الميكانيك الإحصائي

statistical Mechanics Phys 409

Lecture 2

Dr. Hashim M. Jabbar

التوقع ، التباين والإنحراف المعياري

The Expectation , Variance , and Standard Deviation

عند التعامل مع نظريات الميكانيكا الكلاسيكية يلزم تعريف بعض المفاهيم الإحصائية بدلالة دالة الإحتمال كالتالي :

(a) التوقع(المتوسط) : لنفرض ان متغيراعشوائيا ما ، مثل X ، له مجموعة من القيم المختلفة هي : $\{x_0, x_2, \dots . x_n\}$ ، بحيث كانت دالة احتمال الحصول على اي من هذه القيم في التجربة العشوائية هي $\mathrm{P}(x_i)$. تكون القيمة المتوقعة لهذا المتغير كالتالي:

$$\langle X \rangle = \bar{X} = \sum_{i=0}^{i=n} x_i \, \mathrm{P}(x_i)$$

اي ان التوقع هو القيمة المتوسطة للمتغير .

اذا كان X متغيرا متصلا في المدى $a \le X \le b$ فإن التوقع يكون كالتالي:

$$\bar{\mathrm{X}} = \int_a^b xP(x)dx$$

كما ان توقع اي دالة لهذا المتغير ، $f(\mathrm{x})$ ، يعطى بنفس التعريف (2.11) ، اي

$$\overline{f(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{P}(\mathrm{x}_i) f(x_i)$$

ملاحظة : يكون *معدل مجموع اي دالتين يساوي مجموع معدل كلا من الدالتين على انفراد.* اي

$$\overline{f(x)+g(x)}=\overline{f(x)}+\overline{g(x)}$$

يعرف انحراف اي قيمة عن توقع (معدل) القيم ، Δx ، كالتالي : $\Delta x = x-\bar{x}$. وعليه ، يكون معدل هذا الإنحراف كالتالي

$$\overline{\Delta x}=\overline{(x-\bar{x})}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

تكون خصائص التوقع كالتالي:

(a) توقع المقدار الثابت يساوي الثابت نفسه.

(b) اذا كان a مقدار ثابت ، فإن $\left\langle aX \right\rangle=\overline{aX}=a\bar{X}$

(c) إذا كان a, b مقدارين ثابتين ، فإن $\left\langle aX+b \right\rangle=a\bar{X}+b$

مثال (4)

اذا رمينا حجر نرد مرة واحدة ، وكان X يرمز لعدد النقط التي تظهر على الوجه العلوي (المتغير العشوائي) ، احسب القيمة المتوقعة للمتغير X ؟

الحل:

القيم المكنة للمتغير العشوائي هي المجموعة التالية (فراغ العينة) :

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

يكون الإحتمال متساوي لكل عنصر في فراغ العينة ، اي $P(x_i)=1/6$

اذن

$$\left\langle X \right\rangle=\bar{X}=\sum_{i=1}^{6}x_iP(x_i)=1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$=21/6$$

مثال (5)

في مثال (4) جد $E(10X+3)$ ؟

الحل :

$$E\ (10X+3\ )=10E(X)+3=10(21/6)+3=38$$

(b) التباين : يعرف التباين بأنه متوسط(معدل) مربع انحرافات القيم عن معدلها ، ويرمز له $\overline{(\Delta x)^2} =$ $\sigma_x{}^2$.

رياضيا ، يعطى التباين بدلالة دالة الإحتمال كالتالي :

$$\sigma_x{}^2 = \overline{(\Delta x)^2} = \sum_{i=1}^{i=n} P(x_i)(x_i - \bar{x}_i)^2 \qquad (2.15)$$

اذا رمزنا للقيمة المتوسطة بالرمز μ ، حيث $E(X)=\mu$ ، فإن تباين المتغير X يكون كالتالي:

$$\sigma_x{}^2 = E(X-\mu)^2 = E[X-E(X)]^2$$

ويمكن اشتقاق علاقة رياضية للتباين كالتالي:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2 - 2x\bar{x} + x^2}$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

او

$$\sigma_x{}^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ملاحظة: تكون الخصائص الرياضية للتباين مشابهة لتلك الخصائص التي شرحت في حالة التوقع

مثال (6)

في مثال (4) جد تباين المتغير العشوائي X؟

الحل :

وجدنا في مثال (5) ان : E(X)= 21/6=3.5

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 P(x) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{91}{6} = 15.16$$

$$\sigma_x{}^2 = 15.16 - (3.5)^2 = 2.91$$

(c) الإنحراف المعياري

يعرف الإنحراف المعياري بأنه مقدار الجذر التربيعي للتباين ، ورمزه σ_x ، اي

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} \qquad (2.16)$$

ويعبر الإنحراف المعياري عن اتساع المدى لتوزيع القيم حول القيمة المتوسطة لها (معدلها) .

مثال (7)

جد توقع (متوسط) ، تباين ، الأنحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي دالة احتماله كما في الجدول التالي:

X	0	1	2
$f_x(x)=P(X=x)$	0.6	0.3	0.1

الحل :

نلخص الحل في الجدول التالي:

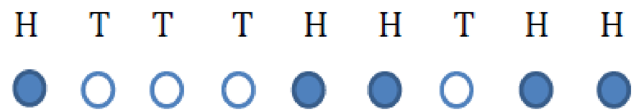
x	$f_X(x)$	$x\, f_X(x)$	$(x-\mu_X)^2$	$(x-\mu_X)^2 f_X(x)$	x^2	$x^2 f_X(x)$
0	0.6	0.0	0.25	0.150	0	0.0
1	0.3	0.3	0.25	0.075	1	0.3
2	0.1	0.2	2.25	0.225	4	0.4
المجموع	1.0	$\mu_X = \sum x\, f_X(x) = 0.5$		$\sigma_X^2 = \sum (x-\mu)^2 f_X(x) = 0.450$		$E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) = 0.7$

(a) التوقع (المتوسط) : $\mu_x = \sum x\, f_x(x) = 0.5$

(b) التباين : $\sigma_x{}^2 = E(x^2) - \mu_x{}^2 = 0.7 - 0.25 = 0.45$

(c) الإنحراف المعياري $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x{}^2} = \sqrt{0.45} = 0.6708$

possible states . head (H) and tail (T), like : (spin up ↿, spin down⇂) , (0 , 1) , (0 , $\hbar$)

$N_{\text{set coins}}$ 

... etc

$$\left.\begin{array}{l}\text{Total No. of Coins} = \mathrm{N}\\[4pt] \text{Total No. of Heads} = \mathrm{H}\\[4pt] \text{Total No. of Tails} = \mathrm{T}\end{array}\right\}\qquad \text{Macroscopic}$$

N = H + T

(NH) : total No. of macrostates , like a No. of freedom

$$N \geq H \geq 0$$

- Used for indistinguishable object not interested by the order of head and tail .

$$p = C_H^N \left(\frac{1}{2^H}\right)\left(\frac{1}{2^{N-H}}\right)$$

$$C_H^N = \frac{N!}{H!\,(N-H)!}$$

If we have no bins of H , T indistinguishable

$$p(H) = p \qquad\qquad P(T) = q$$

$$\boxed{p(p,q) = C_H^N p^H q^{N-H}}$$

$$p + q = 1$$

$$\sum p(H) = (p+q)^N$$

What is the average of No. of heads ?

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_{H=0}^{N} HP(H)}{\sum_{H=0}^{N} P(H)}$$

The quick way to find all the moments of this distribution is to define the gf (generating function) for pdf (probe density function) is differentiating the (gf) and setting x = 1 generating for polynomial distribution is :

$$f(x) = \sum_{H=0}^{N} p(H) x^H \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$f(x) = (Px + q)^N \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_{H=0}^{N} Hp(x) x^{H-1}$$

$$f'(x) = \sum_{H=0}^{N} Hp(H) = \langle H \rangle$$

$$f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = NP(Px + q)^{N-1}$$

$$f'(1) = NP$$

$\boxed{\langle H \rangle = NP}$ the average No. of heads.

What is the standard deviation ?

$$f''(1) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{H=0}^{N} p(H) x^H = H(H-1) \sum_{H=0}^{N} p(H) x^H$$

$$f''(1) = \langle H(H-1) \rangle = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle$$

$$f''(1) = N(N-1)P^2$$

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle = N(N-1)P^2$$

$$\langle H^2 \rangle = N^2P^2 - Np^2 + Np$$

Variance $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \langle (H - \langle H \rangle) \rangle$

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = N^2P^2 - Np^2 - NP - N^2P^2$$

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = Np(1-p) = Npq$$

$$\Delta H = \text{standard deviation} = \sqrt{Npq}$$

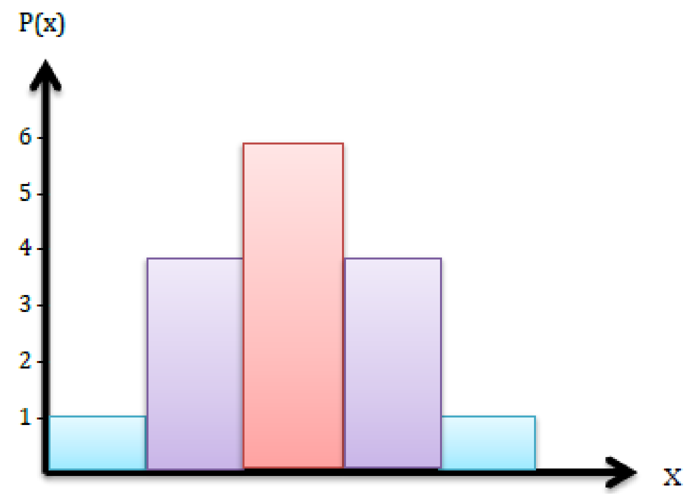
What is the distribution about the mean Relative Fluctuation ?

$$\text{Relative Fluctuation} = \frac{\Delta H}{\langle H \rangle}$$

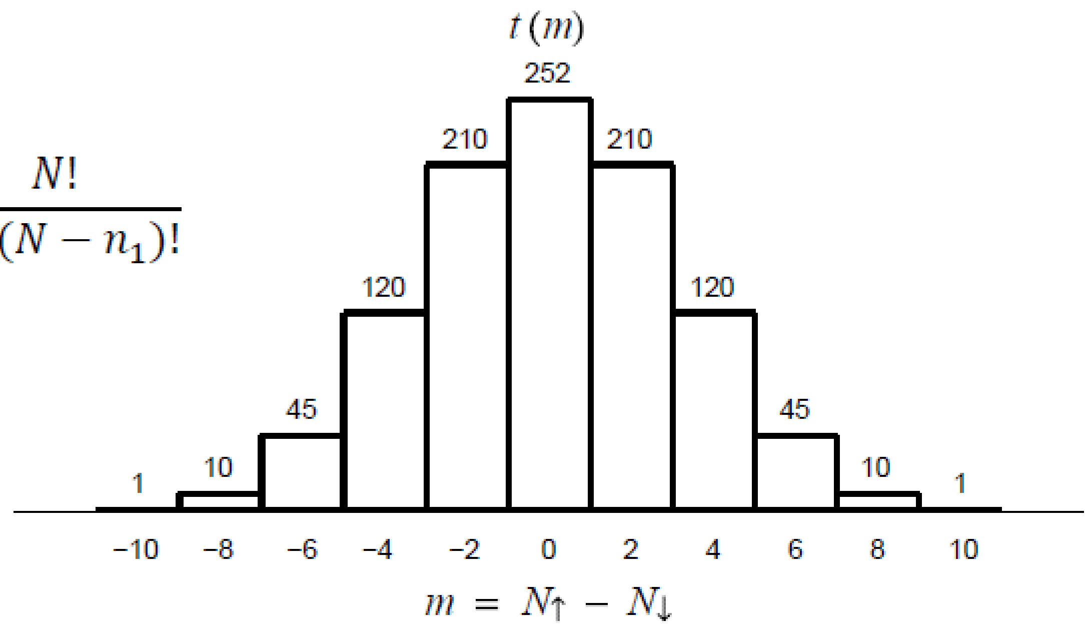
$$= \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{NP}}$$

---

events	No. of head	Prob.
T T T T	0	1/16
H T T T	1	4/16
T H T T		
T T H T		
T T T H		
H H T T	2	6/16
H T H T		
H T T H		
T H T H		
T H H T		
T T H H		
T H H H	3	4/16
H T H H		
H H T H		
H H H T		
H H H H	4	1/16

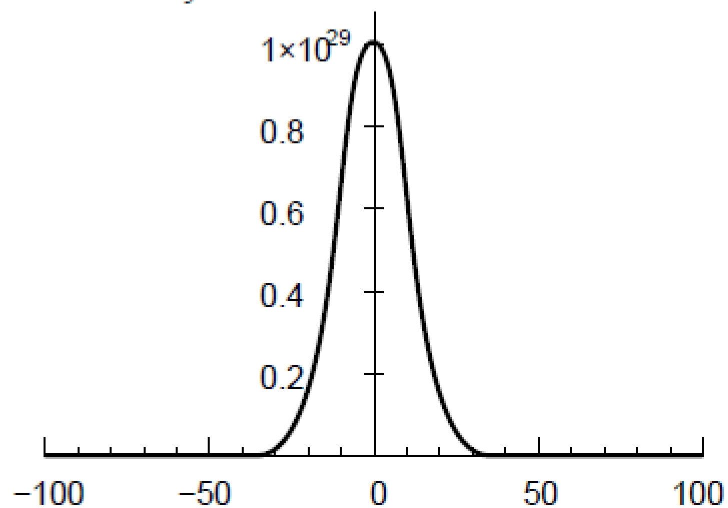


$$\Omega = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}$$

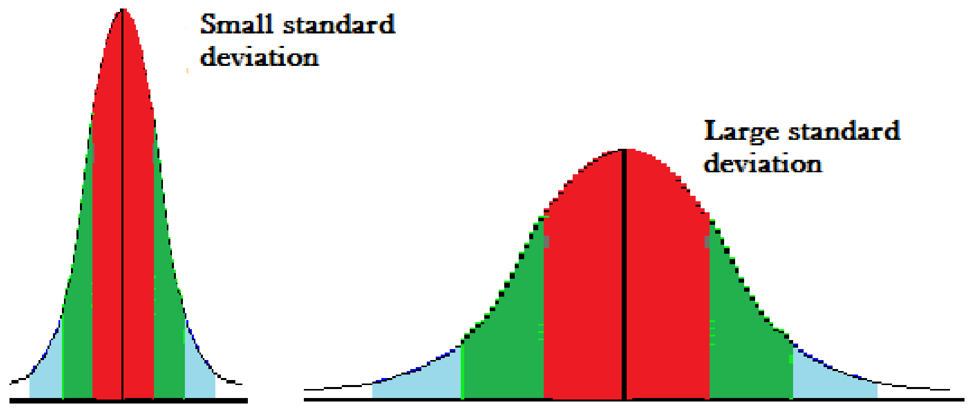


Plot of the function $t(m)$ for 10 spins

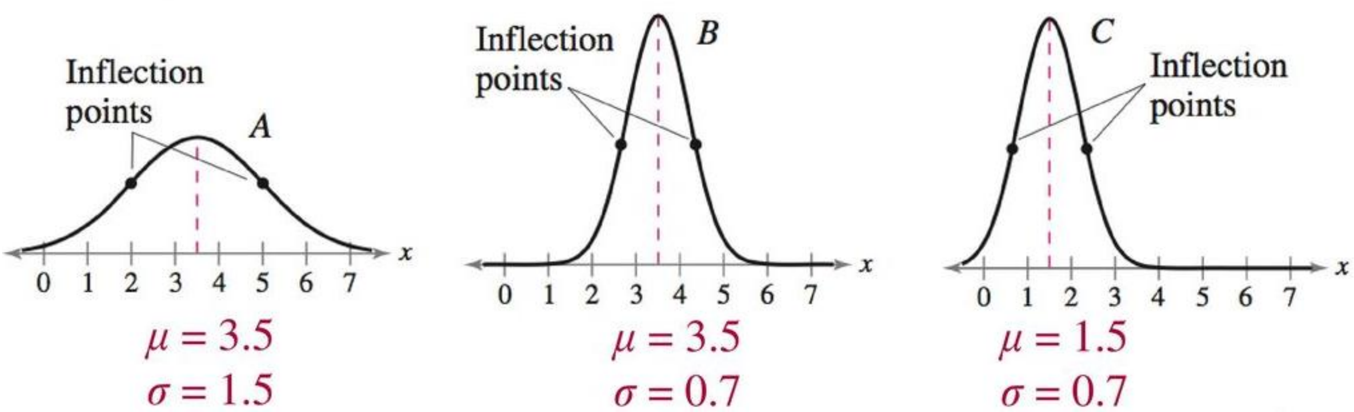
When $N = 100$ the function is already much narrower:



Plot of the function $t(m)$ for 100 spins



- A normal distribution can have any mean and any positive standard deviation.
- The mean gives the location of the line of symmetry.
- The standard deviation describes the spread of the data.



sample variance

17 15 23 7 9 13

observation x	mean $\overline{x}$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
17	14	3	9
15	14	1	1
23	14	9	81
7	14	-7	49
9	14	-5	25
13	14	-1	1
84		0	166

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}$$

sample variance

$$\sigma^2 = \frac{166}{5} = 33.2$$

sample standard deviation

$$\sigma = 5.76$$

دالة توزيع جاوس (التوزيع الطبيعي) Gaussian Distribution Function

نتناول في هذا البند اشتقاق الصيغة الرياضية لكثافة دالة الإحتمال في التوزيع الطبيعي ، وذلك بإستخدام النتائج السابقة .

لنفرض ان اجراء تجربة عشوائية يتم بعدد كبير من المرات ، اي $N \gg 1$ ، لدرجة تجعل $\bar{n}_1$ اكبر من الواحد الصحيح ، اي $\bar{n}_1 = Np \gg 1$. عند هذه الغاية limit ، يكون الإنحراف المعياري للمتغير المتقطع n_1 اكبر بكثير من الواحد الصحيح ، اي:

$\sigma = \sqrt{Npq} \gg 1$. وعليه ، يكون هناك عدة قيم محتملة للمتغير n_1. وتكون هذه القيم متشتة scattered حول قيمة $\bar{n}_1$. هذا يوحي الى ان احتمالية الحصول على تكرار n_1 لا تتغير بشكل ملموس عند الإنتقال من اي قيمة محتملة للمتغير n_1 الى قيمة مجاورة لها ، اي ان

$$\frac{|P_N(n_1+1) - P_N(n_1)|}{P_N(n_1)} \ll 1.$$

وفي هذه الحالة ، من الممكن اعتبار ان هذه الإحتمالية تكون على هيئة دالة متصلة (smooth) للمتغير المتقطع n_1 .

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}\right]$$

The mean and the location of the maximum coincide.

$$\langle x \rangle = x_o = x_{max}$$

The variance is given by the second central moment.

$$\begin{aligned}
\left\langle (x-x_o)^2 \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_o)^2 \exp\left[-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{\pi}[2\sigma^2]^{3/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{\pi}\sqrt{2\sigma^2}\sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\langle n \rangle = pN$$

$$\sigma^2 = p(1-p)N$$

A Gaussian function with this mean and variance gives a good approximation to the binomial distribution for sufficiently large n and N.

$$P(n|N) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)N}} \exp\left[-\frac{(n-pN)^2}{2p(1-p)N}\right]$$