(6-1) الاحداثيات المعممة

أضافة الى الاحداثيات المتعامدة x, y, z هنالك احداثيات اخرى مثل الاحداثيات الاسطوانية والكروية. سيكون التعامل مع هذه الاحداثيات اقل تعقيداً بعد معرفة الاحداثيات المعممة.

لنفرض ان لدينا الاحداثيات العامة وهي $q1, q2, q3$ وان وحداتها الاتجاهية هي $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ على الترتيب. ولنفرض ايضا ان A يمثل متجهاً يمتلك المركبات التالية A_1, A_2, A_3 في الاتجاهات الثلاثة اعلاه. وعليه يمكننا كتابة المعالات العامة للعمليات الرياضية وهي الانحدار والتباعد والالتفاف ومؤثر لابلاس للكمية العددية ϕ والمتجه $\vec{A}$ وكما يلي:

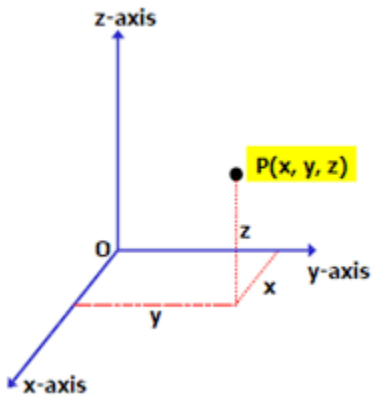
$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\hat{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\hat{u}_3$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right\}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right\}$$

1- الاحداثيات المتعامـــــدة

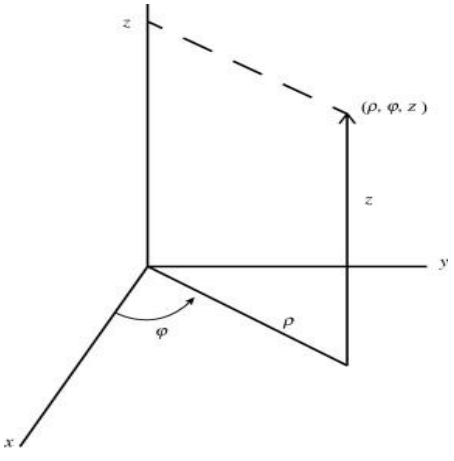


موقع نقطة في الاحداثيات المتعامدة

$\hat{u}_1 = \hat{\imath}$	$h_1 = 1$	$q_1 = x$
$\hat{u}_2 = \hat{\jmath}$	$h_2 = 1$	$q_2 = y$
$\hat{u}_3 = \hat{k}$	$h_3 = 1$	$q_3 = z$

$$d\tau = dx\, dy\, dz$$

2- الاحداثيات الاسطوانية



موقع النقطة P

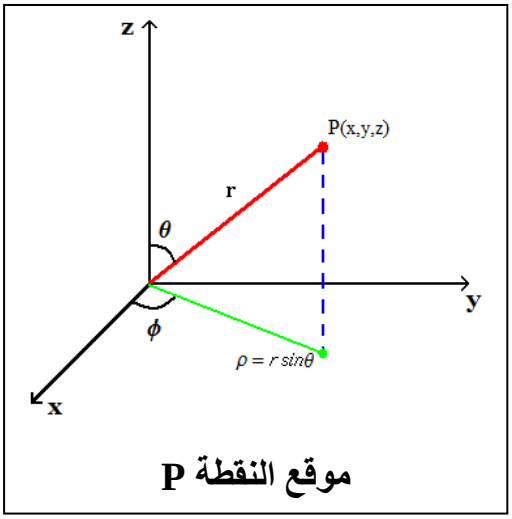
$\hat{u}_1 = \hat{\rho}$	$h_1 = 1$	$q_1 = \rho$
$\hat{u}_2 = \hat{\varphi}$	$h_2 = \rho$	$q_2 = \varphi$
$\hat{u}_3 = \hat{z}$	$h_3 = 1$	$q_3 = z$

$$x = \rho \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\varphi$$

$$z = z$$

$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$



موقع النقطة P

$\hat{u}_1 = \hat{r}$	$h_1 = 1$	$q_1 = r$
$\hat{u}_2 = \hat{\theta}$	$h_2 = r$	$q_2 = \theta$
$\hat{u}_3 = \varphi$	$h_3 = r \sin\theta$	$q_3 = \varphi$

$$x = r\ sin\ \theta\ cos\ \varphi$$

$$y = r\ sin\ \theta\ sin\ \varphi$$

$$z = r cos\ \theta$$

$$d\tau = r^2\ sin\ \theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$