محاضرات في التحليل الرياضي/ المرحلة الثالثة

د. مظهر عبد الواحد عبد الحسين

محاضرات التحليل الرياضي / المرحلة الثالثة

٢٠١٨ - ٢٠١٩

الفصل الأول / الأعداد الحقيقية
Real Numbers

① الأعداد النسبية وغير النسبية / Rational and irrational numbers

ⓐ مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers) $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

ⓑ مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer numbers) $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

ⓒ مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers) $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$

ⓓ مجموعة الأعداد غير النسبية (Irrational numbers) $\mathbb{Q}^c=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

ⓔ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

أمثلة حول الأعداد النسبية وغير النسبية:

الأعداد $0, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}$ هي أعداد نسبية بينما الأعداد $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2+\sqrt{3}}, \pi, e^1$ هي أعداد غير نسبية.

مثال ①: برهن أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

الحل: نفرض أن $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي $\Leftarrow \sqrt{2}=\frac{p}{q}$ حيث p,q أعداد صحيحة ليس لهما قاسم مشترك أكبر من الواحد $GCD(p,q)=1$

$\Leftarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Leftarrow p^2=2q^2 \Leftarrow p^2$ عدد زوجي $\Leftarrow p$ عدد زوجي

$\Leftarrow p=2k \Leftarrow 4k^2=2q^2 \Leftarrow q^2=2k^2 \Leftarrow q^2$ عدد زوجي

$\Leftarrow q$ عدد زوجي $\Leftarrow GCD(p,q)=2$ تناقض.

$\Leftarrow \sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

خاصية أرخميدس: ① إذا كان x عدد حقيقي موجب، فإنه يوجد عدد طبيعي n بحيث أن $n\cdot x>1$.

مبرهنة (1) : إذا كان n عدد صحيح موجب ليس مربع كامل فإن $\sqrt{n}$ يمثل عدد غير نسبي.

البرهان: نفرض أن n عدد صحيح موجب بحيث أن $n \neq m^2$ لكل $m \in \mathbb{Z}^+$ وأن $\sqrt{n}$ عدد نسبي.

$\Leftarrow \sqrt{n} = \frac{p}{q}$ حيث $GCD(p,q)=1$ ،

$\Leftarrow n = \frac{p^2}{q^2} \Leftarrow p^2 = nq^2 \Leftarrow$ n يقسم p^2 .

$\Leftarrow$ n يقسم العدد p أيضاً $\Leftarrow$ يوجد $r \in \mathbb{Z}$ بحيث أن $p = nr$

$\Leftarrow n^2r^2 = nq^2 \Leftarrow q^2 = nr \Leftarrow$ n يقسم q^2

$\Leftarrow$ n يقسم q . $\Leftarrow GCD(p,q) \neq 1$ تناقض

$\Leftarrow$ العدد $\sqrt{n}$ غير نسبي

مبرهنة (2) : بين أي عددين حقيقيين يوجد عدد نسبي.

البرهان: نفرض أن x ، y أعداد حقيقية بحيث أن

$x < y \Leftarrow 0 < y - x \Leftarrow$ يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $0 < n \leq y - x < n+1$.

ومن خاصية أرخميدس يوجد عدد طبيعي N بحيث أن $N(y-x) > 1$

$\Leftarrow n \leq Nx < n+1$ (وإذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد n بحيث $n \leq x < n+1$)

$\Leftarrow Nx + (y-x)N > Nx + 1 \geq n+1$

$\Leftarrow Nx < n+1 < Ny$

$\Leftarrow x < \frac{n+1}{N} < y$

$\Leftarrow$ يوجد عدد نسبي $\frac{n+1}{N}$ بين x و y.

$\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.3178$

$N = 10000$

مبرهنة (3) : بين أي عددين حقيقيين يوجد عدد غير نسبي.

البرهان: نفرض أن $x < y$ أي أنه يوجد عددان x, y بحيث $x < y$

$\Leftarrow (y-x)^2 > 0 \Leftarrow$ يوجد عدد صحيح موجب M لا يقل عن واحد

وليكن z أي عدد حقيقي بحيث يوجد عدد صحيح موجب p لا يقل عن واحد بحيث $z < p$

بحيث أن $M > \frac{1}{(y-x)^2} > 0 \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{M}} < y-x$

$\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $n \leq x\sqrt{M} < n+1$

$\Leftarrow n+1 \leq x\sqrt{M}+1 < x\sqrt{M}+\sqrt{M}(y-x) = y\sqrt{M}$

$\Leftarrow x\sqrt{M} < n+1 < y\sqrt{M} \Leftarrow x < \frac{n+1}{\sqrt{M}} < y$

مثال: هل يوجد عدد غير نسبي بين العددين 0.1 و 0.2 ؟ بين أن $\sqrt{2}$ في الفترة $(0.1, 0.2)$

الحل:

نلاحظ أن $0.1 < 0.1 < 0.2 \Leftarrow 0 < (0.1)^2 = 0.01$

باختيار قاعدة أرشميدس يجب أن يوجد M لا يقل عن واحد بحيث

أن $1 < (0.01)M \Leftarrow$ العدد المطلوب هو $M = 101$. حيث M

لا يقل عن واحد $\Leftarrow \sqrt{101}$ عدد غير نسبي.

الآن يجب أن نجد العدد n ؟ نلاحظ أن $x\sqrt{M} = (0.1)\sqrt{101} \approx 1.004$

$\Leftarrow$ العدد المطلوب هو $n = 1$ لأن

$1 < 1.004 < 2$

$\Leftarrow$ العدد $\frac{n+1}{\sqrt{M}} = \frac{2}{\sqrt{101}} \approx 0.199$ وهذا العدد غير نسبي يقع بين

العددين 0.1 و 0.2 ($0.199 \in (0.1, 0.2)$).

مثال: برهن أن العدد e هو عدد غير نسبي.

البرهان: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Leftarrow e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

نفرض أن $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \Leftarrow$

$$e - S_N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e - \sum_{N} = \frac{1}{(N+1)!}\left[1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+3)(N+2)} + \cdots\right]$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)!}\left[1 + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{N+1}{N} = \frac{1}{N \cdot N!}$$

$$\Leftarrow \quad 0 < e - \sum_{N} < \frac{1}{N \cdot N!} \Rightarrow 0 < N!\, e - N! \sum_{N} < \frac{1}{N} < 1$$

نلاحظ أن العدد $N! \sum_{N}$ هو دائماً عدد صحيح (لماذا؟).

الآن إذا كان العدد e هو عدد نسبي أي أن $e = \frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) و N كبيرة بما فيه الكفاية (بما أن N كبيرة بحيث أن q تقسم N) فإن العدد $N!\, e$ سيكون هو عدد صحيح، وهذا يجعل العدد $N! \sum_{N}$ أيضاً عدد صحيح، وبما أن $N > 1$ لذلك يوجد دائماً عدد صحيح يقع بين العددين 0 و 1 ، وهذا غير ممكن.

∴ يجب أن يكون عدد غير نسبي.

تمارين: ⊕ برهن أن الأعداد التالية هي أعداد غير نسبية.

(1) $\sqrt{3}$ ، (2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ، (3) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ ، (4) $\log_2 5$

[$\log_b x = y \Leftrightarrow x = b^y$]

⊕ حدد عدد نسبي في الفترات التالية.

(1) $(1, \sqrt{2})$ ، $(0.1, 0.2)$ ، $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

⊕ حدد عدد غير نسبي في الفترات التالية.

(1) $(0.11, 0.12)$ ، $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

⊕ حول الأعداد التالية من الصيغة العشرية إلى الصيغة النسبية.

(1) $0.123123\ldots$ ، (2) $1.44444\ldots$ ، (3) $12.121212\ldots$

متباينة كوشي-شوارز Cauchy-Schwarz inequality : لتكن $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ أعداداً حقيقية. عندئذ

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

البرهان : نعرف الدالة $f(x)$ بالشكل

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2$$

$\Leftarrow$ $f(x) \ge 0$ لأن $(a_k x - b_k)^2 \ge 0$ لكل k.

$$\Leftarrow f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية بالمتغير x.

نضع $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ، $B = 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ ، $C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

$$\Leftarrow f(x) = Ax^2 - Bx + C$$

لكن $f(x) \ge 0$ أي $B^2 - 4AC$ هو مميز المعادلة، وبما أن $f(x)$ لا تأخذ قيماً سالبة (هذا يعني أن الدالة $f(x)$ إما تأخذ قيمة x واحدة فقط أو تقع في الجزء العلوي من المحور x (ليس لها جذور حقيقية).

لذلك يجب أن $B^2 - 4AC \le 0$

$$\Leftarrow 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

$$\Leftarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

مثال : برهن أنه إذا كانت $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فإن

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \ge 16$$

الحل : نضع $a_1 = \sqrt{a}$ ، $a_2 = \sqrt{b}$ ، $a_3 = \sqrt{c}$ ، $a_4 = \sqrt{d}$

و $b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ، $b_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}$ ، $b_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}$ ، $b_4 = \frac{1}{\sqrt{d}}$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k^2 = a+b+c+d \quad , \quad \sum_{k=1}^{4} b_k^2 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k b_k = \left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \Rightarrow$$

$$4^2 = 1+1+1+1$$

$$\left(\sum_{k=1}^{4} a_k b_k\right) = (1+1+1+1)^2 \leq (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

$$16 \leq (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right). \Leftarrow$$

$$(0,1) \sim \mathbb{R}$$

$$(0,1) \xrightarrow{f(x)} (-\infty, 0) \xrightarrow{g(x)} (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \qquad x + \frac{1}{x} = g(x)$$

المجموعات القابلة للعد: Countable Seds

تعريف: يقال للمجموعتان A و B بأنهما متكافئتان (equivalent) إذا وجد تقابل $f: A \to B$.

تعريف: يقال للمجموعة $S \subset \mathbb{R}$ بأنها قابلة للعد (Countable) إذا كانت متكافئة مع مجموعة الأعداد الطبيعية. (أي أنه يوجد تقابل $f: S \to \mathbb{N}$)

مثال: كل مجموعة منتهية تكون قابلة للعد.

الكتابة: إذا كانت $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة متكافئة مع مجموعة الأعداد الطبيعية الأولى، فإن هناك تقابل على الشكل $f(k) = a_k$ حيث $k = 1, 2, \ldots, n$.

مثال: برهن أن المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ هي مجموعة قابلة للعد.

البرهان:

نرتب عناصر المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ على الشكل

$(1,1) \to (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5) \cdots$
$(2,1) \leftarrow (2,2) \leftarrow (2,3) \leftarrow (2,4)\ (2,5) \cdots$
$(3,1) \leftarrow (3,2) \leftarrow (3,3) \leftarrow (3,4)\ (3,5) \cdots$
$(4,1) \leftarrow (4,2) \leftarrow (4,3)\ (4,4)\ (4,5) \cdots$

والدالة $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ الموجودة بالشكل

$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \cdots$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$
$(1,1)\ (1,2)\ (2,1)\ (1,3)\ (2,2)\ (3,1)\ (1,4) \cdots$

تمثل تقابل بين المجموعة $\mathbb{N}$ والمجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ قابلة للعد.

ملاحظة: (1) برهن أن مجموعة الأعداد الكسرية قابلة للعد.

(2) برهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

(3) برهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية قابلة للعد.

(4) برهن أن المجموعة الجزئية من مجموعة قابلة للعد تكون مجموعة قابلة للعد.

(5) إذا كانت A و B مجموعتان قابلتان للعد فإن $A \cup B$ مجموعة قابلة للعد وتدل $A \cup B$.

(6) برهن أن المجموعة (a,b) غير قابلة للعد.

المجموعات المقيدة: Bounded Sets

تعريف: يقال للمجموعة A بأنها مجموعة مرتبة (ordered set) إذا وجدت علاقة "$<$" بحيث أن

1) لكل عنصرين $a,b \in A$ يتحقق واحد فقط مما يلي:

$a < b$ أو $a = b$ أو $b < a$.

2) إذا كان $a < b$ و $b < c$ فإن $a < c$.

مثال: ① مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

② مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية، نقول للعنصر $a \in \mathbb{R}$ بأنه: قيد علوي (Upper bound) للمجموعة A إذا كان $x \leq a$ لكل $x \in A$ ويقال للمجموعة A بأنها مقيدة من الأعلى (Bounded above) وتقال للمجموعة A بأنها مقيدة من الأعلى

تعريف: لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية، نقول للعنصر $b \in \mathbb{R}$ بأنه قيد سفلي (Lower bound) للمجموعة A إذا كان $b \leq y$ لكل $y \in A$ ويقال للمجموعة A بأنها مقيدة من الأسفل (Bounded below)

تعريف: (أصغر قيد علوي) Least upper bound

إذا وجد قيد علوي a_0 للمجموعة A بحيث أنه لكل قيد علوي آخر a للمجموعة A يكون $a_0 \leq a$ فإن a_0 يسمى أصغر قيد علوي للمجموعة A أو (least upper bound) أو supremum للمجموعة A ويكتب $a_0 = \sup A$.

تعريف: (أكبر قيد سفلي) Greatest lower bound

إذا وجد قيد سفلي b_0 للمجموعة A بحيث أنه لكل قيد سفلي آخر b للمجموعة A يكون $b_0 \geq b$، فإن b_0 يسمى أكبر قيد سفلي للمجموعة A أو (Greatest lower bound) أو infimum للمجموعة A ويكتب $b_0 = \inf A$.

ملاحظة: ① $\inf A$ أو $\sup A$ إذا وجدت فلا يشترط بها أن تكون من المجموعة A.

② إذا كانت A مجموعة منتهية، فإن $\inf A$ أو $\sup A$ تنتمي إلى المجموعة A.

تعريف: يقال للمجموعة غير الخالية $A \subset \mathbb{R}$ بأنها مقيدة (Bounded)، إذا كانت مقيدة من الأسفل ومن الأعلى.

خاصية (2): (خاصية الكمال للمجموعات الجزئية)

إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية ومحدودة من الأعلى فإنه يوجد عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$ بحيث أن $a = \sup A$.

برهنة (4): إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية ومحدودة من الأسفل فإنه يوجد عدد حقيقي $b \in \mathbb{R}$ بحيث أن $b = \inf A$

البرهان: لنفرض أن A مجموعة محدودة من الأسفل بالعدد k (قيد سفلي)

$\Leftarrow k \leq x$ لكل $x \in A$.

نعرف المجموعة B بالشكل

$$B = \{-x : x \in A\}$$

$\because$ A مجموعة غير خالية $\Leftarrow$ B مجموعة غير خالية.

$\because k \leq x \Leftarrow -k \geq -x$ لكل $x \in A$

$\Leftarrow -k$ قيد علوي للمجموعة B والمجموعة B محدودة من الأعلى بالعدد $-k$.

$\Leftarrow$ من خاصية الكمال للمجموعات المحدودة (خاصية (2)) المجموعة B يجب أن يكون لها أصغر قيد علوي ولكن $\sup B$

$\Leftarrow a = \sup B$ $\Leftarrow -x \leq a$ لكل $x \in A$

$\Leftarrow x \geq -a$ لكل $x \in A$.

$\Leftarrow -a$ هو قيد سفلي للمجموعة A.

يجب أن نبرهن الآن أن العدد $-a$ هو أكبر قيد سفلي للمجموعة A.

لنفرض أن c هو أي قيد سفلي آخر للمجموعة A.

$\Leftarrow x \geq k \Leftarrow x \in A$ لكل $-c \geq -x \Leftarrow x \in A$ لكل $x \in A$

$\Leftarrow -c$ هو قيد علوي للمجموعة B

$\because a$ هو أصغر قيد علوي للمجموعة $B \Leftarrow -c \geq a$

$\Leftarrow c \leq -a$ لكل $x \in A$.

$\Leftarrow b = -a = \inf A$.

ملاحظة: إذا كانت $A = \phi$ (مجموعة خالية) فإن كل عدد حقيقي هو قيد علوي وقيد سفلي للمجموعة A لذلك فإن المجموعة A تكون غير مقيدة.

ملاحظة: (1) إذا لم يوجد للمجموعة A أي عنصر سفلي فإننا نكتب $\inf A = -\infty$

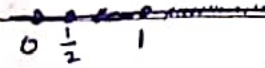
(2) وإذا لم يوجد للمجموعة A أي عنصر علوي فإننا نكتب $\sup A = \infty$

أمثلة: (1) المجموعة $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ هي مجموعة منتهية و
$\inf A = 1$ الأصغر بالعدد و $\sup A = 10$ الأكبر بالعدد
لذلك يمكن القول بأن كل مجموعة منتهية تكون مقيدة.

(2) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية $S = \{1, 3, 5, \dots\}$.
هي مجموعة مقيدة من الأسفل بالعدد $1 \in S$ $\inf S = 1$ ولكن ليست مقيدة من
الأعلى $\sup S = \infty$، لذلك فهي ليست مقيدة.

(3) المجموعة $B = \{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ هي مجموعة مقيدة من الأسفل بالعدد
$\inf B = \frac{1}{2} \in B$ ومن الأعلى بالعدد $\sup B = 2 \in B$، لذلك فهي مغلقة.

$B = \{2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$



(4) جد القيود العليا والسفلى للمجموعة $S = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

الحل: نرتب المجموعة S على الشكل الموضح أدناه

$1+1$,	$1+\frac{1}{2}$,	$1+\frac{1}{3}$,	$1+\frac{1}{4}$, ...
$\frac{1}{2}+1$,	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, ...
$\frac{1}{3}+1$,	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, ...
⋮	⋮	⋮	⋮

2,	$\frac{3}{2}$,	3,	$\frac{4}{3}$, ...
$\frac{3}{2}$,	1,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{5}{4}$, ...
$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{7}{12}$, ...
⋮	⋮	⋮	⋮

ومنه نقوم أفقيا بتثبيت n وتغير m وعموديا نثبت m ونغير n.
نلاحظ أن أصغر عدد في المجموعة S يمكن الحصول عليه عندما $n \to \infty$ و $m \to \infty$ لذلك فإن أصغر عدد هو $\inf S = 0 \notin S$ وبالتالي فإن القيود السفلى هي كل $x \in \mathbb{R}$ و $x \leq 0$.
أما أكبر عدد يمكن الحصول عليه عندما $n = m = 1$ أي أن $\sup S = 2 \in S$ لذلك فإن القيود العليا هي كل $x \in \mathbb{R}$ $x \geq 2$.

(a) إذا كانت $I=[a,b)$ فترة ما فإن $\inf I=a$, $\sup I=b$

(b) إذا كانت $I=(-\infty,b)$ فترة ما فإن $\inf I=-\infty$, $\sup I=b$

ملاحظة: كل الفترة (المغلقة والمفتوحة) لها حاصرة (أدنى وأعلى) ثم يمكن أن تكون هذه الحاصرات عضوة أم لا.

(1) $A=\{-\frac{1}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ ، (2) $B=\{2n+1\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ ،

(3) $C=\{x\in\mathbb{Z}\,;\,x^2<7\}$ (4) $D=\{x\in\mathbb{R}\,;\,x^2+3x-4<0\}$

(5) $E=\{m+\frac{1}{n}\,;\,n,m\in\mathbb{N}\}$ (6) $F=\{1+\frac{(-1)^n}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}\}$

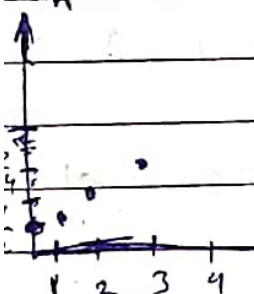
(a) يمكن أن $\sup A$ ، $\inf A$ لا وجد فإذا وجدت فإنها وحيدة (حيث A مجموعة غير خالية).

(c) إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ مجموعة غير خالية وحاصرة فإن $\inf A\le\sup A$

(d) إذا كانت $A,B\subset\mathbb{R}$ مجموعتان غير خاليتان بحيث أن $a\le b$ لكل $a\in A$ ، $b\in B$ فإن $\sup A\le\inf B$

المتتاليات: Sequences

تعريف: المتتالية (Sequence) هي دالة $S:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ بحيث أن $S(n)=S_n$ ، $S_n\in\mathbb{R}$ ، $n\in\mathbb{N}$ ونكتب بالشكل $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$



مثلاً: (1) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,2,3,4,5,\dots\}$

(2) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\dots\}$

(3) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}=\{-1,1,-1,1,\dots\}$

تعريف: يقال للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها مقيدة (bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|s_n| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$

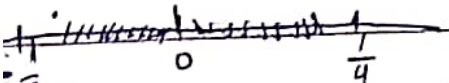
ملاحظة: المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون مقيدة إذا كانت المجموعة $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ مقيدة.

أمثلة: ① المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ مقيدة لأن $\inf s_n = 0$ وهي الأكبر بالعدد $\sup s_n = 1$ لذلك فهي متتابعة مقيدة لأنه يوجد عدد $M = 1$ بحيث أن $|s_n| = s_n \leq M = 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

② المتتابعة $\{-n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ هي متتابعة مقيدة من الأعلى بالعدد $\sup s_n = -1$ ولكنها غير مقيدة من الأسفل لذلك فهي غير مقيدة لأنها لا يوجد عدد $M > 0$ بحيث أن $|s_n| \leq M$، لأن $|s_n| = \{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, \dots\}$ وهذه المتتابعة غير مقيدة.

③ المتتابعة $\{\frac{(-1)^n}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة مقيدة لأنه $|s_n| = \left|\frac{1}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2}$

أي أنه يوجد عدد $M = \frac{1}{2}$ بحيث أن $|s_n| \leq \frac{1}{2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$، لذلك يكون $\inf s_n = -\frac{1}{2}$ و $\sup s_n = \frac{1}{4}$



تعريف: (تقارب المتتابعة) Convergence sequence

(convergent)

يقال للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها متقاربة على العدد $s \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$$|s_n - s| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

العدد s يسمى غاية (limit) المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ويكتب $\lim_{n \to \infty} s_n = s$

ملاحظة: إذا لم يوجد عدد $s \in \mathbb{R}$ بحيث يحقق الشرط $|s_n - s| < \varepsilon$ لكل $n \geq N$ على المتتابعة، يقال عندها عنها (divergent) - أي أن المتتابعة تكون متباعدة

إذا كان لكل N يوجد ε بحيث أن $|s_n - s| \geq \varepsilon$ لكل $n \geq N$, $s \in \mathbb{R}$

مثال 1-D: المتتابعة الثابتة (constant sequence) $\{1,1,1,\dots\}$

هي متتابعة متقاربة نحو العدد 1. حيث $N=1$

ج) المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متقاربة للعدد 0.

ج) المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متباعدة.

مثال: برهن أن المتتابعة $\{\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متقاربة للعدد $L=1$.

الحل: يجب أن نبرهن أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$|s_n - 1| = \left|\frac{n^2+n+1}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ كلما كان $n \geq N$

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$\Leftarrow$ من الواضح أنه يكفي أن نأخذ $\varepsilon > \frac{1}{n}$.

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ $\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ كلما كان $n \geq N$

$\Leftarrow$ المتتابعة متقاربة للعدد $L=1$ (وهو المطلوب البرهان).

مثال: برهن أن المتتابعة $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة للعدد $L=0$.

الحل: لكل $\varepsilon > 0$ نجد أن

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| = \left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\Leftarrow$ لكل $n \geq 1$ نجد أنه $\varepsilon > \frac{1}{2\sqrt{n}} \Leftarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$

لذلك يكفي أن نختار $N > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ حيث أن

$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N$

$\Leftarrow$ المتتابعة متقاربة إلى العدد $L=0$.

ملاحظة: على سبيل المثال إذا كانت $\varepsilon = 0.01$ فإن $n > \frac{1}{4(0.01)^2}$

$\Leftarrow n > 2500$ أي أنه يمكن اختيار $N = 2501$.

مثال: برهن أن المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة.

البرهان: ناخذ $\varepsilon = 1$ ونفرض أن المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة للعدد S.

$\Leftarrow$ يوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$|n - S| < 1 \quad \forall n \geq N$

$\Leftarrow |S| + 1 > n \quad$ لكل $n \geq N$

لكن $1 < 2 < \dots < N-2 < N-1 < N$ (حسب ترتيب المتتابعة).

$\Leftarrow M = |S| + 1 \geq n \quad$ لكل $n \geq 1$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ مقيدة من الأعلى بالعدد $M = |S| + 1$

وهذا غير ممكن (تناقض) (لأنها غير مقيدة)

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة.

مبرهنة: (وحدانية غاية المتتابعة)

غاية المتتابعة المتقاربة تكون وحيدة.

البرهان: نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطاة وأن المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل العددين $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ حيث $s_1 \neq s_2$ يجب أن نبرهن أن $s_1 = s_2$!!

$\therefore$ المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة الى العدد s_1

$\Leftarrow$ يوجد N_1 بحيث أن $|s_n - s_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n \geq N_1$

بالمثل يوجد N_2 بحيث أن

$|s_n - s_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n \geq N_2$.

نأخذ $N = \max\{N_1, N_2\}$

$\Leftarrow$

$|s_1 - s_2| = |s_n - s_1 - (s_n - s_2)|$

$\leq |s_n - s_1| + |s_n - s_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Leftarrow$ $s_1 \le s_2$ $\Leftarrow$ $|s_1 - s_2| \ge 0$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ غاية المتتابعة المتقاربة وحيدة

ملاحظة: المتتابعة المتقاربة تكون مقيدة

البرهان: نفرض أن المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة للعدد s وناخذ $\varepsilon = 1$ (لماذا؟)

$\Leftarrow$ يوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$|s_n - s| < 1$, $\forall n \ge N$

$\Leftarrow$ $|s_n| < 1 + |s|$ لكل $n \ge N$ ($|s_n| - |s| \le |s_n - s|$)

نفرض أن $M = \max\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{N-1}|, 1 + |s|\}$

$\Leftarrow$ $|s_n| \le M$ لكل $n \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ مقيدة بالعدد $M > 0$.

ملاحظة: عكس الملاحظة أعلاه ليس دائما صحيحا أي أنه ليس كل متتابعة مقيدة تكون متقاربة والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة مقيدة بالعددين -1 و 1

ولكنها ليست متقاربة وذلك لوجود غايتين للمتتابعة هما $s_1 = -1$ و $s_2 = 1$.

مثال: ① المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متقاربة لذلك فهي مقيدة بالعددين 0 و 1.

② المتتابعة $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متقاربة للعدد 1 لذلك فهي مقيدة بالعددين $\frac{1}{2}$ و 1.

المتتابعات الرتيبة: Monotone Sequences

تعريف: يقال للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها متزايدة (increasing) إذا كان $s_n \leq s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ويقال بأنها متتابعة متناقصة (decreasing) إذا كان $s_n \geq s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

تعريف: إذا كانت $s_n < s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى متزايدة بدقة (strictly increasing). وإذا كانت $s_n > s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى متناقصة بدقة (strictly decreasing).

تعريف: يقال للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها رتيبة (Monotone) إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

أمثلة: (1) المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متزايدة بدقة لأن $n < n+1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ لذلك فهي رتيبة.

(2) المتتابعة $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متناقصة بدقة لأن $\frac{1}{n!} > \frac{1}{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ لذلك فهي رتيبة.

(3) المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة ليست متناقصة وليست متزايدة لذلك فهي ليست رتيبة.

مثال: برهن أن المتتابعة $\left\{\frac{3n+4}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة.

الإثبات: يجب أن نبرهن أن $s_n \geq s_{n+1}$ لكل n.

$$\frac{3n+4}{n+1} - \frac{3n+7}{n+2} = \frac{(3n+4)(n+2) - (n+1)(3n+7)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3n^2+10n+8-3n^2-10n-7}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$\Leftarrow$ $s_n > s_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ المتتابعة متناقصة

تعريف: إذا كانت $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة رتيبة فإنها تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة. علاوة على ذلك، إذا كانت المتتابعة متزايدة ومحدودة فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$، وإذا كانت المتتابعة متناقصة ومحدودة فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.

البرهان: نفرض أن المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ومتزايدة.

∴ المتتابعة محدودة ⇐ يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|s_n| \le M$ لكل $n \in \mathbb{N}$. نفرض أن $s = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ وليكن $\varepsilon > 0$ معطاة.

∴ $s = \sup(s_n)$ ⇐ يوجد على الأقل $N \in \mathbb{N}$ بحيث أن $s_N > s - \varepsilon$

∴ المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة ⇐ $s_n \ge s_N$ لكل $n \ge N$

$\Rightarrow |s_n - s| = s - s_n \le s - s_N < \varepsilon \quad \forall n \ge N$

⇐ المتتابعة متقاربة لأن العدد $s = \sup(s_n)$.

(وبالمثل إذا كانت المتتابعة متناقصة (وبرهانها))

مثال: برهن أن المتتابعة $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

البرهان: نلاحظ أن المتتابعة محدودة مثلاً بالعدد $M = 1$ أي أن $s_n < \frac{1}{2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$، حيث يمكن إثبات ذلك بالآتي:

$$\frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{-n^2-n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$$

⇐ $s_{n+1} < s_n$ ⇐ المتتابعة متناقصة ⇐ متقاربة

المتتاليات الجزئية: Subsequences

تعريف: لتكن $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة و $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتابعة من الأعداد الطبيعية بحيث $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ فإن المتتابعة $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ تسمى متتابعة جزئية من المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

مثال: المتتابعة $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

مثال: إذا كانت $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة معرفة على الشكل

$$s_n = \begin{cases} -1, & n \text{ عدد زوجي} \\ \frac{-n}{n+1}, & n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

(أ) هل المتتابعة مقيدة؟ (وضح الإجابة)

(ب) هل المتتابعة متقاربة؟

(ج) هل تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة؟ أوجدها إذا كان الجواب نعم.

الحل: (أ) نلاحظ أن

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{4}, -1, -\frac{5}{6}, -1, \ldots\right\}$$

$$\Leftarrow \quad \{|s_n|\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{6}, \ldots\right\}$$

$\Leftarrow$ يوجد عدد $M = 1$ بحيث أن $|s_n| \le 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$ المتتابعة مقيدة حيث $\inf(s_n) = -1$ ، $\sup(s_n) = -\frac{1}{2}$

(ب) نعم المتتابعة متقاربة للعدد -1 لأن $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-n}{n+1}\right) = -1$ عندما n عدد فردي

وعندما n عدد زوجي يكون $s_n = -1$ أيضاً.

(ج) نعم تحتوي على متتابعتين جزئيتين $\{-1, -1, \ldots\}$ و $\left\{\frac{-(2k-1)}{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

وكلاهما متقاربتان.

~~Bolzano – Weierstrass~~ مبرهنة : كل متتابعة عددية محدودة على متتابعة جزئية متقاربة.

تعريف : المتتابعة العددية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى متقاربة للعدد s إذا وفقط إذا كانت جميع المتتابعات الجزئية $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة للعدد s.

مثال : بين هل المتتابعات التالية متقاربة أم لا.

أ) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\right\}$ ب) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

ج) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ د) $\{2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, \dots\}$

مثال : بين هل المتتابعات التالية متقاربة أم لا.

أ) $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ب) $\left\{\frac{4n+3}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ج) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

مثال : بين هل المتتابعات التالية متقاربة أم لا.

أ) $\left\{2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots\right\}$ ب) $\left\{3+2, 3-\frac{2}{2}, 3+\frac{2}{3}, 3-\frac{2}{4}, \dots\right\}$ $a_n = 3 + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

ج) $\left\{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, \dots\right\}$ متباينة

مثال : بين هل المتتابعات التالية متقاربة أم لا.

أ) $\{-1, -4, -9, -16, \dots\}$ ب) $\left\{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{5}, \dots\right\}$ $\left\{n - \frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

ج) $\{(-1)^n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ $\frac{1}{n+1} - \frac{n^2+n+1}{n+1} = n$

مثال : بين هل المتتابعات التالية متقاربة أم متباينة.

أ) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ب) $\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ج) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

متتالية كوشي : Cauchy Sequence

تعريف : يقال للمتتالية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأنها متتالية كوشي (Cauchy sequence) إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|s_n - s_m| < \varepsilon$ كلما كان $n, m \geq N$.

مثال : المتتالية $\{1 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي. لإثبات ذلك نأخذ $\varepsilon > 0$ ، نبحث أنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\forall n, m \geq N$:

$$\left|1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - 1\right| < \varepsilon$$

ليكن $s_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$\Leftarrow |s_n - s_m| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

(حاصل قسمة)

$\Leftarrow$ المتتالية $\{1 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي

مثال : برهن أن المتتالية $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متتالية كوشي.

البرهان : نأخذ $\varepsilon > 0$.

$$\Leftarrow |\sqrt{n} - \sqrt{m}| = \left|\frac{n - m}{\sqrt{n} + \sqrt{m}}\right| \leq \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} + \frac{m}{\sqrt{n} + \sqrt{m}}$$

$$< \frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{n} + \sqrt{m}$$

الآن إذا كانت المتتالية $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي

$\Leftarrow$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث أن :

$$|\sqrt{n} - \sqrt{m}| = \sqrt{n} + \sqrt{m} < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

وهذا غير ممكن لأن $n, m \in \mathbb{N}$ وتكون $\sqrt{n}, \sqrt{m} \geq \sqrt{N}$.

$\Leftarrow$ المتتالية هي ليست كوشي.

مثال: بين أن المتتابعة $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

البرهان: نأخذ $\varepsilon>0$ ونرمز أن $s_n=\frac{n^2-1}{n^2}$.

$$|s_n-s_m|=\left|\frac{n^2-1}{n^2}-\frac{m^2-1}{m^2}\right|=\left|\frac{n^2-m^2}{n^2m^2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\varepsilon,$$

$\forall n,m \geq N$

$\Leftarrow$ المتتابعة متقاربة كوشي.

مبرهنة: إذا كانت $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي عندها المتتابعة محدودة.

البرهان: نأخذ $\varepsilon>0$.

$\because \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي $\Rightarrow$ يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$|s_n-s_m|<\varepsilon, \quad \forall n,m\geq N$

نأخذ $m=N$. $|s_n|\leq \varepsilon+|s_N|, \forall n\geq N$

$M=\max\{|s_1|,|s_2|,\dots,|s_{N-1}|,|s_N|+\varepsilon\}$

$\Leftarrow |s_n|\leq M, \forall n$

$\Leftarrow$ المتتابعة محدودة.

مبرهنة: متتابعة الأعداد الحقيقية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتابعة كوشي.

البرهان: نفرض أن $\varepsilon>0$ معطاة والمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة.

$\Leftarrow$ يوجد عدد s بحيث أن

يوجد عدد طبيعي N بحيث أن $|s_n-s|<\varepsilon, \forall n\geq N$

$|s_m-s|<\varepsilon, \forall m\geq N$

$|s_n-s_m|=|s_n-s-(s_m-s)|$

$\leq |s_n-s|+|$

⇐ المتتابعة متقاربة كوشي.

نفرض أن المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

⇐ يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث أن

$|s_n - s_m| < \varepsilon$ ، $\forall n, m \geq N_1$ ⇐

المتتابعة كوشي ⇐ المتتابعة محدودة

⇐ حسب برهنة بولزانو ـ ويرستراس المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحوي على الأقل متتابعة جزئية متقاربة ولتكن $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

نفرض أن $s_{n_k} \to s$ عندما $k \to \infty$.

⇐ يوجد $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث أن

$|s_{n_k} - s| < \varepsilon$ ، $\forall n_k \geq N_2$

$$|s_n - s| = |s_n - s_{n_k} + s_{n_k} - s| \leq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - s|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \,, \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$$

⇐ المتتابعة متقاربة للعدد s.

مثال: برهن أن المتتابعة $\left\{\frac{n^2}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة متقاربة.

البرهان: ناخذ $\varepsilon > 0$ ـ حسب برهان المتتابعة كوشي

نفرض أن $s_n = \frac{n^2}{n^3+1}$

⇐

$$|s_n - s_m| = \left|\frac{n^2}{n^3+1} - \frac{m^2}{m^3+1}\right|$$

$$\leq \frac{n^2}{n^3+1} + \frac{m^2}{m^3+1} < \frac{n^2}{n^3} + \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N}$$

$$\leq \varepsilon \,, \quad \forall n, m \geq N$$

⇐ المتتابعة هي من نوع كوشي ⇐ المتتابعة متقاربة.

العمليات على المتتاليات

مبرهنة: إذا كانت $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين متقاربتين

نهايتاهما s و t على الترتيب، عندما $n \to \infty$، فإن:

(1) $\lim_{n\to\infty}(s_n \pm t_n) = t \pm s$

(2) $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = s \cdot t = (\lim_{n\to\infty} s_n)(\lim_{n\to\infty} t_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{s}{t} = \frac{\lim_{n\to\infty} s_n}{\lim_{n\to\infty} t_n}$ بشرط أن $\lim_{n\to\infty} t_n \neq 0$

و $t_n \neq 0$ لكل n.

تمارين: (1) برهن أن المتتاليات التالية متقاربة وجد نهايتها:

(أ) $\left\{\frac{2n-1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ب) $\left\{\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ج) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(2) برهن أن المتتاليات التالية متقاربة:

(أ) $\left\{\frac{4n+3}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ب) $\left\{\frac{2^n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ج) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(3) برهن أن المتتاليات التالية متباعدة:

(أ) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ (ب) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ (ج) $\left\{\frac{3^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

النهاية والاستمرارية: Limit and Continuity

1) النهاية The Limit

تعريف: ليكن $D \subset \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}$ و x_0 نقطة تراكم (النقطة x_0 تسمى نقطة تراكم للمجموعة D إذا وجد لكل $\delta > 0$ على الأقل نقطة واحدة من D تختلف عن x_0 وتقع في الفترة المفتوحة $(x_0-\delta, x_0+\delta)$)

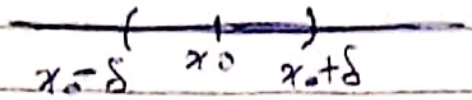
$$D \cap \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \neq \emptyset$$

أمثلة: (1) كل فترة $[a,b]$ هي وسط لنقطة الفترة نفسها.

(2) إذا كانت $D=(0,1)\cup\{2\}$، فإن نقطة 2 ليست وسطاً لـ D في الفترة المغلقة $[0,1]$.

تعريف 1: (الجوار / Neighbourhood)

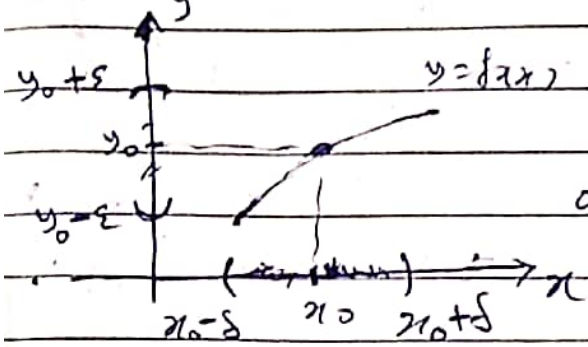
جوار النقطة $x_0\in\mathbb{R}$ هو عبارة عن الفترة المفتوحة $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ حيث $\delta>0$.



تعريف 2: ليكن $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة وليكن $x_0\in\mathbb{R}$ نقطة وسطية لـ D. يقال أن العدد y_0 هو نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x\to x_0$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أنه

$$|f(x)-y_0|<\varepsilon \text{ عندما } 0<|x-x_0|<\delta, \quad x\in D$$

ونكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$ أو $f(x)\to y_0$ عندما $x\to x_0$



$0<\delta<1$ ، $0<\varepsilon<1$

* إذا لم يوجد عدد y_0 يحقق الشرط أعلاه فإننا نقول أن النهاية غير موجودة.

مثال: لتكن $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=x^2$ حيث $D=\mathbb{R}$. أثبت أن $\lim_{x\to a} f(x)=a^2$ (باستخدام التعريف).

البرهان: نأخذ $\varepsilon>0$.

$$|f(x)-a^2|=|x^2-a^2|=|(x-a)(x+a)|$$
$$=|x-a||x+a|<\delta|x+a| \iff |x-a|<\delta$$
$$\Leftarrow \delta\{|x-a|+2|a|\}<\delta(\delta+2|a|)$$
$$<\delta(1+2|a|)<\varepsilon, \quad \delta=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$$

$\Leftarrow$ $\lim_{x\to a} x^2=a^2$

مثال : برهن أن $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

البرهان : نأخذ $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-x}{3x}\right| = \frac{|3-x|}{3|x|} < \varepsilon$$

$$\Leftarrow \quad |x-3| < \frac{3|x|}{9}\varepsilon$$

$$\therefore \ |x-3| < \delta \Rightarrow 3-\delta < x < 3+\delta \Rightarrow -\delta < x-3 < \delta$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{|x|} < \frac{3}{3-\delta} \Rightarrow \frac{|x|}{3} > \frac{3-\delta}{9}$$

$$\Rightarrow \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon(3-\delta)}{9} < \varepsilon$$

$\delta = \min\{1, \frac{3\varepsilon}{3+\varepsilon}\}$

$\frac{3\varepsilon}{3+\varepsilon} < \delta \Leftarrow 3\varepsilon < 3\delta + \delta\varepsilon \Leftarrow 3\varepsilon - \delta\varepsilon < 3\delta$

$3\varepsilon - \delta\varepsilon < 3\delta$

تعريف : لتكن $D \subset \mathbb{R}$ و x_0 نقطة تراكم للمجموعة D. لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ و $g : D \to \mathbb{R}$ دالتين بحيث $\lim_{x\to x_0} f(x)$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجودتان. عندئذ

1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} g(x))$

3) إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$ لكل $x \in D$ بحيث $x \neq x_0$ فإن

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

البرهان : (2) نأخذ $\varepsilon > 0$ ونبرهن أن $f(x)$ و $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$. حيث أن $\varepsilon > 0$ لذا فإن

$$\exists \delta > 0 \ \text{بحيث} \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - L_1 L_2| < \varepsilon$$

لدينا أن

$$|f(x)g(x) - L_1 L_2| = |f(x)g(x) - L_1 g(x) + L_1 g(x) - L_1 L_2| \leq |g(x)||f(x) - L_1| + |L_1||g(x) - L_2|$$

$|fg(x)-L_1L_2| = |f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2| \le |g(x)||f(x)-L_1| + |L_1||g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{3}|g(x)| + |L_1|\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$\Leftarrow \varepsilon > 0$

$|x-x_0| < \delta_1 \Leftrightarrow |f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftarrow |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Leftarrow |x-x_0| < \delta_2$

$|x-x_0| < \delta \Leftarrow |f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{3}, |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Leftarrow |f(x)-L_1| + |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$\Leftarrow |f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{3}, |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Leftarrow |x-x_0| < \delta_1, |x-x_0| < \delta_2$

$\Leftarrow |x-x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$

مبرهنة : نهاية الدالة f عند x_0 إن وجدت فهي وحيدة.

البرهان : نفرض أن L_1 و L_2 نهايتين للدالة f عند x_0.

$\Leftarrow \varepsilon > 0$ ونهايته $0 < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ يوجد $0 < \delta$ بحيث

$|f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |x-x_0| < \delta_1$

بالمثل يوجد $0 < \delta_2$ بحيث

$|f(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |x-x_0| < \delta_2$

$\Leftarrow |L_1-L_2| = |f(x)-L_1+f(x)-L_2| \le |f(x)-L_1| + |f(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

فإن ε اختياري $\Leftarrow L_1 = L_2$

تمارين : برهن ما يأتي :

(1) $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, $x_0 > 0$

(2) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+1}{1-x} = \frac{1}{2}$

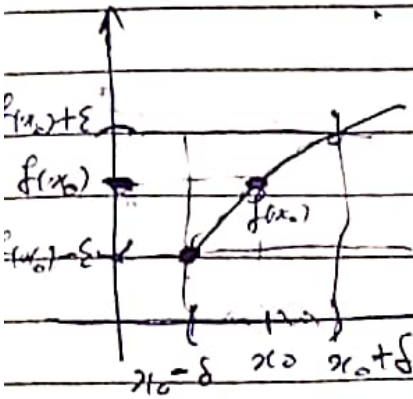
(4) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

(5) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{2}$

الاستمرارية Continuity

تعريف

ليكن $D \subset \mathbb{R}$ و $f: D \to \mathbb{R}$ دالة. يقال أن الدالة $f(x)$ مستمرة (continuous) عند النقطة $x_0 \in D$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ عندما $|x - x_0| < \delta$.



أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند كل نقطة من نقاط المجموعة D وبما أننا نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة على المجموعة D (أو مستمرة عند كل نقطة من نقاط المجموعة D).

مثال: برهن أن الدالة $f(x) = x^3$ مستمرة عند كل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$

البرهان:

نأخذ $\varepsilon > 0$ ونبرهن الفرضية التالية:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2)| < \varepsilon$$

$$\Leftarrow |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \delta |x^2 + x_0 x + x_0^2| < \varepsilon$$

$$= \delta |x^2 - x_0^2 + x_0 x + x_0^2 + 2x_0^2|$$

$$= \delta |(x - x_0)(x + x_0) + x_0(x - x_0) + 3x_0^2|$$

$$= \delta |(x - x_0)(x + x_0) + x_0(x - x_0) + 3x_0^2| < \delta \{\delta |x + x_0| + \delta |x_0| + 3x_0^2\}$$

$$\Leftarrow |x - x_0| < \delta$$

$$= \delta \{\delta |x - x_0 + 2x_0| + \delta |x_0| + 3x_0^2\} < \delta \{\delta (\delta + 2|x_0|) + \delta |x_0| + 3x_0^2\}$$

$$\Leftarrow |x - x_0| < \delta < \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}$$

$$\Leftarrow \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}\right\}.$$

$\Leftarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = x_0^3$

$\Leftarrow$ الدالة مستمرة عند النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$

مثال: بين أن الدالة $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ متصلة عند $x=0$

الحل: $x_0=0$

البرهان: ليكن $\varepsilon>0$

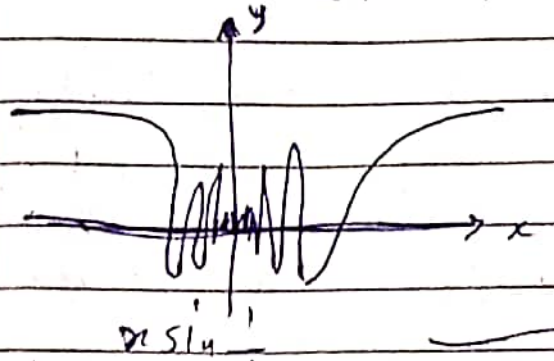
$$|f(x)-f(0)|=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|<\varepsilon=\delta$$

$$\Leftarrow -|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq|x|$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \quad \text{عندما} \quad x\to 0$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=f(0) \Leftarrow f(0)=0=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

$\therefore$ الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x=0$



مبرهنة: إذا كانت $f,g:D\to\mathbb{R}$ دالتين متصلتين عند النقطة $x_0\in D$ فإن

(1) الدالة $f(x)\pm g(x)$ تكون متصلة عند النقطة x_0

(2) الدالة $f(x)\cdot g(x)$ تكون متصلة عند النقطة x_0

(3) الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ تكون متصلة عند النقطة x_0 علما أن $g(x)\neq 0$ لكل $x\in D$

البرهان (1): ليكن $\varepsilon>0$

$\therefore$ الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ متصلتان عند النقطة x_0

$\Rightarrow$ يوجد $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ بحيث أن

$$|x-x_0|<\delta_1 \Leftrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x-x_0|<\delta_2 \Leftrightarrow |g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)|\leq|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|$$

$$\Leftrightarrow <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Leftarrow |x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ الدالة $f(x)+g(x)$ متصلة عند النقطة $x_0\in D$

عدم الاستمرارية: Discontinuity

(1) نقول أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ غير مستمرة عند النقطة x_0 وأن الدالة معرفة عند النقطة x_0 ولكنها لا تساوي قيمة الدالة عند النقطة x_0 أي أن

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

فإن هذا النوع من عدم الاستمرارية يسمى بالنوع الأول والتي تسمى قابلة للإزالة (removable).

(2) لتكن $x_0\in\mathbb{R}$ نقطة عدم الاستمرارية للدالة $f(x)$ وأن الدالة لهذه الدالة غير موجودة عند النقطة x_0 أي أن

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

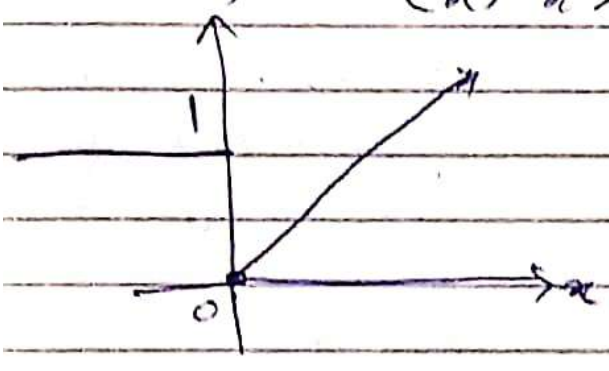
فإن هذا النوع من عدم الاستمرارية يسمى بالنوع الثاني والعدد

$$a = \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

حيث يُعرّف (Jump) الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0

مثال: الدالة المعرفة على الشكل $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 1, & x\leq 0 \end{cases}$

هي دالة غير مستمرة عند النقطة $x_0=0$ ولها قفزة عند النقطة 0 قيمتها $1-0=1$



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0-1 = -1$$

تمارين : (B) باستخدام التعريف بـ ε و δ برهن ما يلي :

(1) الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ مستمرة على كل نقطة $x_0 \in (0,\infty)$.

(2) الدوال $\sin x$, $\cos x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لكل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) الدالة $f(x)=x^2+x+1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لكل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$.

(4) الدالة $f(x)=\frac{2}{x+1}$ مستمرة على $(0,1)$ لكل نقطة $x_0 \in (0,1)$

(5) الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستمرة على $(0,\infty)$ لكل $x_0 > 0$.

(6) لتكن $f:[-4,0] \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالمثال

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2-18}{x+3}, & x \neq -3 \\ -12, & x=-3 \end{cases}$$

برهن أن الدالة $f(x)$ مستمرة على $x=-3$.

(7) بين أن الدالة $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ غير مستمرة على $x=0$ ثم عين نوع عدم الاستمرارية .

الاستمرارية المنتظمة Uniform Continuity

تعريف : لتكن $D \subset \mathbb{R}$ ولتكن $f: D \to \mathbb{R}$ دالة . يقال الدالة $f(x)$ أنها مستمرة بانتظام (uniform continuous) إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ كلما كان $|x-y| < \delta$ لكل $x, y \in D$.

ملاحظة : (1) العلاقة بين الاستمرارية والاستمرارية المنتظمة هو أنه في حالة الاستمرارية نعتمد على النقطة x_0 و ε ، أي أن $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ بينما في الاستمرارية المنتظمة فإن δ يعتمد فقط على ε أي أن $\delta = \delta(\varepsilon)$.

(2) كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة ولكن العكس غير صحيح .

مثال: المالة $f(x)=3x+7$ دالة معرفة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ بين أن f دالة منتظمة على $\mathbb{R}$.

الحل: نفرض $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(y)|=|3x+7-3y-7|=3|x-y|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-y|<\frac{\varepsilon}{3}=\delta$$

مثال: المالة $f(x)=x^2$ حيث $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $D=(0,4)$ أثبت أن f دالة منتظمة على $(0,4)$

الحل: نفرض $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|(x-y)(x+y)|$$

$$\Leftrightarrow |x-y|<\delta=\frac{\varepsilon}{8}=\varepsilon \Rightarrow |x+y|<8$$

مثال: المالة $f(x)=\frac{1}{x}$ دالة منتظمة ولكنها ليست منتظمة على $(0,\infty)$

نبرهن أولا أن المالة غير منتظمة على $(0,\infty)$

الحل: نفرض $\varepsilon>0$ ولكن $x_0\in(0,\infty)$ أي نقطة

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}<\frac{\delta}{|x||x_0|}$$

$$\Leftrightarrow |x-x_0|<\delta$$

$$\Rightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta \Rightarrow x_0-\delta<x \Rightarrow \frac{1}{x_0-\delta}>\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\frac{\delta}{|x_0||x_0-\delta|}>\left|\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right|$$

نبرهن الآن أن المالة غير منتظمة بإيجاد نقاط $x,y\in(0,\infty)$ بحيث $\varepsilon=1$.

ونتوقعان $x=\frac{1}{n}$ و $y=\frac{1}{n+2}$ نلاحظ أن

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=|n+2-n|=2>\varepsilon=1$$

بينما

$$|x-y|=\left|\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right|=\frac{2}{n(n+2)}<\frac{2}{n+2}<\delta$$

حيث $n>\frac{2(1-\delta)}{\delta}$

تمارين: برهن أن الدوال التالية مستمرة بانتظام على الفترات المعطاة:

(1) $f(x)=x^2$ على الفترة $[-1,1]$

(2) $f(x)=x^2+2x-5$ على الفترة $(0,6)$

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[1,\infty)$

(4) برهن أن الدالة $f(x)=\sin x^2$ ليست مستمرة بانتظام على الفترة $[0,\infty)$.

ب) إذا كانت $f,g: D\to\mathbb{R}$ دوال مستمرة بانتظام برهن أن $f+g$ دالة مستمرة بانتظام على المجموعة D.

المشتقة: The Derivative

تعريف: لتكن $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة ونقول أنه لدينا $x_0\in D$ الغاية

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

تكون موجودة عندئذ نقول بأن الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 وأن $f'(x_0)$ مشتقة الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجموعة D فإننا نقول أن الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجموعة D.

المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة بين الاستمرار والاشتقاق

مبرهنة: إذا كانت $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\in D$ فإنها تكون مستمرة عند النقطة x_0.

البرهان: بما أن الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فإن

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

موجودة

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

$\Leftarrow$ الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0.

ملاحظة: العكس غير صحيح أي الاستمرار لا يستلزم قابلية الاشتقاق.

مثال: الدالة $f(x)=|x|$ مستمرة عند $x_0=0$ ولكنها ليست قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$.

مثال: أثبت باستخدام التعريف أن مشتقة الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ عند النقطة $x_0\in(0,\infty)$ هي $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

الحل: لدينا

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

مبرهنة: لتكن $f,g:D\to\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة x_0 فإن:

الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0.

الدالة $f\cdot g$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0.

الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 بشرط أن $g(x_0)\neq 0$.

The Mean Value Theorem: نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)، فإنه يوجد على الأقل $x_0 \in (a,b)$ بحيث أن

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تعريف (1): يقال أن الدالة $f(x)$ متزايدة (increasing) إذا كان $f(x) \le f(y)$ لكل x, y بحيث أن $x \le y$

(2) يقال للدالة $f(x)$ متناقصة (decreasing) إذا كان $f(x) \ge f(y)$ لكل x, y بحيث أن $x \le y$

مثال: الدالة $f(x) = x^2$ متزايدة في الفترة $(0,1)$، بينما الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصة في الفترة $(0,1)$.

مبرهنة: إذا كانت $f: D \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق

(1) $f(x)$ تكون متزايدة إذا وفقط إذا كانت $f'(x) \ge 0$ لكل $x \in D$

(2) $f(x)$ تكون متناقصة إذا وفقط إذا كانت $f'(x) \le 0$ لكل $x \in D$

البرهان: (1) نبرهن أن $f(x)$ متزايدة.

$\Leftarrow$ $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ لكل x, y.

$\Leftarrow$ $f(y)-f(x) \ge 0$ و $y-x \ge 0$ $\Leftarrow$ $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0$

$\Leftarrow$ $\lim_{x \to y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0 \Leftarrow f'(x) \ge 0$.

نبرهن أن $f'(x) \ge 0$ لكل $x \in D$ ونبرهن أن $x \le y$

$\Rightarrow$ من مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد $x_0 \in (x,y)$ بحيث أن

$$f'(x_0) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0$$

$\Rightarrow f(x) \le f(y) \Rightarrow$ الدالة متزايدة

كل من الدوال التالية غير متصلة عند النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$

(1) $f(x) = \sin x$ ، (2) $f(x) = \cos x$ ، (3) $f(x) = x^n$ ، (4) $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$.

(5) اعط مثال لدالة مستمرة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند النقاط التالية:

(a) $x = 2$ ، (b) $x = \pm 1$ ، (c)

الفضاءات المترية Metric Spaces

تعريف: نعرف المسافة بين النقطتين $x, y \in \mathbb{R}^n$ على الشكل

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

تعريف: الفضاء المتري (Metric Space) (X,d) هو عبارة عن مجموعة غير خالية X مع دالة المسافة $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ بحيث أنه لكل $x, y, z \in X$ يتحقق ما يلي:

(1) $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا $(x = y)$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ ،

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

ملاحظة: الدالة d التي تحقق الشرط (1) – (3) تسمى دالة متريه والفضاء X يسمى فضاء متري.

مثال: الفضاء $\mathbb{R}$ هو فضاء متري، حيث نعرف المسافة على $\mathbb{R}$ بالشكل $d(x,y) = |x-y|$.

الحل:

ليكن $\mathbb{R}$ فضاء متري، يجب أن تحقق الدالة $d(x,y) = |x-y|$ الشرط (1) – (3) على التوالي، لنبرهن ذلك.

(1) $\because |x-y| \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$.

إذا كانت $d(x,y) = 0 \Leftarrow |x-y| = 0 \Leftarrow x-y = 0 \Leftarrow x = y$

العكس $x = y \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$

(2) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

(3) لكل $x,y,z \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$

$\Rightarrow \mathbb{R}$ فضاء متري.

مثال: الفضاء المتري المتقطع يعرف كما يلي على هذا الفضاء بالمثل

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

$x,y \in \mathbb{R}$ ،

البرهان: (1) واضح أن $d(x,y) \geq 0$ وأن

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

(2) إذا كانت $x = y$ فإن $d(x,y) = 0 = d(y,x)$

إذا كانت $x \neq y$ فإن $d(x,y) = 1 = d(y,x)$

(3) إذا كانت

$x = y = z \Rightarrow d(x,y) = 0 \leq 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y)$

إذا كانت $x = y$ و $z \neq x \Rightarrow$

$$d(x,y) = 0 \leq 2 = 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y)$$

نفس الشيء إذا كانت $x \neq y$ و $z = x$.

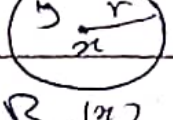
إذا كانت $y \neq x$ و $z \neq x$ و $z \neq y \Rightarrow$

$$d(x,y) = 1 \leq 2 = 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y)$$

يمكن مناقشة بقية الحالات بالمثل.

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري و r عدد حقيقي موجب. الكرة المفتوحة (open ball) التي مركزها النقطة x ونصف قطرها r تعرف كما يلي

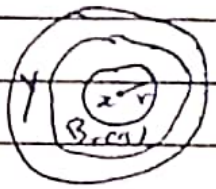
$$B_r(x) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$$



$B_r(x)$

ملاحظة: المركبات الفضاء $\mathbb{R}$ عبارة عن الفترات المفتوحة (a,b) التي مركزها النقطة $\frac{a+b}{2}$ ونصف قطرها $r=\frac{b-a}{2}$

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري، المجموعة $Y \subset X$ تسمى جوار للنقطة $x \in X$ إذا وجد $r>0$ بحيث أن $B_r(x) \subset Y$.



مثال: المجموعة المفتوحة $(0,1)$ هي جوار للنقطة $\frac{1}{2}$ لأنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $(\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon) \subset (0,1)$.

الفضاء المتري الكامل: Complete Metric space

تعريف: الفضاء المتري (X,d) يكون فضاءا متريا "كاملا" إذا كانت كل متتابعة كوشي في هذا الفضاء متقاربة إلى العنصر $x \in X$.

مثال: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي فضاء متري كامل، حيث برهنا سابقا أن $\mathbb{R}$ فضاء متري وبرهنا أيضا أنه كل متتابعة كوشي في $\mathbb{R}$ متقاربة لأن عدد حقيقي.

مثال: الفضاء $\mathbb{R}^2$ هو فضاء متري كامل، حيث تعرفنا سابقا على $\mathbb{R}^2$ بالشكل $d(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{2}(x_k-y_k)^2}$.

البرهان: $\mathbb{R}^2$ فضاء متري (واضح)

(2) لبرهان أن $\mathbb{R}^2$ فضاء كامل، نفرض أن $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}=\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي في $\mathbb{R}^2$ وتأخذ $\varepsilon>0$.

$\Leftarrow$ نوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$$d(x^{(n)}, x^{(m)})<\varepsilon, \quad \forall n,m \geq N.$$

$$\sqrt{(x_1^{(n)}-x_1^{(m)})^2+(x_2^{(n)}-x_2^{(m)})^2}<\varepsilon,\ \forall n,m\geq N \iff$$

$$(x_1^{(n)}-x_1^{(m)})^2+(x_2^{(n)}-x_2^{(m)})^2<\varepsilon^2 \iff$$

$$(x_1^{(n)}-x_1^{(m)})^2<\varepsilon^2 \ \text{و}\ (x_2^{(n)}-x_2^{(m)})^2<\varepsilon^2 \iff$$

$$|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}|<\varepsilon,\ |x_2^{(n)}-x_2^{(m)}|<\varepsilon \iff$$

$\iff$ المتتاليتين $\{x_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{x_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتاليات كوشي في $\mathbb{R}$.

بما أن $\mathbb{R}$ فضاء تام $\iff$ $x_1^{(n)}\to x_1\in\mathbb{R}$ ، $x_2^{(n)}\to x_2\in\mathbb{R}$

عندما $n\to\infty$

$\iff$ $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)})\to(x_1,x_2)=x\in\mathbb{R}^2$ عندما $n\to\infty$

$\iff$ $\mathbb{R}^2$ فضاء تام.

تمارين: ① برهن أن الدالة $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة على الشكل

$$d(x,y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|,\quad x=(x_1,y_1),\ y=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

هي دالة متري على $\mathbb{R}^2$.

② إذا كانت $d(x,y)$ دالة متري على الفضاء X، برهن أن الدالة

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\quad \forall x,y\in X$$

هي دالة متري أيضاً على الفضاء X.

③ برهن أن الفضاءات التالية هي فضاءات متري تامة.

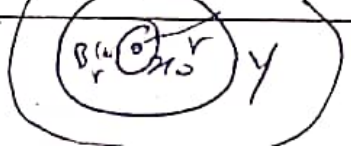
(أ) $\mathbb{R}^3$ ، (ب) $\mathbb{R}^4$ ، (ج) $\mathbb{R}^5$.

④ برهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ لا تمثل فضاء تام. $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$

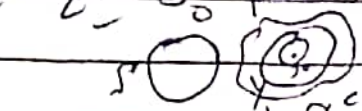
⑤ برهن أن الفترة $(0,1)$ لا تمثل فضاء تام.

النقاط الداخلية والخارجية والحدودية والنقاط المتراكمة:
Interior, Exterior, Boundary and closure

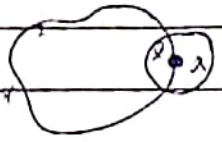
تعريف: ليكن $X\subset\mathbb{R}^n$ ، النقطة $x_0\in\mathbb{R}^n$ تسمى نقطة داخلية (interior) للمجموعة X إذا وجد جوار مركزه النقطة x_0 يقع كلياً في X. أي أنه $\exists B_r(x_0)\subset X$.



تعريف: ليكن $K \subseteq \mathbb{R}^n$ و $y_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطة خارجية (exterior) لـ K إذا وجد جوار مركزه النقطة y_0 لا يقطع K، أي أنه $\exists B_r(y_0) \subseteq Y \subseteq K^c$.



تعريف: ليكن $K \subseteq \mathbb{R}^n$ و $z_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطة حدودية (boundary) لـ K إذا كان كل جوار مركزه النقطة z_0 يحوي على الأقل نقطة من المجموعة K وعلى الأقل نقطة من المجموعة K^c.



ملاحظة: (1) مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة K نرمز لها بالشكل K^{int}.
(2) " " الخارجية " " " " " K^{ext}.
(3) " " الحدودية " " " " " K^{∂}.

مثال: لتكن $I=(0,1)$، فإن النقطة $\frac{1}{2} \in (0,1)$ تكون نقطة داخلية لأنها النقطة $2 \neq (0,1)$ تكون نقطة خارجية أما نقاط الحدود فهي 0 و 1.

مثال: عين النقاط الداخلية، الخارجية والحدودية لكل مما يأتي:
(1) $\mathbb{Z}$ (مجموعة الأعداد الصحيحة)، (2) $\mathbb{Q}$ (مجموعة الأعداد النسبية).

الحل: (1) المجموعة $\mathbb{Z}$ لا تحوي نقاط داخلية لأنه لا يمكن إيجاد جوار يقع بكامله في $\mathbb{Z}$ لأي عدد صحيح، مجموعة النقاط الخارجية هي $\mathbb{Z}^c$. كل عدد صحيح يمثل نقطة حدودية للمجموعة $\mathbb{Z}$.

(2) المجموعة $\mathbb{Q}$ لا تحوي نقاط داخلية ولا خارجية لأنه لا يمكن إيجاد جوار يقع بكامله في $\mathbb{Q}$ أو $\mathbb{Q}^c$. كل عدد حقيقي هو نقطة حدودية للمجموعة الأعداد النسبية.

تعريف: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}^n$ كما النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ تسمى نقطة غاية للمجموعة A إذا كان كل جوار مركزه النقطة x يحتوي على الأقل نقطة أخرى من نقاط المجموعة A تختلف عن x. أي أن

$$(B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

تعريف: انغلاق المجموعة (closure) هو عبارة عن اتحاد المجموعة مع مجموعة نقاطها غايتها ويرمز له بالشكل $\bar{A}$

$$\bar{A} = A \cup A'$$

مثال: جد مجموعة نقاط غاية المجموعة $\mathbb{Z}$ ثم جد انغلاقها.

الحل: المجموعة $\mathbb{Z}$ لا تحوي نقاط غاية أي أن $\mathbb{Z}' = \emptyset$

لأنه $(B_r(x) - \{x\}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftarrow \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

مثال: جد مجموعة نقاط غاية المجموعة $\mathbb{Q}$ ثم جد انغلاقها.

الحل: كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ هو نقطة غاية للمجموعة $\mathbb{Q}$ لأنه

$$(B_r(x) - \{x\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

$$\Leftarrow \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \Leftarrow \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

مبرهنة: إذا كانت x نقطة غاية للمجموعة A فإنه كل جوار مركزه النقطة x يحتوي عدد غير منتهي من نقاط المجموعة A.

البرهان: نفرض العكس أي أنه توجد جوار $N_r(x)$ يحتوي عدد منتهي من نقاط المجموعة A ولتكن هذه النقاط هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نفرض أن $r_1 = |x - x_1|, r_2 = |x - x_2|, \ldots, r_n = |x - x_n|$ إذا كان $r_0 = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ فإن الجوار $N_{r_0/2}(x)$ سوف لا يحتوي أي نقطة من نقاط المجموعة A تختلف عن x أي أن

$$(N_{r_0/2}(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

$\Leftarrow x$ لا تمثل نقطة غاية وهذا يناقض الذي $\Leftarrow$ كل جوار للنقطة x يحتوي عدد لانهائي من نقاط A.

مثال: حدد نقاط تراكم كل مجموعة من المجموعات التالية

$A=\{\frac{1}{2^n}+3^m : n,m\in\mathbb{N}\}$ ② ، $S=\{n+m : n,m\in\mathbb{N}\}$ ①

الحل: ① الجموعة S لا تحوي نقاط تراكم لأن جميع أعدادها طبيعية وبالتالي لا يمكن إيجاد عدد حقيقي يحقق

$(A\setminus\{x\})\cap A\neq\phi$

② مجموعة نقاط تراكم المجموعة A هي $A'=\{3^m : m\in\mathbb{N}\}$

$\bar{A}=A\cup A'$ ←

المجموعات المغلقة والمجموعات المفتوحة: Closed and open sets

تعريف: المجموعة $A\subseteq\mathbb{R}^n$ تكون مفتوحة (open) إذا وفقط إذا كانت $A\subseteq \text{int}A$

بعبارة أخرى المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جميع نقاطها داخلية.

* بما أنه $\text{int}A\subseteq A$ فإنه المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $A=\text{int}A$

أمثلة: ① جميع الفترات على الشكل (a,b) هي مجموعات مفتوحة.

② مجموعة الأعداد الصحيحة ليست مفتوحة لأنه كل عدد صحيح لا يمكن تقطه داخلها وإنما هو نقطة حدودية لمجموعة الأعداد الصحيحة.

③ المجموعة $\{x : x\neq 2\}=A$ ليست مفتوحة.

المجموعات المغلقة: (closed)

تعريف: المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا احتوت جميع نقاط تراكمها.

أمثلة: ① جميع الفترات على الشكل $[a,b]$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$ هي مجموعات مغلقة.

② المجموعات المنتهية على الشكل $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}=S$ ، $x_i\in\mathbb{R}$ ، $n=1,2,\dots$ هي مجموعات مغلقة.

③ المجموعة $A=\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}\cup\{0\}$ هي مجموعة مغلقة.

مبرهنة : المجموعة $\subset \mathbb{R}^n$ تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مفتوحة.

البرهان : نفرض أن $\subset$ مجموعة مغلقة ونفرض أن $x \in \subset^c$
$\Leftarrow x \notin \subset$
$\therefore \subset$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ النقطة x لا يمكن أن تكون نقطة تراكم
للمجموعة $\subset$ $\Leftarrow$ يوجد جوار مركزه النقطة x وليكن $B_r(x)$ بحيث
أن $B_r(x) \cap \subset = \phi$ $\Leftarrow$ $(B_r(x) - \{x\}) \cap \subset \neq \phi$
$\Leftarrow x \in B_r(x) \subset \subset^c$ $\Leftarrow$ النقطة x داخلية لـ $\subset^c$
$\Leftarrow \subset^c$ مجموعة مفتوحة

نفرض أن $\subset^c$ مجموعة مفتوحة و x نقطة تراكم لـ $\subset$.
إذا كانت $x \notin \subset$ $\Leftarrow x \in \subset^c$.
$\therefore \subset^c$ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ يوجد جوار مركزه النقطة x وليكن
$N_r(x)$ بحيث أن $N_r(x) \subset \subset^c$ $\Leftarrow x \in N_r(x) \not\subset \subset$
$\Leftarrow (N_r(x) - \{x\}) \cap \subset = \phi$
$\Leftarrow x$ ليست نقطة تراكم لـ $\subset$، وهذا غير ممكن
$\Leftarrow \subset$ مجموعة مغلقة

---

(1) المجموعتان $\mathbb{R}^n$ و ϕ مغلقتان ومفتوحتان في نفس الوقت
لأن $\phi = (\mathbb{R}^n)^c$، حيث أن $\mathbb{R}^n$ تكون مفتوحة لأن كل نقطة
من نقاطها داخلية، وتكون مغلقة لأنها احتوت جميع نقاط تراكمها
وباستخدام البرهان أعلاه تكون ϕ مغلقة ومفتوحة أيضاً.

(2) المجموعة $[0, \infty)$ مغلقة لأنها احتوت جميع نقاط تراكمها
$\Leftarrow ([0, \infty))^c = (-\infty, 0)$ مفتوحة

(3) المجموعة $\subset = \{1, 2, 3\}$ مغلقة لأن
$\subset^c = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$
وحدات المجموعة $\subset^c$ مفتوحة.

~~مبرهنة 1 : ① تقاطع عدد منتهي من المجموعات المفتوحة يكون~~
~~مجموعة مفتوحة.~~

② اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

البرهان : ① نفرض أن $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ مجموعة مفتوحة من المجموعات المفتوحة ولنفرض أن

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} \delta_k \iff x \in \delta_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

بما أن δ_k مجموعة مفتوحة، $k = 1, 2, \dots, n$

$\Leftarrow$ يوجد جوار $N_{r_k}(x)$ حيث أن $x \in N_{r_k}(x) \subset \delta_k$ $k = 1, 2, \dots, n$

لكن $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

$\Leftarrow N_r(x) \subset N_{r_k}(x)$ $k = 1, 2, \dots, n$

$\Leftarrow N_r(x) \subset \delta_k$ $k = 1, 2, \dots, n$

$\Leftarrow x \in N_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \delta_k$

$\Leftarrow \bigcap_{k=1}^{n} \delta_k$ مفتوحة.

② (واجب)

والمثال التالي يوضح أن تقاطع عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة ليس بالضرورة يكون مجموعة مفتوحة.

مثال: لتكن لدينا عائلة المجموعات المفتوحة $\left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$، فإن

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

فلو أخذنا تقاطع هذه المجموعة $\{0\}$ وهي مجموعة مغلقة

ورقة 1 : (1) إتحاد عدد منتهي من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(2) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

البرهان 1 (1) (واجب)

(2) نفرض أن $\{\mathcal{C}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ عائلة من المجموعات المغلقة (منتهية أو غير منتهية).

$\Leftarrow \{\mathcal{C}_k^c\}_{k\in\mathbb{N}}$ عائلة من المجموعات المفتوحة.

$\Leftarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k^c$ مجموعة مفتوحة (2) البرهان السابق)

لكن $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k^c = \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k\right)^c$

$\Leftarrow \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k\right)^c$ مجموعة مفتوحة.

$\Leftarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ مجموعة مغلقة.

المثال التالي يوضح أن إتحاد عدد غير منتهي من المجموعات المغلقة ليس بالضرورة يكون مجموعة مغلقة.

مثال 1 لتكن لدينا عائلة المجموعات $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث أن $\mathcal{C}_n = \left[\frac{1}{n}\right]$.

نلاحظ أن كل مجموعة من هذه المجموعات $\mathcal{C}_n$ تكون مغلقة.

لكن تكون العائلة $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي عائلة من المجموعات المغلقة.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n = \left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

نلاحظ أن الإتحاد يكون مجموعة غير مغلقة لأنها لا تحتوي نقاط تراكم على المجموعة وليس $\{0\}$.

مبرهنة بولزانو ـ ويرستراس : Bolzano-Weierstrass

Theorem

كل مجموعة غير منتهية ومحدودة من الأعداد الحقيقية يكون لها على الأقل نقطة تراكم واحدة.

البرهان : نفرض أن A مجموعة محدودة وغير منتهية من الأعداد الحقيقية.

$\Leftarrow$ يوجد أعداد حقيقية a و b بحيث $(a<b)$ بحيث أن $A \subset [a,b]$.

نجزئ القترة $[a,b]$ إلى القترتين الجزئيتين $[a, \frac{a+b}{2}]$ و $[\frac{a+b}{2}, b]$. على الأقل واحدة من هاتين القترتين سوف تحتوي على عدد غير منتهي من عناصر المجموعة A. لتكن هذه المجموعة A هي $[\alpha_1, \beta_1]$. بالمثل نجزئ القترة $[\alpha_1, \beta_1]$ إلى القترتين الجزئيتين $[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]$ و $[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$. نأخذ على الأقل واحدة من هاتين القترتين سوف تحتوي على عدد غير منتهي من عناصر المجموعة A ولتكن $[\alpha_2, \beta_2]$. نستمر على هذه العملية بحيث سوف نحصل على المتتاليات $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ وبالتالي سوف نحصل على القترات $[\alpha_n, \beta_n]_{n=1}^{\infty}$.

طول القترة $[\alpha_n, \beta_n]$ هو $\beta_n - \alpha_n = \frac{b-a}{2^n}$.

عندما $n \to \infty$ فإن القترة $[\alpha_n, \beta_n]$ سوف تؤول إلى نقطة p حيث $p = \sup(\alpha_n) = \inf(\beta_n)$. والآن نبرهن أن النقطة p هي نقطة تراكم لـ A. بالطريقة المباشرة نفرض أن $\varepsilon > 0$ و $N_\varepsilon(p)$ هو أي جوار للنقطة p، فإن القترة $[\alpha_n, \beta_n]$ سوف تقع تحت ε الجوار $N_\varepsilon(p)$ عندما n كبيرة بما فيه الكفاية. لذلك يكون

$$\beta_n - \alpha_n < \varepsilon$$

وهذا يؤول على أن $(N_\varepsilon(p) - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftarrow p$ نقطة تراكم للمجموعة A.

تعريف : المجموعة $A \subset \mathbb{R}^n$ تسمى كثيفة (Dense) في المجموعة $\mathbb{R}^n$ إذا كانت $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

مثال : مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ لأن $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ حيث كل عدد حقيقي هو نقطة تراكم للمجموعة $\mathbb{Q}$.

مثال (1-3): جد نقاط تراكم كل من المجموعات التالية ثم بين فيما إذا كانت هذه المجموعات مغلقة أو غير ذلك.

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

(2) مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$.

(3) $S = \{(-1)^n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

(4) $A = [0,1] \cup \{2, 3, 4, \dots\}$

(5) $B = [-1,1] \cup \{3\}$

(6) $C = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{3m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

(7) إذا كانت $S \subset \mathbb{R}^n$ برهن ما يلي:

(1) S' مجموعة مغلقة.

(2) إذا كانت $S \subset T$ فإن $S' \subset T'$.

(3) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.

(4) $(\bar{S})' = S'$.

(5) S مجموعة مغلقة.

(6) S مجموعة مغلقة إذا وفقط كانت $S' = S$.

(8) برهن أن الفترة $[0,1)$ ليست مقفلة وليست مغلقة.

المجموعات المتراصة: Compact Sets

تعريف 1: (الغطاء) The Cover

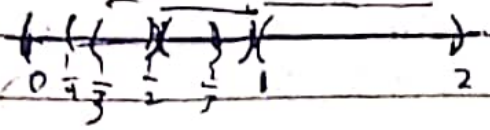
ليكن $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ مجموعة المجموعات التي تحقق $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ فإن المجموعة $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ تسمى غطاء للمجموعة S.

إذا كانت $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ تسمى الغطاء غطاءاً "مفتوحاً" (open covering)

إذا كانت جميع المجموعات A_α مفتوحة

مثال: جد أي الفترات المفتوحة $\{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ تمثل غطاء مفتوح للفترة $(0,1)$.

الحل: نلاحظ أن $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$



مثال: جد أي الفترات $\{[-n, n]\}_{n=1}^{\infty}$ تمثل غطاء مفتوح لمجموعة الأعداد الحقيقية لأن $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$

تعريف: (المجموعة المتراصة) Compact Set

يقال للمجموعة $C \subset \mathbb{R}^n$ أنها متراصة (compact) إذا وفقط إذا كان كل غطاء مفتوح للمجموعة C يحتوي على غطاء جزئي منتهي يغطي المجموعة C.

مثال: المجموعة $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ هي مجموعة متراصة.

مثال: المجموعة $(0,1)$ مجموعة غير متراصة. لأن غطاء المجموعات $\{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ يمثل غطاء مفتوح للمجموعة $(0,1)$ ولكن إذا أخذنا منتهية فإن $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ أعداد طبيعية فإن $\bigcup_{i=1}^{k} (\frac{1}{n_i}, \frac{2}{n_i})$

يمثل غطاء جزئي من الغطاء $\{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ ولكن

$$(0,1) \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} (\frac{1}{n_i}, \frac{2}{n_i})$$

مبرهنة: (هاين - بوريل) Heine-Borel Theorem

المجموعة في $\mathbb{R}$ تكون متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

البرهان: لا طلاع

مثال: ① جميع الفترات على الشكل $[a,b]$ تكون مجموعات متراصة لأنها مغلقة ومحدودة حيث $a,b \in \mathbb{R}$

② المجموعة $A = \{\frac{n+1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{1\}$ هي مجموعة متراصة لأنها مغلقة ومحدودة

جميع الفترات على الشكل (a,b) ليست متراصة لأنها محدودة لكنها غير مغلقة.

خواص الدوال المستمرة على المجموعات المتراصة

نظرية: لتكن $f: K \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على المجموعة المتراصة K فإن f تكون مستمرة بانتظام.

البرهان: نأخذ $\varepsilon > 0$

$\Leftarrow$ f دالة مستمرة على المجموعة K

$\Leftarrow$ لكل $x \in K$ يوجد $\delta_x > 0$ بحيث أن

$\forall x_1 \in K : |x - x_1| < \delta_x \iff |f(x) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$

لدينا لدينا $\{(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in K}$ تمثل غطاء مفتوح

للمجموعة K.

$\Leftarrow$ K مجموعة متراصة $\Leftarrow$ يوجد غطاء جزئي منتهي من الغطاء $\{(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in K}$ يغطي المجموعة K.

$\forall x \in K$

بعبارة أخرى يوجد $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ بحيث أن

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2})$$

نفرض أن $\delta = \min\left\{\frac{\delta_k}{2} \mid k = 1, 2, \ldots, n\right\}$

$x, y \in A$ بحيث أن $|x - y| < \delta$

$\Rightarrow$ يوجد عدد طبيعي $1 \leq i \leq n$ بحيث أن

$x, y \in \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $|x - y| < \delta < \frac{\delta_i}{2}$

$\Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ f دالة مستمرة بانتظام.

مبرهنة: إذا كانت $f: A \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و A مجموعة متراصة، فإنه يوجد $x_1, x_2 \in A$ بحيث أن $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ لكل $x \in A$.

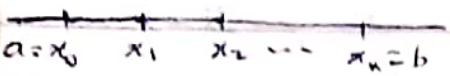
ملاحظة: أي دالة مستمرة على مجال متراص تكون محدودة على هذا المجال وتأخذ قيمتها العظمى والصغرى.

مثال: الدالة $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل $f(x) = x^2$ هي دالة مستمرة ومنتظمة. بالإضافة إلى ذلك فهي تحقق قيمتها العظمى والصغرى.

تكامل ريمان : The Riemann Integral

التجزئة ومجموع ريمان : Partition and Riemann sum

تعريف : تجزئة الفترة $[a,b]$ هي أي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ بحيث أن
$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$
وإذا كانت P و Q تجزئتان للفترة $[a,b]$ بحيث أن $P\subset Q$ ، فإن Q تسمى refinement لـ P.

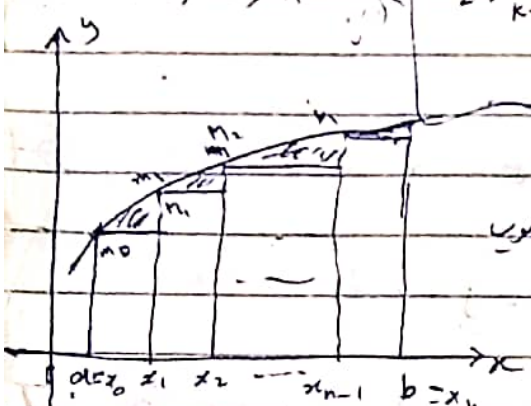


* الفترات الجزئية $[x_0,x_1]$ ، $[x_1,x_2]$ ، ... ، $[x_{n-1},x_n]$

المتغيرة بالتجزئة P هي عبارة عن تقاطع المستقيمات العمودية من كل نقطتين متتاليتين.

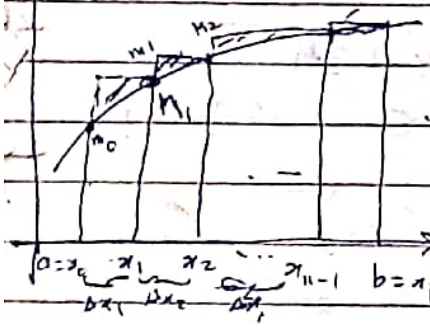
نفرض أن $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ حيث $k=1,2,\dots,n$ يمثل طول الفترة $[x_{k-1},x_k]$.

ليكن ΔP هي أكبر طول بالنسبة للفترات $[x_{k-1},x_k]$ حيث $k=1,\dots,n$
أي أن $\Delta P=\max\{\Delta x_k : k=1,2,\dots,n\}$



لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ ولتكن m تمثل أكبر قيمة بحيث $m\le f(x)$ لكل $x\in[a,b]$ ولتكن M تمثل أصغر قيمة بحيث $f(x)\le M$ لكل $x\in[a,b]$
أي أن $m=\inf\{f(x)\}$ و $M=\sup\{f(x)\}$

لتكن نفرض أن
$$m_k=\inf\{f(x) : x_{k-1}\le x\le x_k\}$$
و
$$M_k=\sup\{f(x) : x_{k-1}\le x\le x_k\}$$
أي أن m_k تمثل أكبر قيمة بحيث $m_k\le f(x)$ لكل $x\in[x_{k-1},x_k]$
و M_k تمثل أصغر قيمة بحيث $f(x)\le M_k$ لكل $x\in[x_{k-1},x_k]$
من الملاحظات يمكن إنشاء المجموعين التاليين :



$$\underline{S}_P=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \quad , \quad \overline{S}_P=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

المجموع $\underline{S}_P$ يسمى مجموع ريمان الأدنى (Lower Riemann sum) للدالة f على الفترة $[a,b]$ بالنسبة للتجزئة P.
والمجموع $\overline{S}_P$ يسمى مجموع ريمان الأعلى (Upper Riemann sum) للدالة f على الفترة $[a,b]$ -

نلاحظ أن $m(b-a) \le \underline{S}_P \le \overline{S}_P \le M(b-a)$

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf\{\overline{S}_P : P \text{ a partition of } [a,b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup\{\underline{S}_P : P \text{ a Partition of } [a,b]\}$$

ونلاحظ أيضاً أن مجموعة المجاميع $\underline{S}_P$ مقيدة من الأعلى بالعدد $M(b-a)$ وهي مجموعة غير خالية
ومجموعة المجاميع $\overline{S}_P$ مقيدة من الأسفل بالعدد $m(b-a)$.

التكامل $\underline{\int_a^b} f\,dx$ يسمى تكامل ريمان الأدنى (Lower Riemann integral) و

$\overline{\int_a^b} f\,dx$ يسمى تكامل ريمان الأعلى (Upper Riemann integral).

$$\underline{\int_a^b} f\,dx \le \overline{\int_a^b} f\,dx$$

تعريف: يقال أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني (Riemann integrable) على الفترة $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$$

* إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ فإننا نكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

ليمثل تكامل ريمان للدالة f على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة (5.2): إذا كانت f دالة مقيدة على الفترة $[a,b]$ فإنها تكون قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد تجزئة P بحيث أن $\overline{S}_P - \underline{S}_P < \varepsilon$.

البرهان: نفرض أن f قابلة للتكامل ريمانياً على الفترة $[a,b]$.

$$\Leftarrow \int_a^b f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx$$

نختار $\varepsilon > 0$ ، $\int_a^b f\,dx = \sup\{\underline{S}_P : P \text{ a partition of } [a,b]\}$

$\frac{\varepsilon}{2}$ ~~$\int_a^b f\,dx$~~

$\Leftarrow$ يوجد تجزئة P_1 بحيث أن $\underline{S}_{P_1} > \int_a^b f\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$ لكل عدد حقيقي $\underline{S}_P$

$\Leftarrow$ يوجد تجزئة P_2 بحيث أن $\overline{S}_{P_2} < \int_a^b f\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$ لكل عدد حقيقي $\overline{S}_P$

نفرض أن $P = P_1 \cup P_2$

$$\int_a^b f\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_1} \le \underline{S}_P < \overline{S}_P \le \overline{S}_{P_2} < \int_a^b f\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{S}_P - \underline{S}_P < \int_a^b f\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f\,dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ نفرض أنه لكل عدد ε توجد تجزئة P بحيث أن

$$\overline{S}_P - \underline{S}_P < \varepsilon$$

$$\underline{S}_P \le \int_{\underline{a}}^{b} f\,dx \le \overline{\int_a^b} f\,dx \le \overline{S}_P \le \underline{S}_P + \varepsilon$$

$$0 \le \overline{\int_a^b} f\,dx - \underline{\int_a^b} f\,dx \le \varepsilon$$

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$$

$\therefore f$ قابلة للتكامل ريمانيا.

تعريف مجموعة الجزئية لتجزئة

مبرهنة: إذا كانت $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة وكانت P و Q تجزئتان للفترة $[a,b]$ بحيث أن $P \subset Q$

If $P \subset Q$, then $\underline{S}_P \le \underline{S}_Q$, $\overline{S}_Q \le \overline{S}_P$ (1)

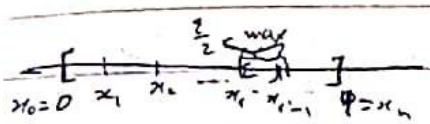
$$\underline{\int_a^b} f\,dx \le \underline{S}_Q \quad (2)$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx \le \overline{\int_a^b} f\,dx \quad (3)$$

مثال: الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^2$ $\forall x\in[0,1]$ قابلة للتكامل ريمانيا.

الحل: نختار $\varepsilon>0$ وكذلك نفرض أن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تجزئة للفترة $[0,1]$ بحيث أن $\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,\dots,n\}<\frac{\varepsilon}{2}$

يجب أن يُبرهن أنه $\bar{S}_P-\underline{S}_P<\varepsilon$.



بما أن f دالة مستمرة ومتزايدة على الفترة $[0,1]$

$\Leftarrow m_i=f(x_{i-1})=x_{i-1}^2$ و $M_i=f(x_i)=x_i^2$

حيث $m_i=\inf(f)$ و $M_i=\sup(f)$ على الفترة $[x_{i-1},x_i]$

$$\underline{S}_P=\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2(x_i-x_{i-1}) \quad\Rightarrow\quad \bar{S}_P=\sum_{i=1}^{n}x_i^2(x_i-x_{i-1})$$

$$\Leftarrow \bar{S}_P-\underline{S}_P=\sum_{i=1}^{n}x_i^2(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2)(x_i-x_{i-1})$$

$\forall i$ $x_i\in[0,1]$ و $\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,\dots,n\}<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\Leftarrow \bar{S}_P-\underline{S}_P=\sum_{i=1}^{n}x_i^2(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}(x_i-x_{i-1})$$

$$=2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon$$

$\therefore$ الدالة f قابلة للتكامل ريمانيا.

مثال: الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ عدد نسبي} \\ 1, & x \text{ عدد غير نسبي}\end{cases}$ ، غير قابلة للتكامل ريمانيا

الحل: لتكن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تجزئة ما للفترة $[0,1]$.

$\therefore$ كل فترة $[x_{i-1},x_i]$ تحتوي أعداد نسبية وغير نسبية

$\Leftarrow M_i(f)=1$ و $m_i(f)=0$.

$\Leftarrow \overline{S}_P=1$ ، $\underline{S}_P=0$ (لأن قيمة f)

$\Leftarrow$ كل المجاميع العليا $=1$ وكل المجاميع السفلى $=0$.

$\Leftarrow$

$$\int_0^1 f\,dx=1 \quad , \quad \overline{\int_0^1} f\,dx=0$$

$\Leftarrow$ الدالة f غير قابلة للتكامل (ريمانيا) على الفترة $[0,1]$.

نظرية (53): إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ، فإنها تكون قابلة للتكامل الريماني على هذه الفترة.

البرهان: بما أن f دالة مستمرة $\Leftarrow$ f دالة مستمرة بانتظام.

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أنه لكل $x,y\in[a,b]$

إذا كانت $|x-y|<\delta$ فإن $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

لتكن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ بحيث أن $x_i-x_{i-1}<\delta$

$i=1,2,\dots,n$ ،

$\Leftarrow$ توجد $t_i,s_i\in[x_{i-1},x_i]$ بحيث أن $f(t_i)=M_i(f)$ و $f(s_i)=m_i(f)$

$i=1,2,\dots,n$ ،

$\therefore x_i-x_{i-1}<\delta \Leftarrow |t_i-s_i|<\delta$

$\Leftarrow f(t_i)-f(s_i)\le\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Leftarrow \overline{S}_P-\underline{S}_P=\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)-f(s_i))(x_i-x_{i-1})$

$\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$

$\therefore$ f قابلة للتكامل ريمانيا. (برهنة 52)

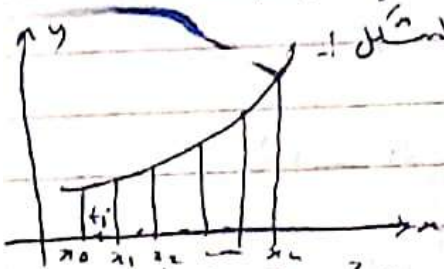
مجموع ريمان:

Riemann Sum

ليكن P أي تجزئة للفترة $[a,b]$ ، $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$

ليكن $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ هو أكبر طول من بين أطوال الفترات الجزئية $x_i - x_{i-1}$ ، وإذا كانت $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، $\{t_1, \dots, t_n\}$

فإن مجموع ريمان لدالة f يعرف بالشكل:



$$S_P = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

مثال: جد مجموع ريمان للدالة $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة $[0, \frac{3}{2}]$ عندما $n=3$

الحل: طول الفترة الجزئية من الفترة $[a,b]$ هو $\frac{b-a}{n}$.

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{3} = \frac{3/2 - 0}{3} = \frac{1}{2} \quad k=1,2,3 \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ تجزئة الفترة $[0, \frac{3}{2}]$ عندما $n=3$

$$P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}.$$

وإذا كانت t_i تمثل منتصف الفترات، فإن

$$t_1 = \frac{1}{4}, \quad t_2 = \frac{3}{4}, \quad t_3 = \frac{5}{4}$$

$$S_P = \sum_{i=1}^{3} f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{3} \sin(\pi t_i) \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftarrow$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

وفي (1) جد المجموع عندما $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = 1$

وفي (2) جد المجموع عندما $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1, t_3 = \frac{3}{2}$.

(3) جد مجموع ريمان للدالة $f(x) = x^3$ على الفترة $[0,3]$

* لأي تجزئة $[x_{i-1}, x_i]$ في $[a,b]$ يمكن اختيار t_i في الفترة الآتية:

$$x_0 = a, \quad t_i = x_0 + \Delta x_i (i + t - 1), \quad 0 \le t \le 1,$$

بشرط $n \to \infty$ بحيث $\|P\| \to 0$ حيث $\|P\|$ هي طول الفترة الجزئية الكبرى
المجموع المعرف بالتكامل S_P وتدعى $\int_a^b f(x)dx$ أي أن

$$I = \lim_{n\to\infty} S_P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: جد بتعريف ريمان للدالة $f(x) = x^3$ على الفترة $[0,3]$ عندما $n \to \infty$.

الحل: $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ ، $k = 1, 2, \to n$

$\Leftarrow$ $\Delta x_k = \frac{3}{n}$ ، $k = 1, 2, \to n$ $\Leftarrow$ $x_i = \frac{3}{n} + x_{i-1}$

إذاً، إن $P = \{x_0, x_1, x_2, \to x_n\}$ تجزئة للفترة $[0,3]$

فإن $P = \{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \to, 3\}$

$\Leftarrow$ $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} S_P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$

إذاً، إن $t_i = i\Delta x_i$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i\Delta x_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(i\,\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n}i\right)^3 \frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^3 \frac{27}{n^3}\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81}{n^4}\,\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{81}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

(400) (80)

ملاحظة: (1) عند تجزئة ديانا نأخذ النقاط أعلاه عندما $t_i = \frac{(x_i + x_{i-1})\Delta x_i}{2}$.

(2) " " " " " " $t_i = x_{i-1}\Delta x_i$ " " " "

~~الخواص الجبرية للتكامل~~ تقص بعد التعريف بالتكامل

مبرهنة (54): إذا كانت f و g دوال قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$، فإن

$c_1 f + c_2 g$ تكون قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ لأي عددين ثابتين c_1, c_2 وكذلك

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\,dx = c_1 \int_a^b f\,dx + c_2 \int_a^b g\,dx.$$

البرهان: نفرض أن $h = c_1 f + c_2 g$ وكذلك نفرض أن P هي تجزئة للفترة $[a,b]$

$$S(P,h) = \sum_{i=1}^{n} h(t_i)\Delta x_i = c_1 \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i + c_2 \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i \Leftarrow$$

$$= c_1 S(P_1, f) + c_2 S(P_2, g)$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ وكذلك P_1, P_2 هي تجزئات أخرى للفترة $[a,b]$ بحيث أنه $P_1, P_2 \subset P$ وكذلك $P = P_1 \cup P_2$.

$$S_{P_1} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i, \quad S_{P_2} = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i.$$

$$|S_{P_1} - \int_a^b f\,dx| < \varepsilon \quad \text{و كذلك} \quad |S_{P_2} - \int_a^b g\,dx| < \varepsilon \Leftarrow$$

$$|S_P - c_1 \int_a^b f\,dx - c_2 \int_a^b g\,dx| = \Leftarrow$$

$$|c_1 S_{P_1} + c_2 S_{P_2} - c_1 \int_a^b f\,dx - c_2 \int_a^b g\,dx| \Leftarrow S(P,h) = c_1 S(P_1, f) + c_2 S(P, g)$$

$$\leq |c_1|\,|S_{P_1} - \int_a^b f\,dx| + |c_2|\,|S_{P_2} - \int_a^b g\,dx|$$

$$\leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{|c_1| + |c_2|}$$

تعريف: لتكن $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ محصورة. الدالة f يقال أنها قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي A بحيث أنه لكل $\varepsilon > 0$ توجد تجزئة P ولأي تجزئة Q بحيث أنه $P \subset Q$ فإن

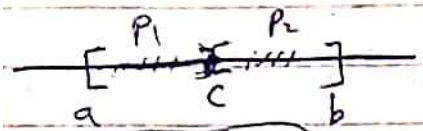
$$|S_Q - A| \leq \varepsilon.$$

$$|S(Q,f) - A| \leq \varepsilon.$$

نظرية (5.5.1): إذا كانت f دالة محدودة والنقاط c هي النقاط الوحيدة التي عندها f ليست قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$، وكانت f قابلة للتكامل ريمانيا على الفترات $[a,c]$ و $[c,b]$ حيث $c \in (a,b)$، فإن f تكون قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ وتكون

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

البرهان: نفرض أن P هي تجزئة للفترة $[a,b]$ وكذلك نفرض أن $P_1 = P \cap [a,c]$ هي تجزئة للفترة $[a,c]$ و $P_2 = P \cap [c,b]$ هي تجزئة للفترة $[c,b]$.



$$S_P = S_{P_1} + S_{P_2} \Leftarrow$$

نختار $\varepsilon > 0$.

$\therefore f$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

$$\bar{S}_P - \underline{S}_P < \varepsilon$$

$$\bar{S}_P = \bar{S}_{P_1} + \bar{S}_{P_2} \qquad \underline{S}_P = \underline{S}_{P_1} + \underline{S}_{P_2}$$

$x_i \in P \Rightarrow x_i = y_i + z_i$, $y_i \in P_1$, $z_i \in P_2$

$$\bar{S}_P - \underline{S}_P = \bar{S}_{P_1} + \bar{S}_{P_2} - \underline{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_2} = \bar{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_1} + \bar{S}_{P_2} - \underline{S}_{P_2} < \varepsilon \Leftarrow$$

$$\bar{S}_{P_2} - \underline{S}_{P_2} > 0 \quad , \quad \bar{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_1} > 0 \quad \therefore$$

$$\bar{S}_{P_2} - \underline{S}_{P_2} < \varepsilon \quad , \quad \bar{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_1} < \varepsilon \quad \therefore$$

$\therefore f$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,c]$ وكذلك على الفترة $[c,b]$.

نظرية (5.5.2): إذا كانت $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة محدودة وقابلة للتكامل ريمانيا على الفترات $[a,c]$ و $[c,b]$ وتحتوي $c \in (a,b)$، فإن f تكون قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وكذلك

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

البرهان: نختار $\varepsilon > 0$.

$\therefore f$ دالة قابلة للتكامل ريمانيا على الفترات $[a,c]$ و $[c,b]$.

$\therefore$ توجد تجزئات P_1 على الفترة $[a,c]$ و P_2 على الفترة $[c,b]$ بحيث أنه

إذا كانت $P_1 \subset Q_1$ ، $P_2 \subset Q_2$ ، فإن

$$|S_{Q_2} - \int_c^b f\,dx| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad |S_{Q_1} - \int_a^c f\,dx| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

لتكن $P = P_1 \cup P_2$ تجزئة على الفترة $[a,b]$ و $P \subset Q$ $\Leftarrow$ $S_Q = S_{Q_1} + S_{Q_2}$

$$|S_Q - \int_a^b f\,dx - \int_c^b f\,dx|$$

$$= |S_{Q_1} + S_{Q_2} - \int_a^c f\,dx - \int_c^b f\,dx|$$

$$\le |S_{Q_1} - \int_a^c f\,dx| + |S_{Q_2} - \int_c^b f\,dx| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$ f قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ وتكون

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

مبرهنة (57.4): المبرهنة الأساسية للتكامل

إذا كانت $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ وكانت f' قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ فإن

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

البرهان: نفرض أن P تجزئة الفترة $[a,b]$ و $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$\Leftarrow$ يوجد $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ بحيث أن

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$ (بمبرهنة القيمة المتوسطة)

$$\Leftarrow \sum_{i=1}^n f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= f(b) - f(a)$$

$\therefore$ f' قابلة للتكامل ريمانيا $\Leftarrow$ $\varepsilon > 0$ $|S_P - \int_a^b f'\,dx| < \varepsilon$

لتكن $S_P = f(b) - f(a)$

$\Leftarrow$ $\int_a^b f'\,dx = f(b) - f(a)$

مبرهنة القيمة المتوسطة (57.5): إذا كانت $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة وكان $f(a) \le \eta \le f(b)$ أو $f(b) \le \eta \le f(a)$ فإنه يوجد عدد $c \in (a,b)$ بحيث أن $f(c) = \eta$.

(58): التكامل بالتجزئة (Integration by parts)

إذا كانت f و h دالتين بحيث أن f' و h' موجودة، وقابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$، فإن

$$\int_a^b f\,dh + \int_a^b h\,df = f(b)h(b) - f(a)h(a)$$

البرهان:

f و h دالتان مستمرتان وكذلك f' و h' موجودة $\Leftarrow$ f و h دالتان قابلتان للتكامل الريماني (كل دالة مستمرة قابلة للتكامل الريماني)

$\Leftarrow$ fh' و $f'h$ دالتان قابلتان للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

(إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$، فإن fg تكون قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$)

$$\therefore (fh)' = f'h + fh'$$

$\Leftarrow$ $(fh)'$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

$\Leftarrow$

$$\int_a^b (fh)' = f(b)h(b) - f(a)h(a)$$

~~إذا كانت $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ، f دالة قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$~~

مبرهنة (59): إذا كانت f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$، فإن $|f|$ قابلة للتكامل الريماني وكذلك

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$$

البرهان: لتكن $\varepsilon > 0$ ، لتكن P تجزئة للفترة $[a,b]$، $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$\therefore$ f قابلة للتكامل الريماني $\Leftarrow$ $\bar{S}_{P,f} - \underline{S}_{P,f} < \varepsilon$

في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ نفرض أن $m_i = \inf(f)$ ، $M_i = \sup(f)$ ، $\tilde{m}_i = \inf|f|$ ، $\tilde{M}_i = \sup|f|$

$\Leftarrow$ $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\tilde{M}_i - \tilde{m}_i \le M_i - m_i$

$\Leftarrow$

$$\bar{S}_{P,|f|} - \underline{S}_{P,|f|} \le \bar{S}_{P,f} - \underline{S}_{P,f} < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $|f|$ قابلة للتكامل الريماني.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| - \left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)| - |g(x)|\,dx\right|$$

$f \le |f|$, $-f \le |f|$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dx \le \int_a^b |f|\,dx \quad , \quad -\int_a^b f\,dx \le \int_a^b |f|\,dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f|\,dx \le \int_a^b f\,dx \le \int_a^b |f|\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx \quad .$$

مبرهنة (5.9): (مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل)

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل على $[a,b]$ و $g(x)\ge 0$ أو $g(x)\le 0$ لكل $x\in[a,b]$ فإنه يوجد $c\in[a,b]$ بحيث أن

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

البرهان: نفرض أن $m=\inf\{f(x)\,;\,x\in[a,b]\}$

$M=\sup\{f(x)\,;\,x\in[a,b]\}$

$\forall x\in[a,b]$ ، $g(x)\ge 0$ $\Rightarrow$ $m\,g(x)\le f(x)g(x)\le M\,g(x)$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$$

إذا كانت $\int_a^b g(x)\,dx \ne 0$ $\Rightarrow$ $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$

بما أن f دالة مستمرة $\Rightarrow$ يوجد $c\in[a,b]$ بحيث أن

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

مبرهنة (تكامل بارت) الصيغة الأولى والصيغة الثانية

إذا كانت f دالة مستمرة ومتزايدة على القترة $[a,b]$ ودالة التكامل h قابلة للتكامل ريمانيا، وغير سالبة، فإنه يوجد عدد $c \in [a,b]$ بحيث أن:

$$\int_a^b f(x)\cdot h(x)\,dx = f(a)\int_a^c h(x)\,dx + f(b)\int_c^b h(x)\,dx$$

البرهان: من مبرهنة القيمة المتوسطة لإرث يوجد عدد $t \in [a,b]$ بحيث أن: $\int_a^b f\,h\,dx = f(t)\int_a^b h\,dx$

بما أن f متزايدة $\Leftarrow f(a) \le f(t) \le f(b)$

لتكن $g(x)$ دالة معرفة على القترة $[a,b]$ بالشكل $g(x) = (f(b)-f(a))\int_x^b h(x)\,dx$

$\Leftarrow g(a) = (f(b)-f(a))\int_a^b h(x)\,dx \ge (f(t)-f(a))\int_a^b h(x)\,dx$

$g(b) = 0 \Leftarrow$

$\Leftarrow$ يوجد عدد $c \in [a,b]$ بحيث أن $g(c) = (f(b)-f(a))\int_c^b h(x)\,dx$

$= (f(t)-f(a))\int_a^b h(x)\,dx$ (حسب مبرهنة القيمة المتوسطة)

$\Leftarrow f(b)\int_c^b h(x)\,dx - f(a)\int_c^b h(x)\,dx = \int_a^b f\,h\,dx - f(a)\int_a^b h\,dx$

$\Leftarrow \int_a^b f\,h\,dx = f(a)\int_a^c h\,dx + f(b)\int_c^b h\,dx$

مثال: استخدم مبرهنة القيمة الوسطى الأولى لإيجاد صيغة تقريبية للتكامل $\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ حيث $g(x)$ معرفة على القترة $[0,\frac{1}{2}]$ بالشكل $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$، $|k|<2$

الحل: الدالة $g(x)$ يمكن كتابتها بالشكل $g(x) = f(x)\cdot h(x)$ حيث $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$، $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة الأولى

$\Leftarrow$ يوجد عدد $0 \le y \le \frac{1}{2}$ بحيث أن

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g\,dx = (1-k^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = (1-k^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6\sqrt{1-k^2y^2}}$$

بما أن الدالة $\frac{\pi}{6\sqrt{1-k^2y^2}}$ متزايدة في القترة $[0,\frac{1}{2}]$ $\Leftarrow$

$$\frac{\pi}{6} \le \int_0^{\frac{1}{2}} g\,dx \le \frac{\pi}{6\sqrt{1-\frac{1}{4}k^2}}$$

مثال: لتكن $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$ حيث $a>0$، برهن أن التكامل الأخير يمكن جعله أصغر ما يمكن بأخذ a كبيرة بما فيه الكفاية.

الحل: برهن أولاً أن التكامل الأخير يتقارب. لتكن $y \in [a,b]$ نجد أن:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^y \sin x\,dx + \frac{1}{b}\int_y^b \sin x\,dx \quad , \quad y \in [a,b]$$

$$\Leftarrow \left|\int_a^y \sin x\,dx\right| \le 2 \quad \text{و} \quad \left|\int_y^b \sin x\,dx\right| \le 2$$

$$\Leftarrow \left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

نرمز

$$\left|\int_u^y \sin x\,dx\right| = |\cos y - \cos a| = \left|2\sin\left(\frac{y+a}{2}\right)\sin\left(\frac{y-a}{2}\right)\right| \le 2.$$

تكامل ريمان - ستيلتجس

The Riemann-Stieltjes integral

تكامل ستيلتجس

The Stieltjes integral

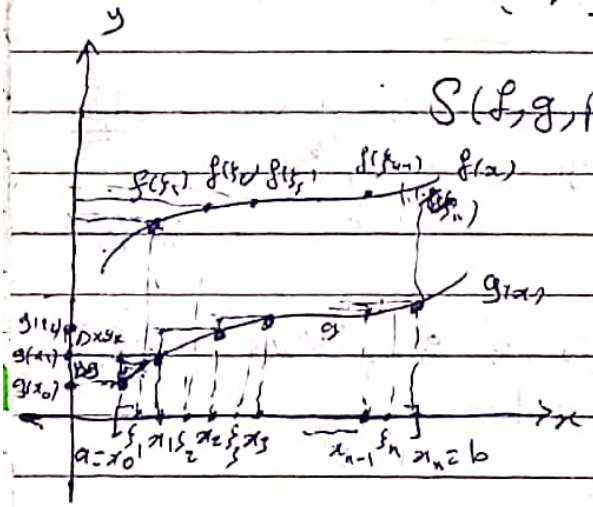
لتكن f و g دالتين محدودتين على الفترة $[a,b]$، لتكن $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ و $Q=\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ مجموعة متممة (intermediate) للفترة P بحيث أن $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ لكل $i = 1,2,\dots,n$، فإن المجموع ستيلتجس (S-sum) للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$ والمقابل للتجزئة P والمجموعة المتممة Q يعرف بالعدد

$$S(f,g,P,Q) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g_i$$

حيث $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$

$g_0 = g(x_0) = g(a)$،

$g_n = g(x_n) = g(b)$.



تعريف: (تكامل ستيلتجس)

العدد I يسمى تكامل ستيلتجس أو (تكامل S) للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$ ويقال أن الدالة f قابلة لتكامل ستيلتجس بالنسبة للدالة g على

~~$|S(f,g,P,Q) - \int_a^b f\,dg| < \varepsilon$ حيث أن $\delta > 0$ يوجد $\varepsilon > 0$ لكل $[a,b]$ إذا كان~~

لكل التجزئات P بحيث أنه $\Delta P < \delta$ ولكل التجزئات المتوسطة Q لـ P.

* تكامل ستلجس يمكن كما تعريفه أيضا بالشكل

$$S(f,g,P,Q) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \int_a^b f\,dg .$$

* تعريف:

$$\int_a^b f\,dg = -\int_b^a f\,dg \quad \text{وكذلك} \quad a<b \quad \text{،} \quad \int_a^a f\,dg = 0$$

① أمثلة: ليكن f أي دالة و $g(x)=k$ الدالة الثابتة على الفترة $[a,b]$.
لأي تجزئة P وتجزئة متوسطة Q لـ P يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = 0$$

$$\Leftarrow \int_a^b f\,dg = 0 \Leftarrow f \text{ دالة قابلة لتكامل ستلجس .}$$

② إذا كانت $f(x)=k$ على الفترة $[a,b]$ و g دالة اختيارية فإن f قابلة لتكامل ستلجس على $[a,b]$ و

$$\int_a^b f\,dg = k(g(b)-g(a)) .$$

البرهان: لتكن P تجزئة الفترة $[a,b]$ و Q تجزئة متوسطة من الفترة P، فإنه لأي تجزئة P وتجزئة متوسطة Q يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = k\sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = k(g(b)-g(a))$$

$$\Leftarrow f \text{ قابلة لتكامل ستلجس و} \int_a^b k\,dg = k(g(b)-g(a)) .$$

تعريف: إذا كانت f و g دالتان معرفتان على الفترة $[a,b]$، فإن جميع مجاميع $S(f,g,P,Q)$ S-sums المقابلة لكل الأزواج من التجزئات المتناظرة على الفترة $[a,b]$ يقال لها متقاربة تقارب كوشي (Cauchy Convergent) إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$$|S(f,g,P',Q')-S(f,g,P'',Q'')|<\varepsilon$$

لكل التجزئات P' و P'' بحيث أن $\Delta P'<\delta$ و $\Delta P''<\delta$، ولكل التجزئات المتناظرة Q' مع P'، و Q'' مع P''.

مبرهنة (62): الدالة f تكون قابلة للتكامل ستيلجس نسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة مجاميع ستيلجس $S(f,g,P,Q)$ (S-sums) متقاربة تقارب كوشي.

البرهان: نفرض أن الدالة f قابلة للتكامل ستيلجس ونرمز لقيمة التكامل بالرمز I، أي أن

$$I=\int_a^b f\,dg$$

لإثبات أن f قابلة للتكامل ستيلجس $\Leftarrow$ يوجد $\delta>0$ بحيث أنه

$$|S(f,g,P',Q')-\int_a^b f\,dg|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad |S(f,g,P'',Q'')-\int_a^b f\,dg|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Delta P'<\delta \quad \text{و} \quad \Delta P''<\delta$$

حيث P' و P'' تجزئان للفترة $[a,b]$ و Q' و Q'' تجزئان متناظران مع التجزئان P' و P''.

$$\Rightarrow |S(f,g,P',Q')-S(f,g,P'',Q'')|=|S(f,g,P',Q')-S(f,g,P'',Q'')-\int_a^b f\,dg+\int_a^b f\,dg|$$

$$=|S(f,g,P',Q')-\int_a^b f\,dg-(S(f,g,P'',Q'')-\int_a^b f\,dg)|$$

$$\leq |S(f,g,P',Q')-\int_a^b f\,dg|+|S(f,g,P'',Q'')-\int_a^b f\,dg|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Rightarrow$ مجموعة المجاميع ستيلجس متقاربة تقارب كوشي.

نفرض أن جميع مجاميع متتالية متقاربة تقارب كوشي.

ولتكن P_n ، $n=1,2,\dots$ التجزئة $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ المعرفة بالشكل $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ولتكن $Q_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ التجزئة المنتظمة، والتجزئات P_n وتعرف بالشكل $\xi_i = x_{i-1}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

المتتالية $\{S(f,g,P_n,Q_n)\}$ هي متتالية كوشي ومتقاربة للعدد L.

نختار $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ يوجد عدد طبيعي N بحيث أنه

$$|S(f,g,P_n,Q_n) - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N \quad \dots\dots (1)$$

$\therefore$ مجموعة مجاميع متتالية متقاربة كوشي.

$\Leftarrow$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه

$$|S(f,g,P',Q') - S(f,g,P'',Q'')| < \varepsilon \quad \forall \Delta P' < \delta, \ \Delta P'' < \delta$$

نفرض أن $\delta' = \min\{\delta, \frac{1}{N}\}$.

$\Leftarrow P_n, Q_n$ تحقق (1) وكذلك $\Delta P_n = \frac{1}{n} < \delta'$.

لتكن P أي تجزئة بحيث أن $\Delta P < \delta'$ ولتكن Q أي تجزئة متوسطة على P.

$$\Leftarrow |S(f,g,P,Q) - S(f,g,P_n,Q_n)| < \varepsilon$$

$$\Leftarrow |S(f,g,P,Q) - L| = |S(f,g,P,Q) - S(f,g,P_n,Q_n) + S(f,g,P_n,Q_n) - L|$$
$$\leq |S(f,g,P,Q) - S(f,g,P_n,Q_n)| + |S(f,g,P_n,Q_n) - L|$$
$$< 2\varepsilon$$

$\Leftarrow f$ قابلة للتكامل على $[a,b]$.

مبرهنة (63): إذا كانت f دالة مستمرة و g دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$ فإن f دالة قابلة للتكامل على $[a,b]$.

البرهان: نختار $\varepsilon > 0$.

$\because f$ دالة مستمرة والفترة $[a,b]$ مغلقة $\Leftarrow f$ مستمرة بانتظام.

$\Leftarrow$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كان $|x_1 - x_2| < \delta \Leftarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

نفرض أن P' و P'' تجزئات للفترة $[a,b]$ و Q' و Q'' تجزئات متوسطة على التجزئات P' و P''.

$\Delta P' < \delta$ و $\Delta P'' < \delta$

$\because$ مستمرة بانتظام $\Leftarrow$ متزايدة $\Leftarrow M(f) - m(f) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow M(f)\Delta g_k - m(f)\Delta g_k \leq \varepsilon \Delta g_k$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} (f(t_i)-f(t_i))\Delta g_i\right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta g_i$$

لتكن $P = P' \cup P''$ ، Q تجزئة متوسطة من التجزئة P

$$\Leftarrow \left|S(f,g,P,Q) - S(f,g,P',Q')\right| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \left|S(f,g,P',Q') - S(f,g,P'',Q'')\right| < \varepsilon$$

$$\left|S(f,g,P'',Q'') - S(f,g,P,Q)\right| < \varepsilon(g(b)-g(a)) \qquad \sum_{i=1}^{n} \Delta g_i = g(b)-g(a)$$

$$\Leftarrow \left|S(f,g,P',Q') - S(f,g,P'',Q'')\right| < 2\varepsilon(g(b)-g(a))$$

$\Leftarrow$ مجموعة الجوامع تشكل متتالية كوشي.

$\Leftarrow$ f دالة قابلة للتكامل ستلجس.

مثال: إذا كانت x دالة متزايدة و x^2 دالة متزايدة على الفترة $[0,1]$. جد قيمة $\int_0^1 x\,dx^2$ باستخدام تجزئة ستلجس.

الحل: x دالة متزايدة و x^2 دالة متزايدة على الفترة $[0,1]$.

$\Leftarrow \int_0^1 x\,dx^2$ موجود (الدالة قابلة للتكامل).

نفرض أن $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة للفترة $[0,1]$ حيث $x_i = \frac{i}{n}$ ، $i = 0,1,2,\dots,n$ ، $n = 1,2,\dots$ ، لتكن $Q_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تجزئة متوسطة للتجزئة P_n. فإن

$$S(x, x^2, P_n, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2}$$

$$\Leftarrow \int_0^1 x\,dx^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2} = \frac{2}{3}.$$

مبرهنة (64): إذا كانت f دالة قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وكانت g دالة مشتقة مستمرة g' على نفس الفترة، فإن $\int_a^b f g' dx$ و $\int_a^b f\,dg$ موجودة ومتساوية.

البرهان: نختار $\varepsilon > 0$.

$\because g'$ مستمرة $\Leftarrow$ g' مستمرة بانتظام على الفترة $[a,b]$.

$\Leftarrow$ fg' قابلة للتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$.

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $\left|S(fg', P, Q) - \int_a^b fg'\,dx\right| < \varepsilon$

عندما $|y_1 - y_2| < \delta$ ، $|g'(y_1) - g'(y_2)| < \varepsilon$ و $\Delta P < \delta$

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ، $Q = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g(t_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g(z_i) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g(t_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i) g'(z_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left(g'(t_i) - g'(z_i)\right)\Delta x_i$$

$\Leftarrow$ الدالة g قابلة للاشتقاق على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$،

$\Leftarrow$ توجد أعداد $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ بحيث أن

$$k = 1, \ldots, n \quad x_{k-1} < z_k < x_k \quad \text{و} \quad \Delta g_k = g'(z_k)\Delta x_k$$

$$\Leftarrow \left| R(fg', P, Q) - S(f, g, P, Q) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left(g'(t_i) - g'(z_i)\right)\Delta x_i \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g(t_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g(z_i) < M(b-a)\varepsilon, \quad M = \sup|f|$$

$\Leftarrow \int_a^b f\,dg$ و $\int_a^b fg'\,dx$ توجد وتساوي.

The Generalized Stieltjes Integral : تكامل ستيلتجس العام

تعريف: ليكن f و g دالتان معرفتان على الفترة $[a,b]$. العدد $\int_a^b f\,dg$ يسمى تكامل ستيلتجس العام أو (تكامل GS) للدالة f نسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$، والدالة f تسمى قابلة لتكامل GS نسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$، إذا كان لكل عدد موجب ε يوجد تجزئة P_ε تحقق

$$\left| S(f, g, P, Q) - \int_a^b f\,dg \right| < \varepsilon$$

لكل $P \supset P_\varepsilon$ ولكل التجزئات المتوسطة Q على P.

ملحوظة: (65) إذا كانت f قابلة لتكامل GS نسبة للدالة g على كل فترة من الفترات $[a,c]$ و $[c,b]$، فإن f تكون قابلة لتكامل GS نسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$ وتكتب

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

البرهان: نختار $\varepsilon > 0$.

$\Leftarrow$ f قابلة لتكامل GS على الفترة $[a,c]$

$\Leftarrow$ توجد تجزئة P'_ε للفترة $[a,c]$ بحيث أن $\left| S(f, g, P', Q') - \int_a^c f\,dg \right| < \varepsilon$

بالمثل توجد تجزئة P''_ε للفترة $[c,b]$ بحيث أن $\left| S(f, g, P'', Q'') - \int_c^b f\,dg \right| < \varepsilon$

لكل $P'_\varepsilon \subset P'$ ، لكل $P''_\varepsilon \subset P''$ ، ولكل التجزئات المرتبطة Q' ، Q'' على P' و P'' على التوالي.

$\Leftarrow$ $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ تمثل تجزئة للفترة $[a,b]$.

إذا كانت $P_\varepsilon \subset P$

$\Leftarrow$ $P'_\varepsilon \subset P' = P \cap [a,c]$ ، $P''_\varepsilon \subset P'' = P \cap [c,b]$

كذلك أي تجزئة مشتركة من التجزئة P يمكن تجزئتها إلى تجزئات مشتركة Q' ، Q'' من P' و P'' على التوالي.

$\Leftarrow$ $S(f,g,P,Q) = S(f,g,P',Q') + S(f,g,P'',Q'')$

$\Leftarrow$ $\left| S(f,g,P,Q) - \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg \right| =$

$$\left| S(f,g,P',Q') + S(f,g,P'',Q'') - \int_a^c f\,dg - \int_c^b f\,dg \right|$$

$$\leq \left| S(f,g,P',Q') - \int_a^c f\,dg \right| + \left| S(f,g,P'',Q'') - \int_c^b f\,dg \right| < 2\varepsilon .$$

$\Leftarrow$ f قابلة للتكامل GS ، و $\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$.

تكامل ريمان ستيلتجس : The Riemann – Stieltjes Integrail

ليكن f دالة معينة على الفترة $[a,b]$ ، ليكن $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تمثل تجزئة للفترة $[a,b]$ ، ليكن

$m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ ،

$M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ ،

$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ ،

$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$

ليكن g دالة متزايدة ومعرفة على الفترة $[a,b]$ ، $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$

إذا كان $\underline{RS}$ مجموع ريمان ـ ستلجس العلوي والسفلي أو $\overline{RS}$ مجموع RS ـ (RS-sum) للدالة f بالنسبة للدالة g والتجزئة P بأن العدد

$$\underline{RS}(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta g_k \quad \text{و} \quad \overline{RS}(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta g_k$$

$$\underline{RS}(f,g,P) \le \overline{RS}(f,g,P) \quad \Leftarrow \quad \Delta g_k \ge 0 \quad ;$$

* إذا كانت $P \subset P^*$ فإن $\underline{RS}(f,g,P) \le \underline{RS}(f,g,P^*)$

و $\overline{RS}(f,g,P^*) \le \overline{RS}(f,g,P)$

تعريف: إذا كانت f دالة مقيدة و g دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$ وإذا كانت تكاملات ريمان ـ ستلجس العلوية والسفلية للدالة f بالنسبة للدالة g متساوية، فإن النتيجة المشتركة لهذه التكاملات تسمى تكامل ريمان ـ ستلجس أو تكامل RS للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$ وتمثل بالعدد $\int_a^b f\,dg$، والدالة f يقال لها قابلة للتكامل ريمان ـ ستلجس بالنسبة للدالة g على الفترة $[a,b]$.

---

(66)

مبرهنة: لتكن f دالة مقيدة و g دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$، فإن $\int_a^b f\,dg$ موجود إذا وفقط إذا كان $\int_a^b f\,dg$ موجود وعندما تكون التكاملات موجودة فإن $\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dg$

البرهان:

نختار عدد $\varepsilon > 0$ ونفرض أن $\int_a^b f\,dg$ موجود

$\Rightarrow$ توجد تجزئة P_ε للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$|S(f,g,P_\varepsilon,Q) - \int_a^b f\,dg| < \varepsilon \quad \text{---} \quad (16)$$

متبوعة

لأي تجزئة P تحوي P_ε أي $P_\varepsilon \subset P$، $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ وأي تجزئة Q متبوعة من P.

لتكن $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\}$

$\Rightarrow$ توجد أعداد ξ_k بحيث أن $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ $k=1,2,\dots,n$ و $f(\xi_k) > M_k - \varepsilon$

$$\underline{\int_a^b f\,dg} \le \underline{RS}(f,g,P) < \sum_{i=1}^{n} (m_i(f) + \varepsilon)\Delta g_i$$

$$< S(f,g,P,Q) + \varepsilon(g(b) - g(a))$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f\,dg} \le \overline{\int_a^b} f\,dg \quad \text{(16) ∎}$$

لإكمال البرهان يبقى إثبات أن $\underline{\int_a^b f\,dg} \ge \overline{\int_a^b} f\,dg$

$\Leftarrow$ يكفي إثبات أن $\overline{\int_a^b} f\,dg$ موجود وتساوي $\underline{\int_a^b} f\,dg$

$\Leftarrow$ نبرهن أن $\underline{\int_a^b} f\,dg$ موجود،

$\Leftarrow$ توجد تجزئة P_ε للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\underline{\int_a^b} f\,dg - \varepsilon \le \underline{RS}(f,g,P_\varepsilon) \le \overline{RS}(f,g,P_\varepsilon) < \overline{\int_a^b} f\,dg + \varepsilon$$

$\Leftarrow$ لأي تجزئة P بحيث أن $P \supset P_\varepsilon$ ولأي تجزئة شرطة Q على P فإن

$$\underline{RS}(f,g,P) \le S(f,g,P,Q) \le \overline{RS}(f,g,P)$$

$$\Leftarrow \underline{\int_a^b} f\,dg - \varepsilon < S(f,g,P,Q) < \overline{\int_a^b} f\,dg + \varepsilon$$

$\Leftarrow \underline{\int_a^b} f\,dg$ موجود وتساوي $\overline{\int_a^b} f\,dg$،

بقي أن نثبت أن $\int_a^b f\,dg$ موجود إذا وفقط إذا كان للمقدار $\overline{RS}(f,g,P) - \underline{RS}(f,g,P) < \varepsilon$ توجد تجزئة P للفترة $[a,b]$ بحيث أن $\varepsilon > 0$