع (a)	1.2	2.75	3.25	2	3	2.3	1.5			
النوع (b)	4.5	1.8	3.5	3.75	2	2.5	1.5	4	2.5	3

والمطلوب حساب وسيط الإنتاج لكل نوع من السماد المستخدم، ثم قارن بينها.

الحـــل

أولا : حساب وسيط الإنتاج للنوع الأول (a)

- ترتيب القيم تصاعديا :

قيمة الوسيط

الإنتاج	1.2	1.5	2	2.3	2.75	3	3.25
الرتبة	1	2	2	4	5	6	7

رتبة الوسيط

- عدد القيم فردى $(n=7)$
- إذا رتبة الوسيط هي: $((n+1)/2=(7+1)/2=4)$.
- ويكون الوسيط هو القيمة رقم 4 ، أي أن وسيط الإنتاج للنوع a هو:

$Med_a = 2.3$ طن / هكتار

ثانيا : حساب وسيط الإنتاج للنوع الثاني (b) :

- ترتيب القيم تصاعديا .

$$\text{قيمة الوسيط} = \frac{2.5+3}{2}$$

					2.75					
الإنتاج	1.5	1.8	2	2.5	2.5	3	3.5	3.75	4	4.5
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					5.5					

رتبة الوسيط

- عدد القيم زوجي $(n=10)$ إذا
- رتبة الوسيط هي : $((n+1)/2=(10+1)/2=5.5)$.
- الوسيط = الوسط الحسابي للقيمتين الواقعتين في المنتصف (رقم 5 ، 6) .

$$Med_b = \frac{2.5+3}{2} = 2.75 \quad \text{طن / هكتار}$$

وبمقارنة النوعين من السماد ، نجد أن وسيط إنتاجية النوع (a) أقل من وسيط إنتاجية النوع (b) ، أي أن : $Med_b > Med_a$.

ثانيا: الوسيط للبيانات المبوبة

لحساب الوسيط من بيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري ، يتم إتباع الخطوات التالية .

- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .
- تحديد رتبة الوسيط : $\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{\sum f}{2}\right)$
- تحديد فئة الوسيط كما في الشكل التالي :

تكرار متجمع صاعد سابق f_1 — الحد الأدنى لفئة الوسيط (A)

رتبة الوسيط $(n/2)$ ← الوسيط Med

تكرار متجمع صاعد لاحق f_2 — الحد الأعلى لفئة الوسيط

- ويحسب الوسيط ، بتطبيق المعادلة .

$$Med = A + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L \qquad (٣-١١)$$

حيث أن :

L هي طول فئة الوسيط، وتحسب بالمعادلة التالية:

طول الفئة = الحد الأعلى – الحد الأدنى

$L = Upper - Lower$

مثال (3-4)

فيما يلي توزيع 50 عجل متوسط الحجم ، حسب احتياجاته اليومية من الغذاء الجاف بالكيلوجرام

فئات الاحتياجات اليومية	1.5 -	4.5 -	7.5 -	10.5 -	13.5 – 16.5
عدد العجول f	4	12	19	10	5

والمطلوب : حساب الوسيط : أ - حسابيا ب- بيانيا

الحـــل

أولا : حساب الوسيط حسابيا

- رتبة الوسيط : $\frac{n}{2}=\frac{\sum f}{2}=\frac{50}{2}=25$
- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :

أقل من	تكرار متجمع صاعد	
1.5	0	
4.5	4	
A 7.5	f_1 16	
Med (الوسيط)	25	رتبة الوسيط
10.5	f_2 35	
13.5	45	
16.5	50	

- تحديد فئة الوسيط : وهى الفئة التي تشمل قيمة الوسيط ، وهي قيمة أقل منها $(n/2)$ من القيم ، ويمكن معرفتها بتحديد التكرارين المتجمعين الصاعدين الذين يقع بينهما رتبة الوسيط $(n/2)$ ، وفى الجدول أعلاه نجد أن رتبة الوسيط (25) تقع بين التكرارين المتجمعين , 35) (16 ، ويكون الحد الأدنى لفئة الوسيط هو المناظر للتكرار المتجمع الصاعد السابق 7.5 ، والحد الأعلى لفئة الوسيط هو المناظر للتكرار المتجمع الصاعد اللاحق 10.5 . أى أن فئة الوسيط هي : (7.5-10.5) .
- وبتطبيق معادلة الوسيط رقم (**3-11**) على هذا المثال نجد أن :

$$A=7.5\ ,\ f_1=16\ ,\ f_2=35\ ,\ L=10.5-7.5=3$$

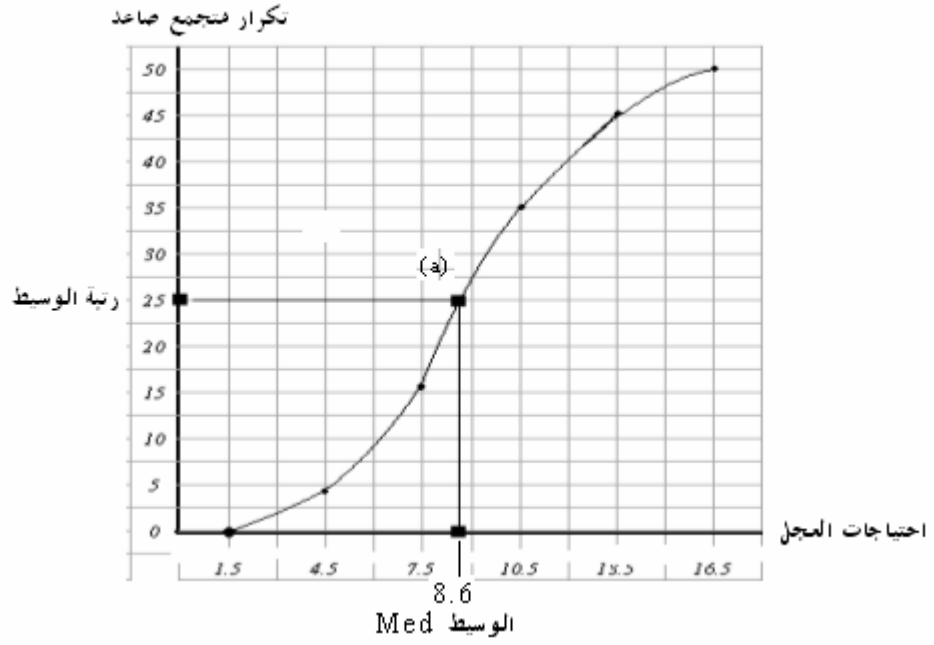
إذا الوسيط قيمته هي :

$$Med = A + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L = 7.5 + \frac{25-16}{35-16} \times 3$$

$$= 7.5 + \frac{9}{19} \times 3 = 7.5 + \frac{27}{19} = 7.5 + 1.421 = 8.921 \ k.g$$

ثانيا :حساب الوسيط بيانيا

- تمثيل جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد بيانيا .



- تحديد رتبة الوسيط (25) على المنحنى التكراري المتجمع الصاعد . ثم رسم خط مستقيم أفقي حتى يلقى المنحنى في النقطة (a) .
- إسقاط عمود رأسي من النقطة (a) على المحور الأفقي .
- نقطة تقاطع الخط الرأسي مع المحور الأفقي تعطى قيمة الوسيط .
- الوسيط كما هو مبين في الشكل Med = 8.6 .

مزايا وعيوب الوسيط

من مزايا الوسيط

1- لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

2- كما أنه سهل في الحساب .

3- مجموع قيم الانحرافات المطلقة عن الوسيط أقل من مجموع الانحرافات المطلقة عن أي قيم أخرى . أي أن : $\sum |x - Med| \leq \sum |x - a| \ , \ a \neq Med$

ومن عيوب الوسيط

1- أنه لا يأخذ عند حسابه كل القيم في الاعتبار، فهو يعتمد على قيمة أو قيمتين فقط .

2- يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية المقاسة بمعيار اسمي nominal

3/2/3 المنوال Mode

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا ، ويكثر استخدامه في حالة البيانات الوصفية ، لمعرفة النمط (المستوى) الشائع، ويمكن حسابة للبيانات المبوبة وغير المبوبة كما يلي:

أولا: حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة

المنوال (Mod) = القيمة (المستوى) الأكثر تكرارا (١٢-٣)

ثانيا: حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة (طريقة الفروق)

$$Mod = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times L \qquad (١٣-٣)$$

حيث أن :

A : الحد الأدنى لفئة المنوال (الفئة المناظرة لأكبر تكرار) .

d_1 : الفرق الأول = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق)

d_2 : الفرق الثاني = (تكرار فئة المنوال – تكرار لاحق)

L : طول فئة المنوال .

فئـــــة المنوال = الفئة المناظرة لأكبر تكرار

d_1 = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق) ← تكرار سابق

d_2 = (تكرار فئة المنوال – تكرار سابق) ← تكرار لاحق

تكرار فئة المنوال

مثـــال (3-5)

اختيرت عينات عشوائية من طلاب بعض أقسام كلية علوم الأغذية والزراعة ، وتم رصد درجات هؤلاء الطلاب في مقرر 122 إحصاء التطبيقي ، وكانت النتائج كالتالي:

قسم وقاية النباتات	80	77	75	77	77	77	65	70	58	67
قسم علوم الأغذية	88	68	60	75	93	65	77	85	95	90
قسم الاقتصاد	80	65	69	80	65	88	76	65	86	80
قسم الإنتاج الحيواني	85	73	69	85	73	69	69	73	72	85

والمطلوب حساب منوال الدرجات لكل قسم من الأقسام :

الحـــل

هذه البيانات غير مبوبة ، لذا فإن :

المنوال = القيمة الأكثر تكرارا

والجدول التالي يبين منوال الدرجة لكل قسم من الأقسام .

القسم	القيمة الأكثر تكرار	القيمة المنوالية
قسم وقاية النباتات	الدرجة 77 تكررت 4 مرات	المنوال = 77 درجة
قسم علوم الأغذية	جميع القيم ليس لها تكرار	لا يوجد منوال
قسم الاقتصاد	الدرجة 65 تكررت 3 مرات الدرجة 80 تكررت 3 مرات	يوجد منوالان هما : المنوال الأول = 65 المنوال الثاني = 80
قسم الإنتاج الحيواني	الدرجة 69 تكررت 3 مرات الدرجة 73 تكررت 3 مرات الدرجة 85 تكررت 3 مرات	يوجد ثلاث منوال هي : المنوال الأول = 69 المنوال الثاني = 73 المنوال الثالث = 85

مثال (3-6)

فيما يلي توزيع 30 أسرة حسب الإنفاق الاستهلاكي الشهري لها بالألف ريال .

فئات الإنفاق	2 -	5 -	8 -	11 -	14 - 17
عدد الأسر f	4	7	10	5	4

والمطلوب حساب منوال الإنفاق الشهري للأسرة، باستخدام طريقة الفروق .

الحل

لحساب المنوال لهذه البيانات يتم استخدام المعادلة رقم **(3-12)** ، ويتم إتباع الآتي :

- تحديد الفئة المنوالية

الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار : (8-11)

الفئات	التكرارات
2 -	4
5 -	7
8 -	10
11 -	5
14 - 17	4

فئة المنوال
$A = 8$
$d_1 = 10 - 7 = 3$
أكبر تكرار
$d_2 = 10 - 5 = 5$

- حساب الفروق d ، حيث أن :

$$d_1 = (10-7) = 3 \quad d_2 = (10-5) = 5$$

- تحديد الحد الأدنى للفئة المنوالية $(A = 8)$ ، وكذلك طول الفئة $(L = 3)$
- وبتطبيق المعادلة الخاصة بحساب المنوال فى حالة البيانات المبوبة . نجد أن :

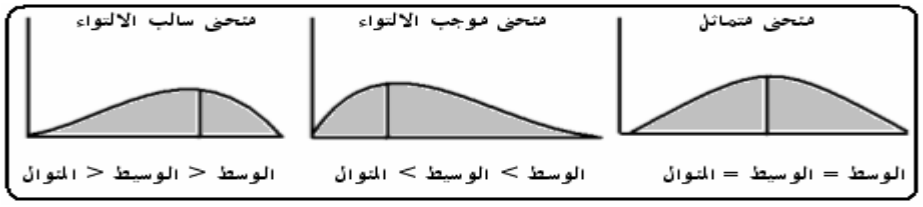
$$Mod = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times L$$

$$= 8 + \frac{3}{3+5} \times 3 = 8 + 1.125 = 9.125$$

3/3 استخدام مقاييس النزعة المركزية في تحديد شكل توزيع البيانات

يمكن استخدام الوسط الحسابي والوسيط والمنوال في وصف المنحنى التكراري، والذي يعبر عن شكل توزيع البيانات ، كما يلي :

شكل (3-1)



- يكون المنحنى متماثل إذا كان :

الوسط = الوسيط = المنوال .

- يكون المنحنى موجب الالتواء (ملتوي جهة اليمين) إذا كان:

الوسط > الوسيط > المنوال

- يكون المنحنى سالب الالتواء (ملتوي جهة اليسار) إذا كان :

الوسط < الوسيط < المنوال

مثال عام (3-7)

قام مدير مراقبة الإنتاج بسحب عينة من 10 عبوات من المياه المعبأة للشرب ، ذات الحجم 5 لتر ، والمنتجة بواسطة إحدى شركات تعبئة المياه لفحص كمية الأملاح الذائبة، وكانت كالتالي :

115 123 119 123 124 119 123 121 123 121

والمطلوب : حساب الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال، ثم حدد شكل الالتواء لهذه البيانات .

الحل

حساب الوسط الحسابي :

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1211}{10} = 121.1$$

- حساب الوسيط :

رتبة الوسيط : $(n+1)/2 = (10+1)/2 = 5.5$

ترتيب القيم تصاعديا

					قيمة الوسيط 122					
الطاقة	115	119	119	121	121	123	123	123	123	124
الرتبة	1	2	3	4	5	5.5 رتبة الوسيط	6	7	8	9	10

عدد القيم = 10 ، وهو عدد زوجي. الوسيط = الوسط الحسابي للقيمتين رقم (5 , 6)

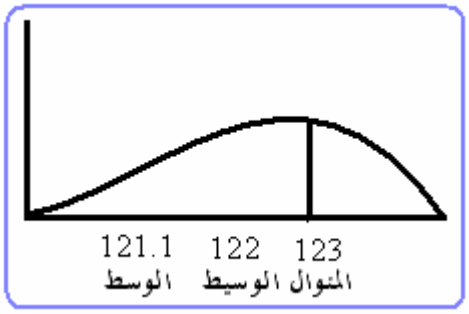
$$Med = \frac{121+123}{2} = \frac{244}{2} = 122$$

- حساب المنوال :

المنوال يساوى القيمة الأكثر تكرارا: القيمة 123 تكررت أكثر من غيرها ، إذا

$$Mod = 123$$

وبمقارنة الوسط والوسيط و المنوال نجد أن :



نجد أن : الوسط < الوسيط < المنوال ، إذا توزيع بيانات كمية الأملاح سالبة الالتواء.

مثال (3-8)

الجدول التكراري التالي يعرض توزيع 100 عامل في مزرعة حسب الأجر اليومي بالريال .

الأجر	50 -	70 -	90 -	110 -	130 -	150 -	170 - 190
عدد العمال	8	15	28	20	15	8	6

والمطلوب :

- **حساب الوسط والوسيط والمنوال .**
- **بيان شكل توزيع الأجور في هذه المزرعة .**

الحل

- **حساب الوسط والوسيط والمنوال .**

أولا : الوسط الحسابي $\overline{x}$

فئات الأجر	التكرارات (f)	مراكز الفئات (x)	f x
50 – 70	8	60	480
70 – 90	15	80	1200
90 – 110	28	100	2800
110 - 130	20	120	2400
130 - 150	15	140	2100
150 – 170	8	160	1280
170 - 190	6	180	1080
المجموع	100		11340

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{11340}{100} = 113.4 \ R.S$$

ثانيا : الوسيط Med

رتبة الوسيط : $(n/2 = 100/2 = 50)$

تكوين التوزيع التكراري المتجمع الصاعد .

أقل من	تكرار متجمع صاعد
أقل من 50	0
أقل من 70	8
أقل من 90	$23 \leftarrow f_1$
أقل من 110	$51 \leftarrow f_1$
أقل من 130	71
أقل من 150	86
أقل من 170	94
أقل من 190	100

رتبة الوسيط (50)

من الجدول أعلاه نجد أن :

$$\frac{n}{2}=50\ ,\ f_1=23\ ,\ f_2=51\ ,A=90\ ,L=110-90=20$$

إذا الوسيط قيمته هى :

$$Med=A+\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2-f_1}\times L=90+\frac{50-23}{51-23}\times 20$$

$$=90+\frac{27}{28}\times 20=90+\frac{540}{28}=90+19.286=109.3\ \ R.S$$

ثالثا : المنوال Mod

الفئة المنوالية ، هى الفئة المناظرة لأكبر تكرار

أكبر تكرار = 28 ، وهو يناظر الفئة التقريبية (110 - 90) .

حساب الفروق : $d_1=28-15=13\ \ ,\ \ d_2=28-20=8$

الحد الأدنى للفئة : $A=90$ طول الفئة : $L=110-90=20$

إذا المنوال يحسب بتطبيق المعادلة التالية :

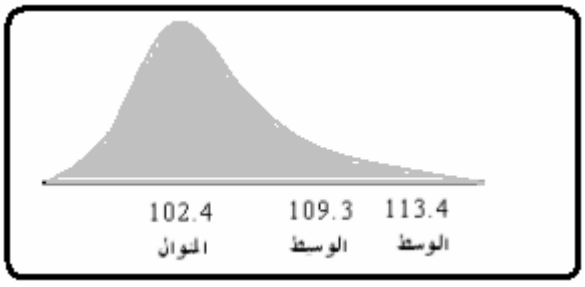
$$Mod=A+\frac{d_1}{d_1+d_2}\times L=90+\frac{13}{13+8}\times 20=90+\frac{260}{21}=1024\ \ R.S$$

- بيان شكل التوزيع .

من النتائج السابقة ، نجد أن :

الوسط الحسابي : $\overline{X}=113.4$ الوسيط : $Med=109.3$ المنوال : $Mod=1024$

أى أن : الوسط > الوسيط > المنوال إذا توزيع بيانات الأجور موجب الالتواء. كما هو مبين في الشكل التالي:



4/3 الرباعيات Quartiles

عند تقسيم القيم إلى أربع أجزاء متساوية، يوجد ثلاث إحصاءات ترتيبي تسمى بالرباعيات، وهي:

- الربيع الأول: وهو القيمة التي يقل عنها ربع عدد القيم، أي يقل عنها 25% من القيم، ويرمز له

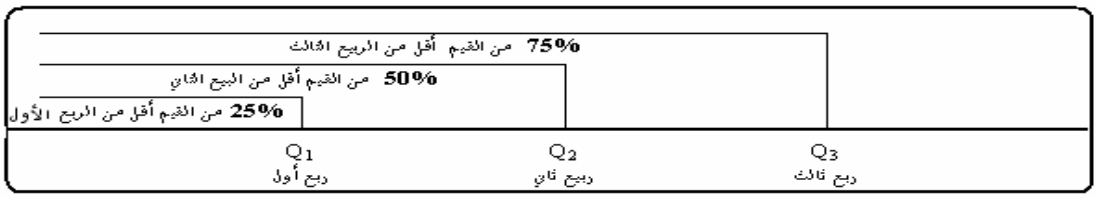
بالرمز Q_1.

- الربيع الثاني: وهو القيمة التي يقل عنها نصف عدد القيم، أي يقل عنها 50% من القيم، ويرمز له بالرمز Q_2، ومن ثم يعبر هذا الربيع عن الوسيط.
- الربيع الثالث: وهو القيمة التي يقل عنها ثلاث أرباع عدد القيم، أي يقل عنها 75% من القيم، ويرمز له بالرمز Q_3.

والشكل (3-3) يبين أماكن الرباعيات الثلاث.

شكل (3-3)

الرباعيات



ولحساب أي من الرباعيات الثلاث، يتم إتباع الآتي:

- بفرض أن عدد القيم عددها n، وأنها مرتبة كالتالي:

القيم مرتبة:	$X_{(1)}$	< $X_{(2)}$	< $X_{(3)}$	< $X_{(n)}$
الرتبة :	1	2	3	n

- تحديد رتبة الرباعي رقم i، (Q_i): $R = (n+1)\times\left(\frac{i}{4}\right)$
- إذا كانت R عددا صحيحا فإن قيمة الربيع هو: $Q_i = X_{(R)}$.
- إذا كانت R عدد كسري، فإن الرباعي (Q_i) يقع في المدى : $X_{(l)} < Q_i < X_{(u)}$ ، ومن ثم يحسب (Q_i) بالمعادلة التالية:

$$Q_i = X_{(l)} + (R-l)(X_{(u)} - X_{(l)}) \qquad (٣-١٤)$$

مثال (3-9)

فيما يلي كمية الإنتاج اليومي من الحليب باللتر للبقرة الواحدة لعينة حجمها 10 أبقار اختيرت من مزرعة معينة:

25 23 29 32 34 29 20 18 27 30

احسب الرباعيات الثلاث لكمية الإنتاج، وما هو تعليقك؟

الحل:

لحساب الرباعيات الثلاث، يتم إتباع الآتي:

- ترتيب القيم تصاعديا:

قمة الربيع	22.25	28	30.5

القيم	18	20	23	25	27	29	29	30	32	34
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رتبة الربيع	2.75				5.5			8.25		

- **حساب الربيع الأول (Q_1):**

رتبة الربيع الأول هي: $R = (n+1)\times\left(\frac{i}{4}\right) = (10+1)\times\left(\frac{1}{4}\right) = 2.75$

يقع الربيع الأول بين القيمتين: $(20 < Q_1 < 23)$، **وبتطبيق المعادلة (3-14) نجد أن:**

$$l = 2,\ R = 2.75\ ,x_{(l)} = 20\ .x_{(u)} = 23$$

إذا :

$$Q_1 = x_{(l)} + (R-l)\times(x_{(u)} - x_{(l)}) = 20 + 0.75(23-20) = 22.25$$

- **حساب الربيع الثاني (الوسيط)** Q_2

رتبة الربيع الثاني هي: $R = (n+1)\times\left(\frac{i}{4}\right) = (10+1)\times\left(\frac{2}{4}\right) = 5.5$

يقع الربيع الثاني بين القيمتين: $(27 < Q_2 < 29)$، **وبتطبيق المعادلة (3-14) نجد أن:**

$$l = 5,\ R = 5.5\ ,x_{(l)} = 27\ .x_{(u)} = 29$$

إذا :

$$Q_2 = x_{(l)} + (R-l)\times(x_{(u)} - x_{(l)}) = 27 + 0.5(29-27) = 28$$

- **حساب الربيع الثالث** Q_3

رتبة الربيع الثالث هي: $R = (n+1)\times\left(\frac{i}{4}\right) = (10+1)\times\left(\frac{3}{4}\right) = 8.25$

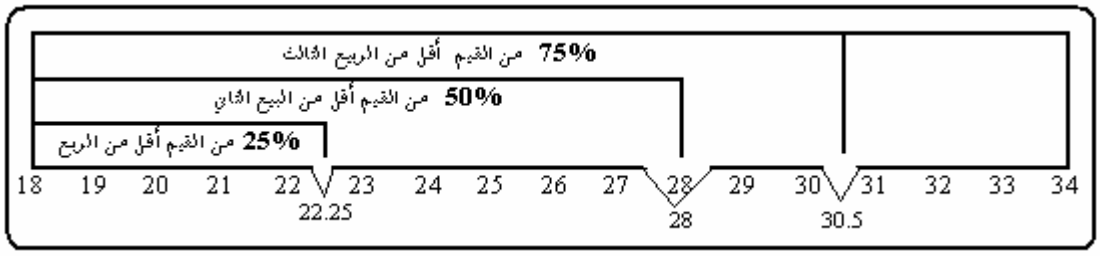
يقع الربيع الثالث بين القيمتين: $(30 < Q_3 < 32)$، **وبتطبيق المعادلة (3-14) نجد أن:**

$$l = 8,\ R = 8.25\ ,x_{(l)} = 30\ .x_{(u)} = 32$$

إذا :

$$Q_3 = x_{(l)} + (R-l)\times(x_{(u)} - x_{(l)}) = 30 + 0.25(32-30) = 30.5$$

من النتائج السابقة نجد أن:



- 25% من الأبقار يقل إنتاجه عن 22.25 لتر يوميا.
- 50% من الأبقار يقل إنتاجه عن 28 لتر يوميا.
- 75% من الأبقار يقل إنتاجه عن 30.5 لتر يوميا.