أمثلة ومسائل-2

(2-1) أمثلـــــة

مثال (7): أذا فرضنا ان المتجه $\vec{A}$ دالة متجهية مستمرة وكذلك مشتقاتها فأثبت ان:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$$

الحل: نكتب كلا من المتجه $\vec{A}$ والمؤثر التفاضلي ∇ بدلالة مركباتهما وبالشكل التالي:

$$\vec{A}=\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z$$

$$\nabla=\hat{\imath}\nabla_x+\hat{\jmath}\nabla_y+\hat{k}\nabla_z$$

في البداية نجري عملية الضرب الاتجاهي بين المتجه $\vec{A}$ والمؤثر التفاضلي ∇ كما يلي :

$$(\nabla\times\vec{A})=\hat{\imath}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{\jmath}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

ثم نجري عملية الضرب العددي بين والمؤثر التفاضلي ∇ ونتيجة الضرب الاتجاهي $(\nabla\times\vec{A})$ لنحصل على:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\therefore\ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)$$

وبما ان دالة المتجه $\vec{A}$ ومشتقاتها مستمرة فأن كل حد من حدود المعادلة الاخيرة يساوي صفراً، أي ان:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}$$

وعليه فأن :

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0+0+0=0$$

مثال (8): أختزل التكامل الخطي $\int \vec{A}\cdot d\vec{l}$ بين النقطتين (0,0,0) و (1,1,1) الواقعتين على المنحني الممثل بالمعادلة:

$$\vec{l} = \hat{\imath}t - \hat{\jmath}t^2 + \hat{k}t^3$$

علما بأن المتجه $\vec{A}$ يعطى بالمعادلة التالية:

$$\vec{A} = \hat{\imath}xy - \hat{\jmath}z^2 + \hat{k}xyz$$

الحل:

$$\int_{0,0,0}^{1,1,1} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{0,0,0}^{1,1,1} \left(\hat{\imath}xy - \hat{\jmath}z^2 + \hat{k}xyz\right)\cdot\left(\hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz\right)$$

$$= \int_{0,0,0}^{1,1,1} (xy\,dx - z^2dy + xyz\,dz)$$

وبما ان t هو المتجه الموضعي لجميع النقاط الواقعة على المنحني تكون احداثيات اي نقطة بدلالة المتغير t كالأتي:

$$x = t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = t^3$$

وعليه فأن :

$$xy = t\,t^{\,2} = t^{\,3} \equiv x^{\,3}$$

$$z^2 = (t^{\,3})^2 = t^{\,6} \equiv y^{\,3}$$

$$xyz = t\,t^{\,2}t^{\,3} = t^{\,6} \equiv z^2$$

وبالتالي يمكننا الحصول على نتيجة التكامل بسهولة وكما يلي:

$$\therefore \int_{0,0,0}^{1,1,1} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 x^3dx - \int_0^1 y^3dx + \int_0^1 z^2dx$$

$$\int_{0,0,0}^{1,1,1} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

واجب بيتي (1): استعن بمبرهنة كاوس لحساب الشحنة الكلية داخل مكعب طول ضلعه 2 m احدى زواياه في نقطة الاصل واضلاعه موازية للمحاور المتعامدة x , y , z ، علما بأن متجه المجال الكهربائي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{E} = \hat{\imath}\, 2\, a\, x^2$$

حيث ان a يمثل كمية ثابتة.

استخدم قانون كاوس اولا:

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_o}$$

ثم استخدم مبرهنة كاوس التالية:

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\tau (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{q}{\epsilon_o}$$

واجب بيتي (2): جد تباعد والتفاف المتجه التالي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}(x^2 + y^2) + \hat{\jmath}(y^2 + zx) + \hat{k}(z^2 + xy)$$
