الميكانيك الإحصائي

statistical Mechanics Phys 409

Lecture 1

Dr. Hashim M. Jabbar

اساسيات الميكانيكا الإحصائية

The Fundamentals of Statistical Mechanics

علم الميكانيكا الإحصائية هو فن تحويل القوانين المجهرية (Microscopic Laws) في الفيزياء الى طبيعة وصفية في المقياس العياني (Macroscopic scale) ، و يتم ذلك بإستخدام نظريات الإحصاء (نظرية الإحتمالات والقيم المتوسطة للكميات الفيزيائية) في دراسة التجمعات (الطواقم - Ensembles) المحتوية على اعداد كبيرة جدا من الجسيمات (ذرات او جزيئات) . وبعبارة اخرى، تشكل الميكانيكا الإحصائية اطارا يربط بين الخواص المجهرية للجزيئات مع الخواص العيانية للمواد التي تتألف من هذه الجزيئات ، مما يعطينا فكرة عن اصل خواص هذه المواد المشاهدة في حياتنا اليومية. ويهتم هذا العلم بخصائص المادة في حالة التوازن ويهدف الى اشتقاق جميع خصائص الحالة العيانية لجزيئات النظام من قوانين الديناميكا الجزئية

في القرن التاسع عشر الميلادي ، بدأت دراسة الأنظمة العيانية (غاز محصور في وعاء مغلق) مما ادى الى اكتشاف قوانين رياضية تحكم سلوك هذه الأنظمة ، وهذه القوانين اسست علم الثيرموديناميكا (التحريك الحراري) . وفي النصف الثاني من هذا القرن، اكتشفت النظريات الذرية للمواد ، مما ادى الى الحصول على مفاهيم ذرية شكلت وجهات نظر مجهرية للأنظمة الفيزيائية، وبالتالي بدأ تطوير نهج جديد في الفيزياء يتعامل مع هذه الأنظمة ذات الجسيمات الكبيرة. وبعبارة ادق ، يمكن القول ان هذا النهج الذري (Atomic approach) لمسائل الأنظمة العيانية بدأ من خلال دراسة النظرية الحركية للغازات المخففة (dilute gases) على يد زمرة من العلماء: كلاوسيوس ، ماكسويل ، وبولتزمان. حيث، اكتشف ماكسويل (1859) قوانين تحدد التوزيع الرياضي لسرع جسيمات الغاز المثالي . بينما وضع بولتزمان معادلة ، التي نتناول شرحها في الفصل الثالث ، عرفت بإسمه (1872). اما الصورة الحديثة لهذه النظرية ، فقد تم تطويرها على يد العلماء شبمان (Chapman) و انسكوج (Enskog) خلال الفترة (1916-1917) .

ويمكن القول ، ان معظم منهاج الميكانيكا الإحصائية التقليدية (الذي يستخدم قوانين الميكانيكا الكلاسيكية) قد تم تطويره على يد بولتزمان (1872) ، ثم من خلفه جبس (Gibbs) في عام 1902 . وفيما بعد، ساهم تطور نظريات ميكانيكا الكم في عدة تغييرات للهياكل الأساسية لنظريات هذا المنهاج وعرفت فيما بعد الميكانيكا الإحصائية الكمية .

لماذا نحتاج الى دراسة الميكانيكا الإحصائية ؟

عند دراسة فروع الفيزياء المختلفة ، نحتاج الى وضع قوانين (معادلات) لوصف الأنظمة الفيزيائية المطلوب دراستها وتحليلها ، ويتم ذلك عن طريق حل هذه المعادلات ، اما بشكل دقيق (exact) او بشكل تقريبي (none exact) . لنفرض اننا نريد دراسة سلوك نظام فيزيائي (غاز في وعاء مغلق) ، من المعلوم ان المول الواحد من المادة ، تحت الظروف المعيارية ، يحوي على عدد افوجادرو (Avogadro) من الجزيئات ، $N_A = 6 \times 10^{23}$ جزيء . اي نحن بحاجة الى كتابة 10^{23} معادلة مع الشروط الإبتدائية لوصف هذا النظام ، وهذا يجعل من الصعب جدا حل هذه المعادلات بالطرق الرياضية العادية وتحديد حالة كل جزيء . وعليه ، يكون من الأسهل استبدال عدد درجات الحرية للنظام $(3N_A)$ بكميات فيزيائية محدودة والتي تحدد الخواص الثيرموديناميكية للنظام (الحجم ، الحرارة ، الضغط ، والسعة الحرارية) . وبالتالي ، يمكن دراسة معدل (Average) حركة الجسيمات في هذا النظام بإستخدام الخصائص الإحصائية لهذه الجسيمات .

المفاهيم الأساسية في الميكانيكا الإحصائية

Basic Concepts in statistical Mechanics

- **حالة النظام الفيزيائي Physical system state**

النظام الفيزيائي هو مصطلح يطلق على اي كمية من المادة (صلب، سائل ، غاز) التي تحدد خواصها بشكل وحيد وكامل بتعيين محددات او معاملات (Parameters) عيانية (اي يمكن ملاحظتها بالحواس الملموسة). وكمثال على ذلك الغاز المحصور في وعاء ، حيث تكون المادة (جسيمات الغاز) محدودة بجدران فيزيائية (جدران الوعاء) عن المحيط الخارجي .

يمكن تصنيف الأنظمة الفيزيائية ، وفقا لتفاعل هذه المادة مع المحيط الى ما يلي:

- النظام المعزول Isolated System : هو النظام الذي لا يتفاعل مع المحيط ، وذلك عندما تكون جدران الوعاء غير منفذة لأي شكل من الطاقة او المادة . وفي هذه الحالة ، تكون الطاقة الكلية E ، عدد الجسيمات N ، والحجم V لهذا النظام كميات محفوظة conserved . ويمكن استخدام هذه الكميات لتمييز ووصف حالة النظام العيانية .
- النظام المغلق closed system : هو النظام الذي يسمح بتبادل الطاقة مع محيطه الخارجي ولكن بدون تبادل المادة ، وفي هذه الحالة تكون الطاقة الكلية للنظام غير محفوظة (متتغيرة مع الزمن). وفي حالة وصول هذا النظام الى وضع التوازن مع المحيط ، يمكن افتراض ان معدل قيم هذه الطاقة

يرتبط مع درجة حرارة هذا النظام T ، ولذلك يمكن وصف حالة النظام العيانية بالمحددات التالية : (N, V, T) .

- النظام المفتوح Open system: هو النظام الذي يسمح بتبادل الطاقة والمادة مع محيطه . وعليه ، تكون كلا من E, N كميات غير محفوظة . وعندما يكون النظام في حالة توازن مع محيطه ، يمكن الإفتراض ان معدل الطاقة وعدد الجسيمات في هذا النظام مرتبطة مع درجة الحرارة والجهد الكيماوي(μ) chemical potential (كما سيرد شرحه في الفصول اللاحقة).

في دراسة الميكانيكا الإحصائية ، يمكن ان نصنف الأنظمة الفيزيائية ، حسب الحيز الذي تشغله (size) ، الى نوعين هما:

- نظام مجهري (Microscopic system) ، حيث تكون ابعاد هذا النظام من رتبة الأبعاد الذرية (10A) .
- نظام عياني او جهري (Macroscopic system) , حيث تكون ابعاده اكبر من الميكرون (1μ) .

- **معادلة حالة النظام System State Equation**

تسمى الكميات العيانية التي تصف او تحدد بصورة تامة حالة النظام الفيزيائي **كميات الحالة** state quantities. اضافة الى الكميات التي وردت سابقا (E, V, N, T, P, μ) ، يمكن اعتبار الشحنة ، العزم المغناطيسي ، معامل ألإنكسار ، واللزوجة كميات حالة . وهناك دالة حالة تعبر عن ميل النظام نحو الفوضوية disorder number ، وتدعى هذه الدالة ألإنتروبيا (Entropy) ويمز لها بالرمز (S). من جهة اخرى ، لا تعتبر الخواص المجهرية للنظام ، مثل موقع وكمية حركة الجسيمات في النظام ، من كميات الحالة.

تصنف كميات الحالة الى نوعين هما:

- كميات شاملة Extensive وهي الكميات التي تتناسب مع كمية مادة النظام قيد الدراسة ، مثل حجم النظام V ، عدد الجسيمات N. كذلك مفهوم الإنتروبيا S يعتبر من الكميات الشاملة لكونه مرتبطا مع مع عدد الحلات المجهرية للنظام (كما سيرد شرحه لاحقا).
- كميات مكثفة Intensive وهي الكميات التي لا تعتمد على كمية مادة النظام ، مثل الضغط P ، درجة الحرارة T.

عند اعتبار كثافة الطاقة الحجمية للنظام (E/V) تصبح هذه الكمية كمية مكثفة ، وبالمثل عدد الجسيمات في وحدة الحجم (N/V) .

اما معادلة الحالة state equation فهي دالة رياضية تربط بين محددات(معاملات) النظام العيانية ، ويعبر عنها رياضيا كالتالي: f(P,V,T)= 0 ، وهذه الدالة تعطى، بالإفتراض ، كجزء من وصف او تحديد النظام. كمثال على ذلك ، معادلة الحالة للغاز المثالي (نظام ديناميكي حراري) تعطى معادلة الحالة بواسطة قانون بويل (Boyle) عند ثبوت درجة الحرارة على الصورة التالية : PV/ N = كمية ثابتة ، ويعتمد مقدار الكمية الثابتة على التدريج التجريبي لدرجة الحرارة المستخدم . ان معادلة الحالة للغاز المثالي تحدد او تعرف تدريج درجة الحرارة ، درجة حرارة الغاز المثالي T ، بالصورة الرياضية التالية: $PV = NK_BT$، وهذه نتيجة احصائية ، حيث تربط معدل الضغط مع معدل الحجم ومع معدل الحرارة ، اما الثابت $K_B = 1.38 \times 10^{-16} erg/deg.$ ، يعرف بثابت بولتزمان .

- **الحالات المجهرية Microstates**

تعرف الحالة المجهرية بأنها حالة النظام الذي تكون فيه معاملاته الخاصة بقوامه (constituent الجسيمات) محددة . هناك عدة حالات مجهرية لكل حالة من النظام وتكون معينة بدلالة المتغيرات العيانية $(E, N, V, \dots)$ ، كما يوجد عدة محددات لكل حالة. وعند دراسة الحالة المجهرية، تتبلور وجهتا نظر وهما : النهج الميكانيكي الكلاسيكي ، حيث نعتبر مكان وكمية الحركة لكل جسيم في النظام ، مما يجعل عدد درجات الحرية للنظام المكون من N جسيم مساو الى $6N$. اما النهج الآخر فهو النهج الميكانبكي الكمي، حيث نعبر عن مستويات الطاقة وحالات جسيمات النظام بأرقام كمية Quantum numbers وذلك لتحديد معاملات الحالة المجهرية .

- **الحالة العيانية Macro state**

تعرف هذه الحالة بأنها حالة النظام التي يحدد فيها توزيع الجسيمات على مستويات الطاقة energy levels. اي ان الحالة العيانية تشتمل على مستويات الطاقة وعلى عدد الجسيمات ذات الطاقة الخاصة . حيث ان هناك عدة طرق لترتيب المتغيرات المجهرية في النظام ، لذلك يكون هناك لكل حالة عيانية عدد من الحالات المجهرية . كما ان هناك نزعة (ميل) لوصول النظام نحو التوازن equilibrium ، اي وجود النظام في الحالة العيانية التي تكون اكثر ثباتا (استقرارا) . ويمكن الإعتماد على **الإفتراض البديهي** priori assumption الذي ينص على ان الحالة العيانية هي الحالة التي تحوي على الأغلبية الساحقة من الحالات المجهرية . وهذا يعزز النهج الإحتمالي في الفيزياء .

الفرضيات الأساسية في الميكانيكا الإحصائية

Basic Assumption in statistical Mechanics

تعتمد نظريات الميكانيكا الإحصائية على المبادئ الأساسية التالية:

1) الطاقم لإحصائي statistical ensemble ، هو مجموعة كل الأنظمة الفيزيائية التي لها نفس المتغيرات المحددة للحالة العيانية ، وتكون نتيجة المشاهدة لقياس الحالة العيانية هي المعدل للمتغير على كل هذا الطاقم .

2) تكون جميع الحالات المجهرية المتوفرة في النظام المعزول والمتزن لها نفس الإحتمالية (متساوية الإحتمال) equally likely .

3) اذا كان عدد الحالات المجهرية الكلية للنظام ذي الطاقة الثابتة E تساوي Ω (E) ، فإن احتمالية تواجد هذا النظام في اي حالة معطاة تكون كالتالي : $P(n) = 1/\Omega(E)$ ، بينما تكون احتمالية ان يكون النظام بطاقة لا تساوي هذه الطاقة صفرا . ويعرف هذا التوزيع الإحتمالي **بالطاقم المجهري القانوني** (المشرع) micro canonical ensemble .

دوال الإحتمال Probability Functions

ندرس في هذا الفصل ملخصا لقوانين نظرية الإحتمال والتي يحتاجها الطالب في دراسته لعلم الميكانيكا الإحصائية.

تعريف الإحتمالية Definition of Probability

في علم الإحصاء الرياضي ، تعرف التجربة العشوائية على انها كل اجراء نعلم مسبقا جميع النتائج الممكنة له ، وان كنا لا نستطيع ان نتنبأ اي هذه النتائج سيتحقق فعلا في محاولة معينة . من الأمثلة على التجارب العشوائية : رمي حجر النرد ، رمي قطعة نقود ...

تسمى مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما فراغ (فضاء) العينة ويرمز له بالرمز Ω ، فمثلا في تجربة رمي حجر النرد يكون الفراغ العينة كالتالي:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. ويعرف الحدث (event) او الحادثة بإنه اي مجموعة جزئية من فراغ العينة . فمثلا حادثة الحصول على الأعداد الفردية عند رمي حجر النرد تمثل بالمجموعة التالية : $A=\{1,3,5\}$.

اذا كان فراغ العينة منتهي ويحتوي على n عنصرا ، اي $\Omega = \left\{a_1, a_2, \dots \quad a_n\right\}$ ، فإنه يمكن تعيين عدد حقيقي $P(a_i)$ للعنصر a_i يسمى احتمال هذا العنصر على ان يحقق الشرطين التاليين:

(1 $\quad 0 \le P(a_i) \le 1$

(2 $\quad \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 1$.

ويعرف احتمال اي حادثة على انه مجموع احتمالات العناصر المكونة لها. فمثلا عند رمي حجر النرد مرة واحدة ، فإن $P(1) = 1/6$ ، $P(2)=1/6$ ، ... وهكذا .

اما اذا كان الفضاء العينة لتجربة ما ليس اعدادا في كل الحالات ، فإنه يمكن تخصيص عدد معين لكل ناتج ، بحيث تكون قيمته متغيرة في كل حالة ، ويسمى هذا العدد متغيرا عشوائيا Random Variable . يرمز لهذا المتغير العشوائي X ، وتصنف المتغيرات العشوائية الى نوعين هما:

(a) **المتغيرات العشوائية المتقطعة discrete** ، حيث تكون القيم الممكنة لهذه المتغيرات مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية.

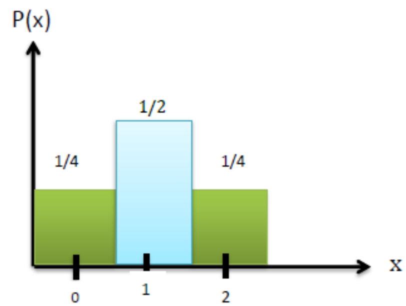
(b) **المتغيرات العشوائية المتصلة continuous** ، حيث يمكن تمثيل قيم المتغير بفترة interval من الأعداد الحقيقية.

▪ Probability function دالة الإحتمال

اذا كانت التجربة العشوائية رمي قطعتي نقود مرة واحدة ، واردنا معرفة عدد القطع التي تظهر عليها الصورة ، فإن هذا العدد (عدد مرات ظهور الصورة) اما ان يكون صفرا (اي لا تظهر الصورة) واما ان يكون 1 واما ان يكون 2 . فإذا رمزنا لظهور الصورة بالرمز x ، كمتغير عشوائي ، تكون له القيم (نتائج التجربة) التالية : $\{ x = 0, 1, 2 \}$. يكون الفراغ العينة لهذه التجربة مجموعة الأزواج المرتبة التالية :

Ω = {(ص،ص)،(ص،ك)، (ك،ص) ، (ك،ك) } ، حيث ص : تمثل ظهور الصورة عند الرمي ، بينما ك : تمثل ظهور الكتابة . اي انه يوجد 4 حالات من النتائج الممكنة لهذه التجربة.

ويمكن تلخيص نتائج هذه التجربة كما في الجدول التالي :



x	0	1	2
$f(x)$	1/4	2/4	1/4

(Tail) كتابة (Head) طرة

من الجدول نجد ان احتمال عدم الحصول على صورة ($x = 0$) يساوي :

1/4 ، او $f(0) = 1/4$ ، وهكذا.... ، اي ان دالة الإحتمال لمتغير عشوائي متقطع X عند اي نقطة x هي:

$$f(x) = P(X = x)$$

نتناول اولا دلراسة دوال الإحتمال للمتغيرات العشوائية المتقطعة ، ثم للمتغيرات المتصلة .

- **دالة التوزيع Distribution Function**

أحيانا يكون المطلوب ان تكون X اقل من قيمة معينة او تساويها، فمثلا اذا اردنا ايجاد احتمال الحصول على عدد من الصور في المثال السابق (رمي قطعتي نقد مرة واحدة) اقل او يساوي 1، هذا يعني احتمال ان

يكون عدد الصور اما يساوي 1 واما ان يساوي صفرا ، وحيث ان العمليتين منفصلتان فإننا نجمع الإحتمالين كالتالي:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 3/4$$

رياضيا ، نعبر عن ذلك بما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

وتسمى الدالة $F(x)$ **دالة التوزيع** . ويمكن تحويل الجدول السابق على النحو التالي:

x	0	1	2
$F(x)=P(X \leq x)$	1/4	3/4	1

اما العلاقة بين دالة الإحتمال ودالة التوزيع للمتغير المتقطع يمكن ان يعبر عنها كالتالي:

$$F(x_i) = \sum_{x=x_0}^{x_i} f(x)$$

اي ان دالة التوزيع عند اي نقطة تساوي مجموع الإحتمالات من اول المدى (اول نقطة) الى النقطة المطلوبة . ونلاحظ ان دالة التوزيع تنحصر قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح ، وهي دالة متزايدة.

اما في حالة المتغيرات العشوائية **المتصلة** فإنه لا يوجد احتمال عند نقطة (او قيمة واحدة محددة ، وعليه يتم حساب الإحتمالات للمتغيرات المتصلة عن طريق المساحات تحت منحنى الدالة .وحيث انه لا توجد مساحة عند نقطة فإن الإحتمال في هذه الحالة يساوي صفرا. لذلك يجب ان تكون هناك مساحة محصورة بين نقطتين ، من نقطة ابتدائية الى نهاية المدى للمتغير المتصل ، لحساب الإحتمالات . وعليه ، يمكن ان نعرف مفهوم جديد لدالة الإحتمال كالتالي:

$$f_c(x) = \lim_{\Delta x \to 0} P\,(x < X \leq x + \Delta x)/\Delta x$$

وتسمى هذه الدالة **دالة كثافة الإحتمال** ***probability density function*** ، وهذه الدالة تحقق الشرطين التاليين:

$$f_c(x) \geq 0 \qquad ; \qquad \int_a^b f_c(x)dx = 1$$

حيث قيمة المتغير المتصل محصورة بين القيمتين a, b . كما نلاحظ ان الشرط الثاني كان يقابله في حالة المتغير المتقطع ان مجموع الإحتمالات يساوي الواحد الصحيح .

وفي كلا النوعين من المتغيرات العشوائية (المتقطعة والمتصلة) ، تبقى دالة التوزيع كما هي ، اي

$$F_c(x) = P(X \leq x)$$

ومن خصائص دالة التوزيع للمتغير المتصل ما يلي:

(1) $F_c(a) = 0 \ , \quad F_c(b) = 1$

(2) اذا كانت $a \leq X \leq b$ ، فإن

$$\mathrm{P(a < X \leq b) = F_{\mathit{c}}(b) - F_{\mathit{c}}(a)}$$

- **العلاقة بين دالة كثافة الإحتمال ودالة التوزيع**

في حالة المتغيرات المتصلة ، تكون العلاقة بين هاتين الدالتين على النحو التالي:

$$f_c(x) = \frac{dF_c}{dx}$$

اي ان **دالة كثافة الإحتمال ما هي الا المشتقة الأولى لدالة التوزيع .** ويمكن اعادة كتابة هذه العلاقة على الصورة التالية:

$$\mathrm{F}_c(x_0) = \int_a^{x_0} f_c(x)dx$$

حيث a تمثل قيمة البداية للمتغير المتصل X، اما x_0 تمثل النقطة المطلوب ايجاد دالة التوزيع عندها .

وهذه العلاقة تعطي دالة التوزيع بمعلومية دالة كثافة الإحتمال ولا تتغير اذا كانت البداية (∞-) .

مثال (1)

اذا كان X متغيرا متصلا في المدى $0 < X \leq 3$ وكانت دالة التوزيع له كالتالي:

$$F_c(x) = kx^3$$

الحل

بأخذ المشتقة الأولى لدالة التوزيع نحصل على ما يلي

$$f_c(x) = 3kx^2$$

بإستخدام خاصية دالة التوزيع :

$$\mathrm{F}_c(3) = k(3)^3 = 1 \rightarrow k = 1/27$$

اذن ،

$$f_c(x) = 3\left(\frac{1}{27}\right)x^2 = x^2/9$$

مثال (2)

اذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا في المدى $0 \leq X \leq 4$ وكانت دالة كثافة الإحتمال له كالتالي:

$$f_c(x) = k(x^2 + 2x + 2)$$

جد ما يلي: (a) دالة التوزيع $F_c(x)$

(b) $F_c(2)$

(c) $P(1 < x \leq 3)$

الحل:

نستخدم تكامل دالة كثافة الإحتمال لنحصل على مقدار الثابت k

$$\int_0^4 f_c(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^4 k(x^2 + 2x + 2)dx = 1$$

$$k\,(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)\Big]_0^4 = 1$$

$$k = 3/136$$

وعليه،

$$F_c(x) = \int_0^4 \frac{3}{136}(x^2+2x+2)\, dx$$

$$F_c(x) = \frac{3}{136}(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)\Big]_0^x$$

$$F_c(x) = \frac{3}{136}(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x)$$

(b) بالتعويض بقيمة $x = 2$ ، نجد ان

$$F_c(2) = 4/17$$

(c) $$P(1 < x \leq 3) = F_c(3) - F_c(1) = \frac{72}{136} - \frac{10}{136} = \frac{62}{136}$$

تطبيق نتائج نظرية الإحتمالات في الميكانيكا الإحصائية

بالرجوع الى الميكانيكا الإحصائية ، لنفرض اننا نتعامل مع عدد كبير جدا من الأنظمة الفيزيائية المتشابهة ، ويسمى هذا التجمع من هذه الأنظمة **بالطاقم ألإحصائي** statistical ensemble ، ونرمز له بالرمز $\sum$. لتكن التجربة العشوائية مراقبة هذا الطاقم ، واذا اردنا معرفة احتمالية الحصول على النتيجة X، فإنه من تعريف دالة ألإحتمال، نجد ان

$$P(X) = \lim_{\Omega(\Sigma)\to\infty} \frac{\Omega(X)}{\Omega(\Sigma)}$$

اي ان إحتمالية الحصول على هذه النتيجة تساوي النسبة بين عدد الأنظمة في الطاقم التي تظهرفيها النتيجة X الى العدد الكلي لأنظمة هذا الطاقم .

- **الإحتمالات المترابطة Combining Probabilities**

- لنفرض ان نتيجتين منفصلتين في تجربة عشوائية هما : X, Y ، وكانت دالتي احتمالهما P(X) , P(Y) على الترتيب . فإن دالة احتمالية الحصول على النتيجة X <u>**او**</u> Y ، يرمز لها بالرمز P(XUY)وتعرف كالتالي:

$$\mathrm{P(XUY)} = \lim_{\Omega(\Sigma)\to\infty} \frac{\Omega(X \cup Y)}{\Omega(\Sigma)}$$

حيث $\Omega(X \cup Y)$ = عدد الأنظمة التي تظهر فيها النتيجة X أو النتيجة Y. اذا كانت الحادثتين متنافيتان mutually exclusive events ، بمعنى ان وقوع احداهما يمنع او ينفي وقوع الأخرى . وفي هذه الحالة

فإن $X \cap Y = \Phi$. وعليه

$$\Omega(X,Y) = \Omega(X) + \Omega(Y)$$

او

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

لنفرض اننا اخذنا نتيجة مشاهدة تجربة عشوائية على الطاقم وكانت النتيجة في الحالة الأولى هي X، ثم اخذنا حالة ثانية بشكل مستقل وكانت النتيجة هي Y ، اي ان النتيجتين مستقلتان بمعنى احتمال حدوث النتيجة X لا يتأثر بحدوث النتيجة Y. تكون احتمالية الحصول على النتيجة X في الحالة ألأولى و (**and**) احتمال الحصول على النتيجة في الحالة الثانية Y، رياضيا يعبر عن ذلك كالتالي : $P(X \cap Y)$ ، ويعطى بالعلاقة التالية :

$$P(X \cap Y) = P(X).P(Y)$$

- **Discrete probability distribution التوزيعات الإحتمالية المتقطعة**

نتناول دراسة اثنين من التوزيعات الإحتمالية المتقطعة وهما توزيع بيرنوللي Bernoulle's Trial و توزيع ذي الحدين Binomial distribution .

(a) توزيع بيرنوللي

يدرس هذا التوزيع التجربة العشوائية التي لها نتيجتين اثنتين فقط ، مثل تجربة رصد نتيجة طالب في الإختبار (نجاح او رسوب) ، تجربة تسجيل جنس مولود(ذكر او انثى) ، او تجربة فحص قطعة من انتاج مصنع (سليمة او تالفة). في هذه التجارب يكون الفراغ العينة مكون من عنصرين فقط ، اي $\Omega = \{0,1\}$. لنفرض ان احتمال النجاح (الحصول على النتيجة الأولى) هي $P(X = 1) = p$ ، واحتمال الفشل (الحصول على النتيجة الثانية) هي $P(X = 0) = q$. بما ان مجموع الإحتمالات يساوي 1 ، لذلك تكون : $q = 1 - p$. وبصورة عامة يمكن التعبير عن دالة احتمال المتغير العشوائي X عند القيمة x ، عند اجراء التجربة (المحاولة) مرة واحدة كالتالي:

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & x \neq 0,1 \end{cases}$$

ويسمى هذا التوزيع نتوزيع بيرنوللي والمحدد (معلم) هو p .

(b) توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

لنفرض ان التجربة العشوائية تتكون من تكرار محاولة بيرنوللي عدد من المرات وتحت الشروط التالية :

(1) عدد المحاولات N ، (2) المحاولات مستقلة ، (3) احتمال النجاح $p = P(1)$ يكون ثابتا لجميع المحاولات. تكون مجموعة القيم للمتغير العشوائي هي $\{0,1,2,\ldots\ldots N\}$.

$$p+q=1 \rightarrow q=1-p$$

وهذه المعادلة تسمى شرط المعايرة Normalization Condition وهي تعني ان مجموع إحتمالات كل نتائج التجربة العشوائية يساوي **الواحد الصحيح**.

لنفرض اننا اجرينا التجربة العشوائية N مرة. ولنفرض ان المتغير العشوائي X على انه عدد مرات النجاح عند تكرار محاولة بيرنوللي وفق الشروط السابقة ، تكون دالة الإحتمال للمتغير العشوائي عند n_1 $X=x=$: على النحو التالي:

$$P_N(X=n_1)=\binom{N}{n_1}p^{n_1}q^{N-n_1} \;\; ; \;\; q=1-p \;\; ; \;\; n_1=\{0,1,2,\ldots\ldots N\}$$

حيث $\binom{N}{n_1}$ = عدد الطرق المختلفة لترتيب N من الأشياء غير المميزة التي تتكون من مجموعتين مميزتين عدد عناصرهما n_1 و $N-n_1$. ويعطى عدد هذه الطرق كالتالي :

$$\binom{N}{n_1}=\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}$$

كما تسمى دالة ألإحتمال المعطاة في معادلة (2.7) بدالة توزيع ذي الحدين Binomial Distribution ، لأن مفكوك القوس ذو الحدين والذي اسه N يعطى كالتالي:

$$(p+q)^N = \sum_{n_1=0}^{N}\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\,(p)^{n_1}(q)^{N-n_1}$$

بأخذ التجميع على معادلة (2.7) نحصل على ما يلي :

$$\sum_{n_1=0}^{N} P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}(p)^{n_1}(q)^{N-n_1} = (p+q)^N$$
$$= 1$$

حيث : $p + q = 1$

مثال(3) :

عند رمي 6 قطع من النقود في آن واحد ، جد احتمال الحصول على نتيجة صورتين في هذه التجربة ؟

الحل:

$p = q = ½$, $n_1=2$, $N=6$ ، بإستخدام معادلة (2.7) نحصل على التالي :

$$P_6(2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$