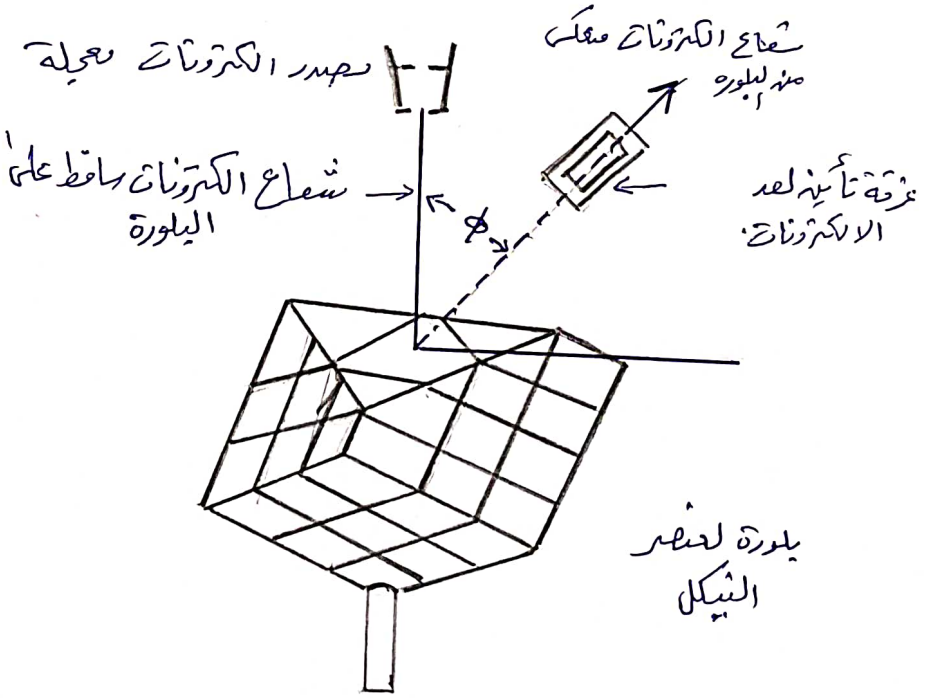
الفصل الثالث : ميكانيك الموجي 3

رأينا في الفصل الأول ان الأشعة الكهرومغناطيسية تتصرف وكأنها جسيمات من حيث أنها منفصلة وتأتي على شكل حزم وفيها حيث تبادل للزخم كما في تشتت كومبتون وتتصرف أيضاً كموجات في تشتت أشعة - X .

في هذا الفصل سندرس العكس وهي الصفة الموجية للجسيمات وأهم تجربة في هذا الخصوص هي تجربة دافيسون - جيرمر وفيها يتم رصد وقياس الموجات المصاحبة للجسيمات المتحركة .



شكل تخطيطي لمكونات تجربة دافيسون وجيرمر

من نتائج تجربة دافيسون انه الالكترونات المارة من خلال البلورة تظهر دوائر معتمة واخرى مظلمة عند سقوطها على شاشة متفلورة. وهذه النتيجة حيرت الفيزياويين انذاك الى ان قال العالم الفرنسي دي برولي انه الجسيمات التي لها زخم P تتصرف كامواج لها طول موجي λ يحسب كالتالي

$$\lambda = \frac{h}{P}$$

أذ ان h هو ثابت بلانك وقيمته $6.626 \times 10^{-34}\ J\cdot s$

وهذه تنطبق على الجسيمات الصغيرة جداً المجهرية وهذا مثال يؤكد هذه الحقيقة

مثال : أحسب طول موجة دي برولي لالكترون يسير بسرعة $V = 2 \times 10^{6}\ m/s$ ثم قارن النتيجة مع جسم يسير بنفس السرعة وكتلته $10\ kg$ ؟

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ J\cdot s}{9.1 \times 10^{-31}\ kg \times 2 \times 10^{6}\ m/s}$$

$$= 3.6 \times 10^{-10}\ m = 3.6\ A^{\circ}$$

للالكترون وهي موجة واضحة

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ J\cdot s}{10\ kg \times 2 \times 10^{6}\ m/s} = 3.3 \times 10^{-41}\ m$$

$$\lambda = 3.3 \times 10^{-31}\ A^{\circ}$$

للجسم كلا موجة غير محسوسة

نلاحظ من النتيجة رغم السرعة العالية للجسم فإن طول موجته قصير جداً مقارنة مع موجة الإلكترون وهذا يدل على أن فانوه دي برولي يكون أكثر واقعية مع الجسيمات المجهرية.

ولكي يصح قانون دي برولي يجب أن يتوافق مع المعادلة السائدة أنذاك

مثال: حزمة الكترونية طاقتها (54 eV) سلطت بصورة عمودية على سطح البلور فتشتت الحزمة بكثافة عالية عند زاوية (65°) بالنسبة لمسار الأشعة وباستخدام قانون براغ

$$n\lambda = 2d\sin\theta \qquad \text{[يتم التعامل مع الأمواج]}$$

إذ أن n ، λ ، d هي مرتبة الشدة القصوى، طول موجة الأشعة الساقطة، المسافة بين المستويات الذرية المتعاقبة في البلورة على التوالي من خواص البلور أنذ ($d = 0.911\,A^\circ$) ولنفرض أن ($n = 1$)

$$\lambda = 2 \times 0.911 \times \sin(65^\circ)$$

$$= 1.65\ A^\circ \qquad \text{قانون براغ}$$

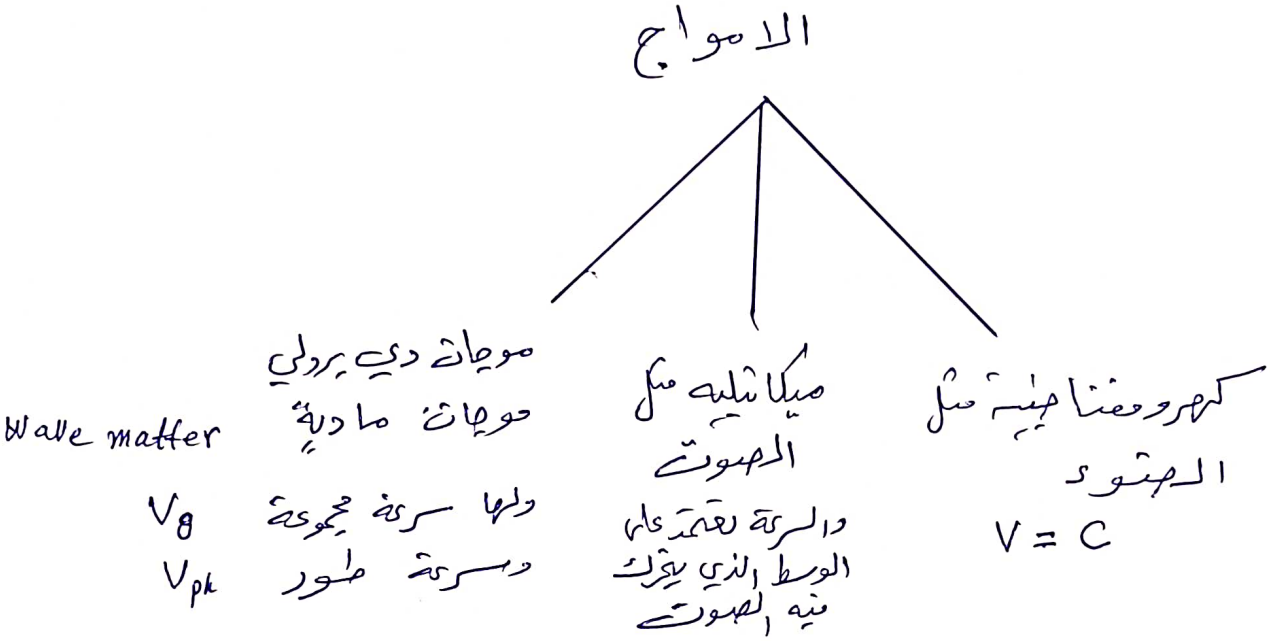
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

$$= \frac{6.626 \times 10^{-34}\ j\cdot s}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 54 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 1.66 \times 10^{-10}\ m$$

$$= 1.66\ A^\circ \qquad \text{قانون دي برولي}$$

وهذا التطابق الممتاز أثبت صحة فانون دي برولي.

السؤال المطروح ماهي امواج دي برولي ؟
هل هي امواج كهرومغناطيسية أم امواج ميكانيكية ؟



وهنا فتح دي برولي مجالاً واسعاً للدراسة في العالم المجهري كتعامل موجي وليس جهري (عياني) وهنا نشأ علم الميكانيك الكمي

يمكنة استخدام علاقة دي برولي لحساب الطاقة الحركية للجسيمات وهي عدة انواع طاقة غير نسبية $K.E = \frac{P^2}{2m}$ أو نقول $P = \sqrt{2m(K-E)}$ أو $pc << m_0c^2$ أيضاً طاقة غير نسبية

أما اذا كانت طاقة نسبية فتحسب كالتالي $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

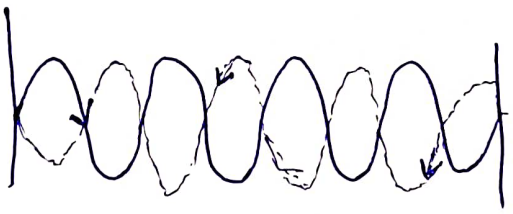
أو $K.E = mc^2 - m_0c^2$

كيف يتمظهر الجسيم الذي هو كتلة تمظهراً موجياً ، فكرة
دي برولي جاءت بتموجيج الجسيمات
ماهي الخصيصة التي تميز الجسيمة والتي تميز الامواج

الموجة تتميز ← الامتداد بالفضاء [لا يحدها حدود بشكل تام وأي كانه شكلها]
التغير [ليست ثابتة]

الجسيم ← التحيز Localization
الثبات في الشكل والموقع

بالامكانة تحيز الموجة [حصرها في مكان]



نتيجة التحيز تكونة البطون والعقد نتيجة التداخل بين الموجة
ونفسها ونقول عنها موجة واقفة Standing wave
والموجة الواقفة هي ابسط حاله للموجة المتحيزة والتحيز يوفر
توزيع غير متجانس non-isotropic حيث تزاد في مكان
وتختفي في مكان آخر
والتحيز للموجة يحولها الى موجة مركبة وليست موجة بسيطة .

ما هي الصيغة الرياضية للموجة المرافقة للجسيم

$$\left.\begin{aligned} y(x,t) &= A\sin(kx-\omega t) \\ y(x,t) &= A\,e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned}\right\} \quad \text{---} \ (*)$$

وهذه صيغ متعارف عليها كلاسيكياً.

ω تمثل التردد الزاوي $\quad \omega = 2\pi f$

k العدد الموجي $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$

انه سرعة تحرك نقطة ثابتة الطور $(kx-\omega t)$ تمثل سرعة انتقال الموجة

$$kx - \omega t = \text{Constant}$$

$$x = \frac{\omega t}{k} + \text{Constant}$$

تمثل سرعة الطور $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = u$

انه اختيار الموجة بهذا الشكل العلاقة $*$ يسبب شاكل منها

١- الموجة دورية تعيد نفسها في المكان والزمان بشكل غير محدود وتمتد على كل قيم x (من $-\infty$ الى $+\infty$) فأي نقطة من نقاط الفضاء يوجد الجسيم؟

٢- ان سرعة الجسيم وسرعة الموجة لا يتساويان بعكس المطلوب الذي يقول ان الموجة ترافق الجسيم.

(7)

$$\lambda = \frac{h}{mV}$$ من علاقة دي برولي

$$U = \lambda \nu$$ (ν تردد الموجة، U سرعتها)

$$\therefore \quad U = \nu \cdot \frac{h}{mV} \qquad \text{---------} \quad **$$

$$E = h\nu$$ من علاقة بلانك للموجة الكمية

$$\nu = \frac{E}{h}$$

$$E = mc^2$$ من النسبية

$$\therefore \nu = \frac{mc^2}{h}$$

نعوض في $**$

$$\therefore U = \frac{mc^2}{h} \cdot \frac{h}{mV}$$

$$U = \frac{c^2}{V}$$

وهنا V سرعة الجسيم و c سرعة الضوء ولذلك لا يمكن لسرعة الجسيم أن تبلغ سرعة الضوء وبالتالي فإن سرعة الموجة ستكون أكبر من سرعة الجسيم ولا تتحقق الملاقمة .

الحزمة الموجية :

ان عدم تحقق المرافقة بين سرعة الجسيم وسرعة الموجة يجعلنا نفكر بموضوع آخر لنفرض بشكل مبسط أولا انه لدينا موجتين مقطعتان عن بعضهما بمقدار صغير جدا أي لعدد الموجي والتردد الزاوي

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos((k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t)$$

لنستخدم العلاقة الرياضية

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

سنقوم بجمع المعادلتين y_1 ، y_2 معاً

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

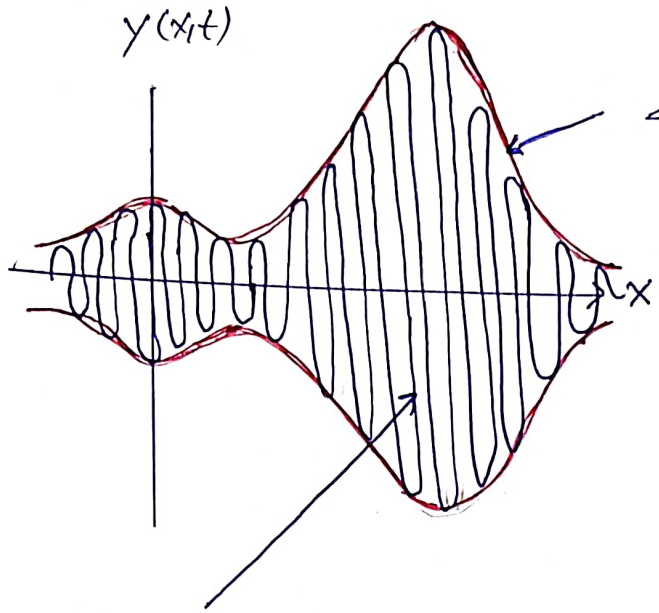
$$= A\cos(kx-\omega t) + A\cos((k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t)$$

$$= 2A\cos\left[\frac{kx-\omega t + (k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t}{2}\right] *$$

$$\cos\left[\frac{kx-\omega t - (k+\Delta k)x + (\omega+\Delta\omega)t}{2}\right]$$

$$y(x,t) = 2A\cos\left[\frac{(2k+\Delta k)x - (2\omega+\Delta\omega)t}{2}\right]\cos\left[\frac{\Delta k x - \Delta\omega t}{2}\right]$$

والآن سنقوم برسم هذه العلاقة



(موجة الجيوبة) موجة الغلاف
لها تردد واطئ.
سرعة V_g

موجة الطور (موجة ذات تردد عالي)
سرعة الطور V_p

هذه تعتبر أبسط طريقة لتمييز الموجة (اي اعطائها صفة جسيمية)
أو تمويج الجسيم تنتج عنه ان الجسيمات صارت على شكل كبسولة
أمواج Group wave
واصبح لها عرض وليس تمييز تام واعطت wave packet.

سرعة الدالة الاحتوائية V_g تساوي

$$V_g = \frac{dw}{dk}$$

$$V_p = u = \frac{w}{k}$$

يمكننا اثبات علاقة المرافقة منذ خلال سرعة الجسيم V وسرعة المجموعة V_g والتي يجب ان تتساويا

(10)

$$W = 2\pi\nu = 2\pi \frac{mc^2}{h}$$

$$W = \frac{2\pi m_0 c^2}{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi mv}{h}$$

$$k = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} = \frac{\frac{dw}{dv}}{\frac{dk}{dv}}$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{2\pi m_0 v}{h\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{3/2}} \quad \text{——— (A)}$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{3/2}} \quad \text{——— (B)}$$

بقسمة المعادلة (A) على المعادلة (B) نحصل على

$$v_g = v$$

ذلك يعني مرافقة الموجة للجسيم وهذا يؤكد السلوك الموجي للجسيم من خلال حركة الموجة.

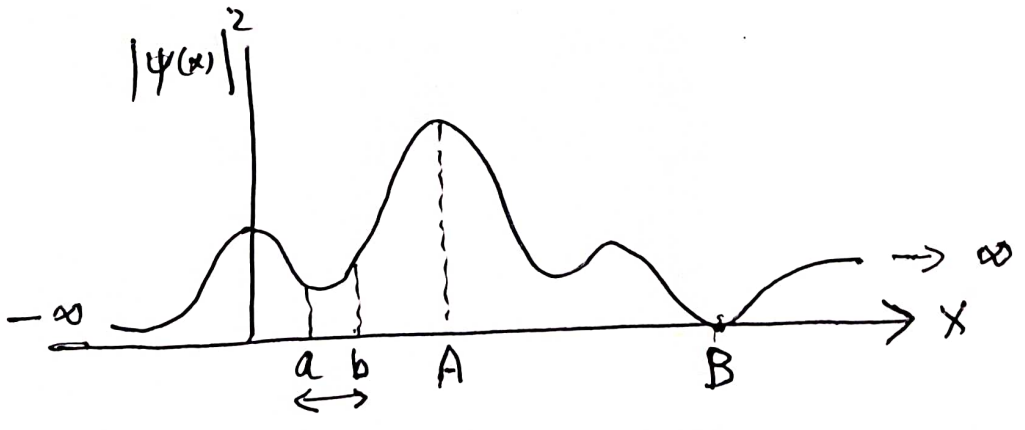
تأويل الدالة الموجية

لننظر ماذا قال شرودنجر :

قال شرودنجر انه ψ تمثل جسيم يتفكك تمثله دالة موجية تنتشر على كل الفضاء لذلك ذاة الجسيم يتحلل تماماً فتظهر تبعاً دوال موجيه كثيره وهناه جسيمات كثيره وهذا تفسيره .

ثم جاء ماكس بورن وقال انه هذا لايبدو مرضياً بالنسبة لي وقال لو وضعنا هلا لمعادلة شرودنجر واي واحد آخر يحلها باستخدام جهد كولوب ذاة الدالة الموجية ستكون متناسبة مع $\frac{1}{r}$ أو $\frac{2}{r}$ واذا اجرينا القياس فاننا نجد جزء صغير هنا وهذا خاطئ وقد اجرينا التجربة وقمنا بالقياس فوجدنا الجسيم كاملاً اي الجسيم لم يتفكك (يتحلل) .

هنا اتى شرودنجر مد ماكس بورن ولكنه الأخير قال الحاله تمثل أحتمالات probabilities لانها فجأة نفقد جسيم وجود الجسيم ولكنة شرودنجر واينشتين لم يوافقا على التفسير الاحتمالي



نلاحظ الاحتمالية في نقطة B تساوي صفر بينما بين (a→b) هناك بعض الاحتمالية وعند A يوجد اكبر احتمال

$$\int_a^b |\psi|^2 dx \neq 0$$

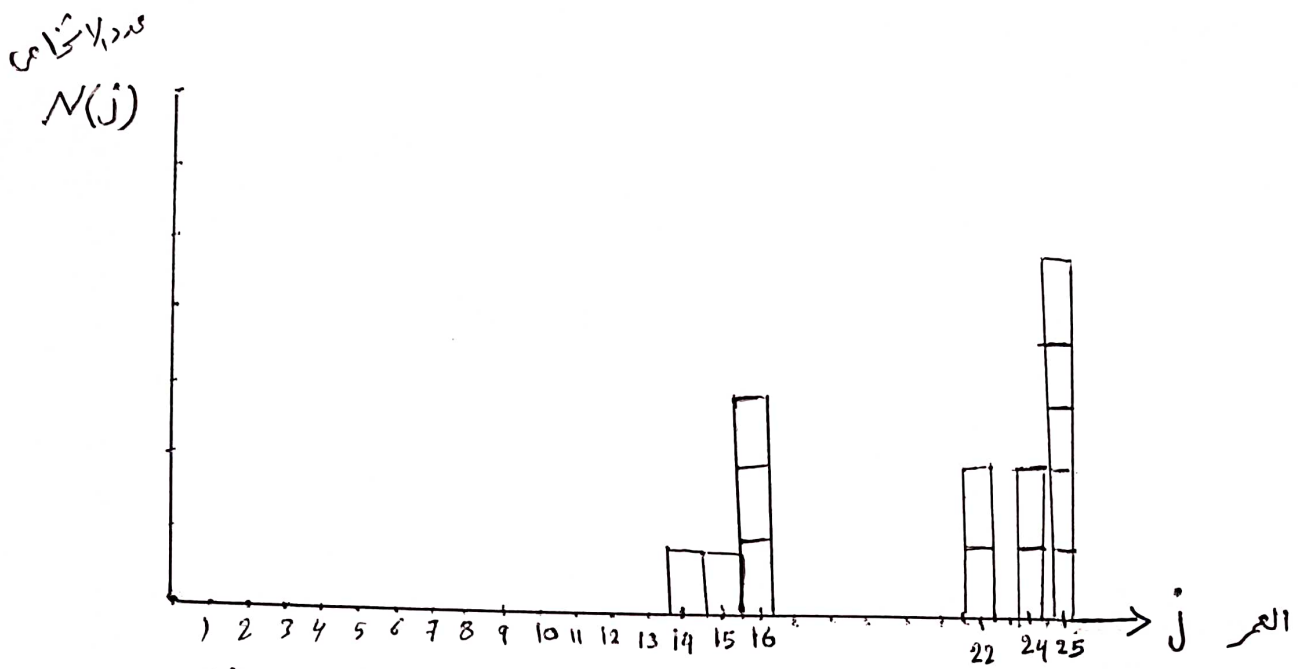
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

من هذه الملاحظات والتفسيرات التي تخص الدالة الموجية والتي تظهر ما يسمى بالاحتمالية.

الاحتمالية probability

تلعب الاحتمالية دوراً مركزياً في الميكانيك الكمي بسبب التفسير (التأويل) الاحصائي والمثال التالي.

غرفة تحتوي على 14 شخصاً ولهم أعمار مبينة بالشكل



مدرج أحصائي يوضح عدد الأشخاص $N(j)$ بعمر j حيث التوزيع

$N(14) = 1$

$N(15) = 1$

$N(16) = 3$

$N(22) = 2$

$N(24) = 2$

$N(25) = 5$

$N(18) = ?$

N مجموع الأشخاص في الغرفة ؛ $N = \sum_{j=0}^{\infty} N(j)$

هنا $N = 14$ والرسم البياني [المدرج] الاحصائي يوضح هذه البيانات

السؤال : ما هي الاحتمالية لشخص عمره 15 سنة

الجواب : هنالك فرصه واحده من أصل 14

لتكن $p(j)$ تمثل الاحتمالية

$$p(15) = \frac{1}{14}$$

$$p(16) = \frac{5}{14}$$

$$p(18) = 0$$

$$\vdots$$

$$p(j) = \frac{N(j)}{N}$$

$$p(14,15) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}$$

مجموع الاحتمالات الذاتية

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(j) = 1$$

سؤال ماهو العمر الأكثر احتمالاً ؟

الجواب انه العمر (j) الأكثر احتمالاً هو j الذي فيه $p(j)$ أكبر ما يمكنه

سؤال : ماهو معدل (أو وسط) العمر ؟

الجواب

$$\langle j \rangle = \frac{\sum j N(j)}{N}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j\, p(j)$$

فلو حسبنا المعدل في مثالنا لوجدناه 21 ولاحتمل عمر أي شخص من المجموعة .

في Q.M فان المعدل له أهمية كبيرة ويسمى بالقيمة المتوقعة expectation Value . وتمثل عند إجراء القياس بالقيمة الأكثر احتمالاً .

$$\langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j)$$ معدل مربع العمر

$\langle j^2 \rangle$ ليس بالضرورة انه يساوي $\langle j \rangle^2$

مثلاً: طفلان في غرفة أحدهما عمره سنة والثاني ثلاث سنوات.

$$\langle x^2 \rangle = 5 \quad = \sum j^2 P(j)$$
$$\langle x \rangle^2 = 4 \quad = [\sum j (P(j)]^2$$

أصبح لدينا $\langle j \rangle$ كمعدل والآن نريد ماهو الانحراف عن المعدل [اي مقدار الزيادة والنقصان عن المعدل] ولنسمي الانحراف Δj

$$\Delta j = j - \langle j \rangle$$

$$\langle \Delta j \rangle = \sum (j - \langle j \rangle) P(j)$$

$$= \sum j P(j) - \langle j \rangle \sum P(j)$$

يعتبر $\langle j \rangle$ مقدار ثابت

عندما $\langle \Delta j \rangle$ تكون صافي الصفر يعتبر الموضوع مرجحاً ويتم التغلب على هذه المشكلة بأخذ القيمة المطلقة وذلك بأخذ التربيع مثل المعدل ولنسميها σ

$$\sigma^2 = \langle (\Delta j)^2 \rangle$$

وتعرف هذه الكمية باسم التباين Variance في التوزيع.

(6) σ هي الجذر التربيعي لمتوسط مربع الانحراف عن المتوسط وتسمى الانحراف المعياري Standard deviation وهو مقياس للفرق (الانتشار) حول j .

$$\sigma^2 = \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 p(j)$$

$$= \sum (j - \langle j \rangle)^2 p(j)$$

$$= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) p(j)$$

$$= \sum j^2 p(j) - 2\langle j \rangle \sum j p(j) + \langle j \rangle^2 \sum p(j)$$

$$= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle\langle j \rangle + \langle j \rangle^2$$

$$\sigma^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2$$

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2}$$

نستنتج أن $\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2$

وعلى العموم فان $\langle j^2 \rangle$ لايمكن ان تساوي $\langle j \rangle^2$ والحالات تحدث فقط عندما لايوجد اي انتشار (no-spread) نهائياً اي ان $\sigma = 0$.

اذا كان لدينا متغيرات متصلة Continuous Variable
فانه نتعامل معها من خلال التكامل التالية

الاحتمالية بين x و $x+dx$ هي $p(x)dx$ و $p(x)$ تسمى كثافة الاحتمال probability density او الاحتمالية، لانه تكون المتغير x بين a و b هي

$$P_{ab} = \int_a^b p(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\,dx$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p(x)\,dx$$ بصورة عامة

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

مثال: تم اسقاط صخرة ضيالة جرف ارتفاعة h ومنه لحظة سقوطها تم التقاط مليون صورة لها في فترات عشوائية وفي كل صورة تم قياس مسافة سقوط الصخرة. ماهو معدل كل هذه المسافات (ماهو المعدل الزمني للمسافة المقطوعة).

الحل

تبدأ الصخرة عند السكون ثم تتسارع اثنا السقوط وتقضي زمنا اكبر في القمة ولذلك معدل المسافة يجب انه يكون أقل من $\frac{h}{2}$.

تحل مقاومة الهواء فانه المسافة X عند الزمن t هي

$$X(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = gt$$ السرعة

$$T = \sqrt{2h/g}$$ زمن الطيران

احتمالية ان تقع الكاميرا في الزمن dt هي $\frac{dt}{T}$

لذلك فانه احتمال ظهور صورة في المسافة dx هي

$$\frac{dt}{T} = \frac{\frac{dX(t)}{gt}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{dx}{gt} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{dx}{2\sqrt{xh}}$$

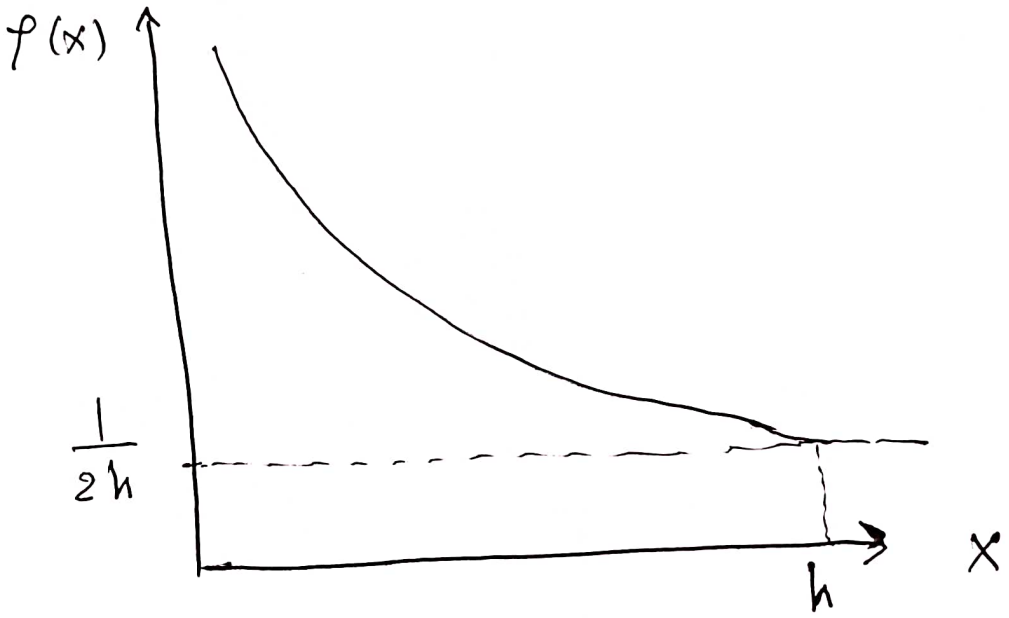
$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}}$$ كثافة الاحتمال

for $0 < x < h$

(9) $$\int_0^h \frac{dx}{2\sqrt{hx}} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(2x^{1/2}\right)\Big|_0^h = 1$$

$$\langle x \rangle = \int_0^h x \frac{dx}{2\sqrt{hx}} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

وهذا يعني أن $\frac{h}{2}$.



$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}}$ حيث

Normalization — المعايرة (التقويم)

معايرة الدالة الموجية :

دالة الموجة تمثل الجسيم وهو تعبير رياضي .

$|\psi|^2$ probability density كثافة الاحتمال

$|\psi|^2 dx$ probability of finding a particle at x and $x+dx$

اي احتمالية ايجاد الجسيم بين x و $x+dx$

$\int_{\text{all space}} |\psi|^2 dx \equiv$ total probability الاحتمالية الكلية

والمعايرة Normalization هو الاحتمالية الكلية وهي 100%

والاحتمالية الكلية تعني $\int_{\text{all space}} |\psi|^2 dx = \frac{100}{100} = 1$

لنفرض لدينا دالة موجة لجسيمة حرة $\psi(x) = A e^{ikx}$

في المعايرة هو ايجاد قيمة A [السعة] التي تعطي الاحتمالية 100%

مثال : لدينا الدالة $\Phi(\phi) = A e^{im\phi}$ وهذه دالة لجسيم يدور في دائرة ، المطلوب ايجاد الثابت A ؟

نجري عملية المعايرة

$$\int_0^{2\pi} A^* e^{-im\phi} \cdot A e^{im\phi} d\phi = 1$$

$$\int_0^{2\pi} |A|^2 d\phi = 1 \Rightarrow |A|^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

$$|A|^2 \cdot 2\pi = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore \Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

هذه هي الدالة المعايرة .

عندما تكون $\Phi(\phi)$ دالة دورية [اي تعيد نفسها] خاصية

m تكون عدد صحيحاً بأحد القيم $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

[أثبت ذلك] .

لنفرض اننا حصلنا على عملية المعايرة عند الزمن $t=0$ كما في المثال السابق والسؤال هل ستبقى الدالة معايرة بعد فترة زمنية أخرى؟ فاذا لم تكن كذلك معناه لا يوجد حل لمعادلة شرودنجر ولكنة معادلة شرودنجر لها خاصية رائعة تحافظ بها تلقائياً على المعايرة للدالة الموجية وبذلك تغير دالة شرودنجر (معادلة) غير متوافقة مع التفسير الاحصائي وتنهار النظرية .

[يمكن للطالب الرجوع الى الكتاب لاثبات ان الدالة تبقى معايرة حتى بعد زمن مقداره t]

The Uncertainty principle — مبدأ اللادقة

هو لايمكن تحديد خاصيتين مقاستين من خواص الجسم بدقة تامة واذا تم تحديد احد الخاصيتين بدقة تامة يكون ذلك على حساب الخاصية الاخرى.

في الميكانيك الكمي نحسب الاحتمالات والمعدل لانه مبدأ اللادقة متأصل في الميكانيك الكمي والمقصود عدم الدقة في الموقع او زخم الجسيم هو درجة تشتت الموجة نسبة الى القيمة المركزية ومبدأ عدم الدقة لهايزنبرك اعطا الغاية الصغرى لحاصل ضرب اللادقة في موقع الجسيم وما يقابله من الزخم

$$\Delta X \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \leftarrow \text{يحدد الطاقة المحفوظة}$$

مثال: اذا علمت ان طاقة الربط داخل النواة تقدر بحدود (8 MeV) - استخدم مبدأ اللادقة $\Delta X \, \Delta p \geq \hbar$ لاثبات استحالة وجود الالكترون داخل النواة التي قطرها 10^{-14} متر.

الحل

لكي يكون الالكترون في داخل النواة فانه مقدار التحديد في موضعه

(4)

لا يزيد عن قطر النواة أي أن

$$\Delta x = 10^{-14}\ m$$

$$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{10^{-14}} = 1.05 \times 10^{-20}\ kg.m\ s^{-1}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$ من العلاقة النسبية

نهمل $m_0^2c^4$ لأنها صغيرة جداً جداً بالنسبة الى الطاقة الحركية p^2c^2

$\therefore E = pc$

$$\Delta E = c\Delta p = 3 \times 10^{8} \times 1.05 \times 10^{-20}$$

$$= 3.2 \times 10^{-12}\ kg.\frac{m^2}{s^2}$$

$$= 20\ MeV$$

وهذه اكبر بكثير من طاقة الربط داخل النواة لذلك لا يصح وجود الالكترون داخل النواة.

ملاحظة

$$c = \frac{m}{s}$$

$$\Delta p = kg.\frac{m}{s}$$

$$c\Delta p = kg.\frac{m^2}{s^2} = Jule$$

$$eV = \frac{Jule}{1.6 \times 10^{-19}}$$

(5)

Schrodinger's Equation — معادلة شرودنجر

معادلة شرودنجر معادلة تفاضلية موجية (ذات المتغيرات ثابتة) والتي تعطي حلها الدالة الموجية التي تصف سلوك الجسيمات (الواقعة في مجال جهد ما).

$$E = T + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(r) \qquad \text{——— (1)}$$

نحتاج الطاقة E ، p للجسيم الموصوف بفرضية دي برولي وهذه المعلومات في الدالة الموجية

$$\psi(x,t) = A\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)\left(\frac{ip}{\hbar}\right)\psi$$

$$\therefore \boxed{p^2 = \frac{-\hbar^2}{i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad -* \quad \text{تمثل زخم الجسيم}$$

نفاضل الدالة الموجية بالنسبة للزمن

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi$$

$$\boxed{E = \frac{-\hbar}{i\psi}\frac{\partial \psi}{\partial t}} \quad -**$$

لحوضنا المعادلتين * و ** في المعادلة (1)

$$\frac{-\hbar}{i\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)$$

نضرب طرفي المعادلة في ψ والجانب الأيسر في $\frac{i}{i}$ نحصل

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\,\psi(x,t)$$

وهذه معادلة شرودنجر العامة

يجب ان يعطي حل هذه المعادلة الدالة الموجية لانه اشتقاق المعادلة جاء منه الدالة السابقة.

ويمكننا كتابة المعادلة:

$$E\,\psi(x,t) = \hat{H}\,\psi(x,t)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

معادلة شرودنجر تحتوي على العدد التخيلي i بينما المعادلة الكلاسيكية ليس بها ذلك

معادلة شرودنجر فيها المشتقة الأولى بالنسبة للزمن بينما معادلة الموجة الكلاسيكية في المشتقة الثانية

الجانب الأيسر مشتقة الأولى بالنسبة للزمن لذلك معرفة ψ في أي لحظة زمنية يمكننا معرفتها في أي لحظة أخرى

يمكن كتابة الدالة الموجية $\psi(x,t) = \psi(x)\,\phi(t)$ ثم

تعويضها في معادلة شرودنجر نحصل على

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar}\phi$$

$$\phi(t) = C\,e^{-iEt/\hbar}$$

وكذلك

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) = E$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

خواص الدالة الموجية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx = 1$$

- وهذا يعني ان الجسيم موجود في نقطة ما من نقاط الفضاء الذي تصفه الدالة الموجية

$$p(x,t) = \psi^*\psi$$

- وهي كثافة احتمالية

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\,\psi(x,t)\,dx = N$$

- N ثابت المعايرة .

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

ثابتة بمرور الوقت

- الدالة وتفاضلها تساوي صفر في اللانهايات $\pm\infty$

- أحادية القيمة

المعنى الفيزيائي للدالة الموجية

١- مرتبطة بالخصائص الموجية للجسيمات وبالكميات القابلة للملاحظة والقياس كالطاقة والزخم

٢- تزويدنا بكثافة الاحتمال لوجود جسيم في حالة الفيزيائية التي تمثلها الدالة

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

٣- احتمال وجود الجسيم في الموقع بين X و $X+dx$ هو $|\psi(x)|^2 dx$ يعني وجود رابطة احصائية بين الصفة الموجية والصفة الحادية

كثافة تيار الاحتمال probability Current density

حالا سيكيا $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x}$ اي تغير كثافة الشحنة مع الزمن يؤدي الى وجود تيار

كميا لدينا كثافة الاحتمال $P(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$ وعليه نفكر بوجود تيار الاحتمال

نبدأ بمعادلة شرودنجر

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi \quad \text{---} (1)$$

المرافقة لمعادلة شرودنجر (2) ---

$$-ih\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + U(x)\psi^*$$

نضرب (1) في ψ^* والثانية في ψ ونطرح الثانية من الأولى

(9)

$$i\hbar\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right]$$

نقسم طرفي المعادلة على $i\hbar$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)=-\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right\}\right]$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة ان المقدار $j(x,t)$ هو

$$j(x,t)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]$$