الميكانيك الإحصائي

statistical Mechanics Phys 409

Lecture 3

Dr. Hashim M. Jabbar

قانون التوزيع Distribution Law

نتناول في هذا الفصل الطرق التي يتم بها توزيع جسيمات النظام الفيزيائي ، محدودة العدد ، على مستويات الطاقة من خلال مفهوم منهج الطاقم *Ensemble Approach* . حيث يعتمد قانون التوزيع على الكيفية التي يحدد (يعين) بها النظام فإن هذه الطرق تختلف وفقا لهذه الكيفية . و هناك ثلاثة انواع من الطواقم هي: الطاقم المجهري القانوني *Micro Canonical Ensemble* ، الطاقم القانوني *Canonical Ensemble* ، و اخيرا الطاقم القانوني الكبير *Grand Canonical Ensemble* .

قانون التوزيع للطاقم المجهري القانوني

في هذا البند ، نتناول كيفية توزيع الجسيمات المحددة العدد على مستويات الطاقة في حالتين هما :

(a) مستويات الطاقة غير المنحلة (non degenerated levels)

(b) مستويات الطاقة المنحلة (degenerated levels).

عند البدء بتوزيع الجسيمات ، يجب تحديد فيما اذا كانت هذه الجسيمات **مميزة** distinguishable او **غير مميزة** indistinguishable ، حيث أن في حالة توزيع الجسيمات غير المميزة على مستويات الطاقة للنظام تكون كل حالة عيانية هي حالة مجهرية واحدة فقط .

(a) التوزيع في حالة مستويات الطاقة غير المنحلة (non degenerated levels)

نتناول دراسة توزيع الجسيمات في النظام عندما تكون الأنظمة في هذا الطاقم معزولة ، وذات طاقة كلية (E) ثابتة ، وكذلك يكون عدد الجسيمات في هذه الأنظمة (N) ثابت. فمثلا اذا اردنا توزيع 3 جسيمات (مستقلة، متماثلة، ومميزة) وهي A, B, C على اربع مستويات من الطاقة ، حيث الطاقة الكلية لهذه المستويات كالتالي:

$$\varepsilon_0 = 0\,, \qquad \varepsilon_1 = \epsilon_1, \qquad \varepsilon_2 = 2\epsilon_1, \qquad \varepsilon_3 = 3\epsilon_1$$

وبشرط ان تبقى الطاقة الكلية للنظام تساوي $E=3\epsilon_1$.

اذا رمزنا الى عدد الجسيمات في كل من هذه المستويات (يسمى هذا العدد **رقم الإشغال** occupation number) كالتالي:

$N_0, N_1, N_2\ N_3$ ، أي رقم الإشغال في المستوى الأول هو N_0 وهكذا على الترتيب . بتطبيق الشروط السابقة ($N=3$, $E=3\epsilon_1$) ، نحصل على التوزيعات التالية (كما في الجدول ادناه):

macro-state	N_0	N_1	N_2	N_3	$\sum_{i=0}^{3} N_i$	$E = \sum_{i=0}^{3} N_i \, \varepsilon_i$
I	2	0	0	1	3	$3\varepsilon_1$
II	1	1	1	0	3	$3\varepsilon_1$
III	0	3	0	0	3	$3\varepsilon_1$

من هذا الجدول ، نلاحظ ان التوزيع للجسيمات يعطي 3 حالات عيانية macro- states .

بما ان الجسيمات الموزعة على المستويات مميزة ، لذلك يكون لكل حالة عيانية عدد من الحالات المجهرية والناتجة عن تباديل permutation امكنة الجسيمات في المستويات . ويكون عدد الحالات المجهرية المرافقة لكل حالة عيانية مساويا لعدد طرق ترتيب الجسيمات في المواقع المختلفة لمستويات الطاقة لكل حالة عيانية ، كما يظهر في الجدول التالي :

energy state	macro-state I			macro-state II						macro-state III
ε_3	A	B	C	-	-	-	-	-	-	-
ε_2	-	-	-	A	A	B	B	C	C	-
ε_1	-	-	-	B	C	A	C	A	B	ABC
ε_0	BC	AC	AB	C	B	C	A	B	A	-
no. of micro-states	3			6						1

نلاحظ من هذا الجدول ان الحالة العيانية الثانية يكون لها اكبر عدد ممكن من الحالات المجهرية ($\Omega_{II} = 6$) .

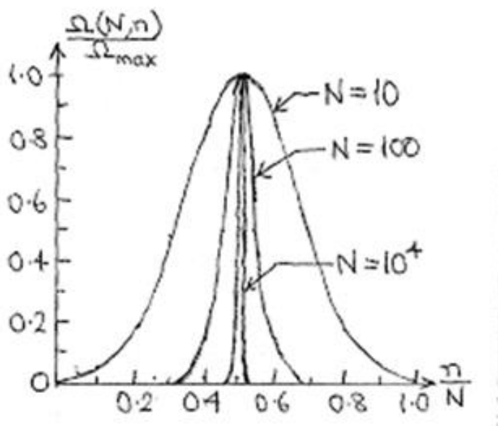
ويمكن تعميم ذلك كالتالي :اذا رسمنا علاقة بيانية لعدد الحالات المجهرية المصاحبة لكل من الحالات العيانية في النظام (الشكل . نجد ان عند **الإتزان** equilibrium ، يكون هذا النظام **اكثر احتمالا** للتواجد most probable في الحالة العيانية التي لها اكبر عدد من الحالات المجهرية (اي الحالة التي تكون عندها Ω اعظم ما يمكن) .

<u>تعميم</u> : لعدد من الجسيمات المميزة N ، اذا كان الإشغال انفرادي ، اي $N_i=1$ ، فإن القيمة العظمى للحالات المجهرية (Ω_{max}) يعطى بالعلاقة التالية : $\boxed{\Omega = N!}$. في هذا المثال ، حيث N=3 ، تكون:

$\Omega_{max} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

اما اذا كان رقم الإشغال اكبر من 1 ($N_i > 1$) ، فإن

$$\Omega = \frac{N!}{N_0!\,N_1!\,N_2!\ldots.}$$



العلاقة بين الحالات المجهرية والحالة العيانية.

بإستخدام معادلة (3.1) ، نجد ان عدد الحالات المجهرية للحالة العيانية الأولى كالتالي:

$$\Omega_I = \frac{3!}{2!\,0!\,0!\,1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1 \times 1} = 3$$

التوزيع في حالة مستويات الطاقة المنحلة Degenerate levels

لنفرض اننا نريد توزيع عدد من الجسيمات المستقلة (اي ان هذه الجسيمات لا تؤثر على اشغال بعضها البعض بسبب عدم وجود تفاعل بينها)على مستويات طاقة ثابتة . نفرض ان كل مستوى (j) يملك طاقة كلية ε_j ، وان عدد انحلاله degeneracy تمثل بالرمز g_j ، ورقم الإشغال له n_j . حيث ان النظام معزول ، تكون المعلمات parameters المحددة لهذا النظام

(E, N,V) كميات ثابتة . اي

$$N = \sum_j n_j$$

$$E = \sum_j n_j \, \varepsilon_j$$

اذا اردنا توزيع N من الجسيمات المميزة والمستقلة ، بحيث نضع n_1 من هذه الجسيمات في المستوى الأول ، يكون عدد الطرق (w_1) التي يتم بها هذا الحدث (كما مر منعنا في الفصل الثاني) كالتالي:

$$w_1 = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1! \, (N - n_1)}$$

بينما يكون عدد الطرق لتوزيع n_2 في المستوى الثاني كالتالي:

$$w_2 = \binom{N - n_1}{n_2} = \frac{(N - n_1)!}{n_1! \, (N - n_1 - n_2)!}$$

وبنفس الطريقة نجد عدد طرق توزيع الجسيمات المتبقية .

اما العدد الكلي لطرق التوزيع على كل المستويات فيكون مساويا لحاصل ضرب طرق كل مستوى ، اي

$$W = w_1 w_2 \ldots \ldots . = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)} \times \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!} \;\ldots.$$

$$= \quad \frac{N!}{n_1!\,n_2!\,\ldots..n_j!}$$

حيث ان للمستوى j انحلال g_j ، فيمكن لأي جسيم من الجسيمات n_j ان يشغل اي من هذه المستويات المنحلة g_j . وعليه ، يكون عدد طرق التوزيع في اي مستوى منحل يساوي $g_j^{n_j}$. ويكون العدد الكلي لطرق التوزيع في كل المستويات المنحلة مساويا لناتج ضرب عدد طرق كل مستوى منحل ، اي

$$\omega_g = \prod_j g_j^{n_j}$$

وعليه ، يكون عدد الحالات المجهرية Ω = العدد الكلي لطرق التوزيع ، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\Omega = W . \omega_g \;\; = \mathrm{N}! \prod_j \left(\frac{g_j^{n_j}}{n_j} \right)$$

مثال

جد الحالات العيانية والمجهرية الناتجة عن توزيع 6 جسيمات مميزة على 2 من مستويات الطاقة ، حيث المستوى الأول له انحلالية $g_1 = 2$ ، بينما المستوى الثاني له $g_2 = 5$ ؟

الحل

حيث ان لا يوجد شرط على الطاقة الكلية للمستوى اثناء التوزيع ، لذلك تكون الحالات العيانية الممكنة والناتجة عن وضع ستة جسيمات في المستويين المذكورين هي:

$(6,0), (5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5), (0,6)$.

وعليه ، يكون عدد الحالات العيانية 7 حالة. اما عدد الحالات المجهرية لكل حالة عيانية فنحصل عليها بإستخدام معادلة (3.3) . فمثلا ، يكون عدد الحالات المجهرية للحالة العيانية الأولى (6,0) كما يلي :

$N = 6, \quad j = 1,2, \quad n_1 = 6, n_2 = 0.$ ، وعليه

$$\Omega_{\mathrm{I}} = 6!\left[\frac{2^6}{6!} \times \frac{5^0}{0!}\right] = 2^6 = 64$$

بينما يكون عدد الحالات المجهرية للحالة العيانية الثانية (5,1) كما يلي

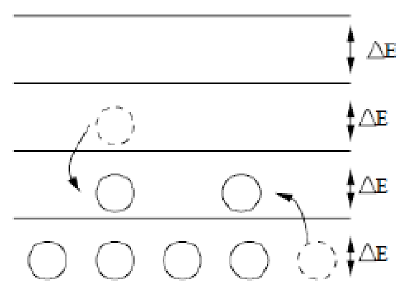
$$\Omega_{\mathrm{II}} = 6!\left[\frac{2^5}{5!} \times \frac{5^1}{1!}\right] = 960$$

مثال

لديك نظام مكون من 5 من مستويات الطاقة المتساوية التفريق بينها بمقدار ΔE و 6 جسيمات موزعة كما في الشكل ادناه . على فرض ان التفاعل بين هذه الجسيمات ضعيف بحيث لا تتأثر طاقة المستوى نتيجة انتقال الجسيمات بين المستويات . فاذا انتقل جسيم من المستوى الثالث الى المستوى الثاني ، ثم انتقل جسيم آخر من المستوى الأول الى الثاني ، جد $\Omega, \overline{n_1}$ للحالات العيانية في هذا النظام ؟

الحل

لنفرض ان ترتيب الجسيمات في مستويات الطاقة كما في الشكل (3.2):



توزيع الجسيمات على مستويات الطاقة.

من الشكل ، نجد ان عدد الحالات المجهرية للحالة العيانية الأولى : (5,0,1,0,0) كالتالي

$$\Omega_I = \binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{0}{0} = 6$$

في الحالة العيانية الثانية : $(4,2,0,0,0)$

$$\Omega_{II} = \binom{6}{4}\binom{2}{2}\binom{0}{0}\binom{0}{0}\binom{0}{0} = 15$$

اما في حالة الإتزان :

$$\bar{n}_j = \sum_j n_j \Omega_i\,(n_j) / \sum_i \Omega_i$$

$$\bar{n}_1 = \frac{5 \times 6 + 4 \times 15}{6 + 15} = 90/21$$

$$\bar{n}_2 = \frac{0 \times 6 + 2 \times 15}{6 + 15} = 30/21$$

$$\bar{n}_3 = \frac{1 \times 6 + 0 \times 15}{6 + 15} = 6/21$$

$$\bar{n}_4 = 0 \;, \qquad \bar{n}_5 = 0$$

نلاحظ ان $\sum_j \bar{n}_j = 6$

ويساوي هذا العدد عدد الجسيمات لأي حالة عيانية في النظام .