(4-1) تفاضل المتجهات

أن عملية تفاضل المتجهات تتم بنفس الطريقة التي يتم بها تفاضل أي كمية عددية.

1- الانحــــدار Gradient

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: هي مشتقة اتجاهية يقصد بها تغير الدالة باتجاه معين . اذا دخل متجه الانحدار على كمية عددية مثل الجهد $(\emptyset)$اصبح الناتج كمية متجهة :

$$\vec{\nabla}\emptyset = \vec{i}\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \emptyset}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \emptyset}{\partial z} = grad\ \emptyset$$

اي ان انحدار دالة غير متجهة ($scaler$) مثل الجهد تصبح كمية متجهة مقداره يساوي ذروة المشتقة الاتجاهية عند نقطة معينة واتجاهه يكون بنفس اتجاه ذروة المشتقة الاتجاهية عند تلك النقطة .

2- التباعــــــــــد Divergence

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج عدديا مثل

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = div\,\vec{A} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ويمثل التباعدغاية التكامل السطحي لوحدة الحجم عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان:

$$div\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{F}.\vec{n}da$$

3- الالتفـــاف Curl

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج متجها مثل

$$\vec{\nabla} x \vec{A} = curl\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} x \vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$curl\vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{n} x \vec{F} da$$

4- مـؤثـــــر لابلاس Laplace operator

وتمثل عملية مزدوجة من تباعد وانحدار مثل:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = div\ grad = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

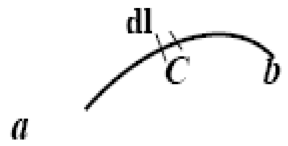
(4-1) تكــامل المتجهات

سناخذ انواع التكاملات الخطية والسطحية والحجمية.

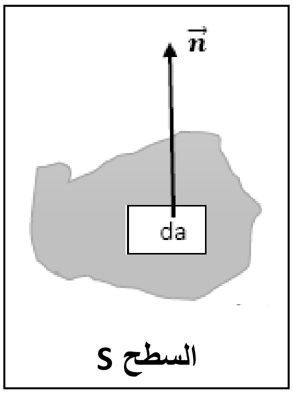
1- التكامل الخطي

وناتج التكامل كمية عددية . والتكامل هنا يعتمد على بداية ونهاية المنحني وكذلك على المنحني C.
فاذا كان المسار مفتوح اي المنحني مفتوح فيعبر عنه بالعلاقة:

$$\int_a^b \vec{A}.d\vec{\ell} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} A.\Delta\ell$$



حيث a,b تمثل بداية ونهاية المنحني على التوالي ويشير c المنحني الذي ينجز عليه التكامل الخطي . اما اذا كان المسار مغلق (منحني مغلق) فيعبر عنه بالشكل الاتي : $\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}$



2- التكامل السطحي

$$\int_S \vec{A}.\vec{n}da = \int_S \vec{A}.d\vec{S}$$

تمثل (da) مساحة صغيرة جداعلى السطح (S) الذي تنجز عليه عملية

التكامل و $\vec{n}$ وحدة متجه عمودية على da واتجاهها يحدد بقاعدة اليد اليمنى right hand rule .

اما اذا السطح مغلق فيكتب بالشكل : $\oint_S \vec{A}.\vec{n}da$

3- التكامل الحجمـــــي

وهو تكامل ثلاثي الابعاد ويعبر عنه بالصيغة الرياضية التالية:

$$\int_V \vec{A}.d\vec{V} = \int \vec{A}dxdydz = \vec{A}\int dxdydz$$

(5-1) مبرهنتي كاوس وستوك

تعتبر هاتين المبرهنتين مهمتين جدا في مجال النظرية الكهرومغناطيسية.

1- مبرهنة كاوس (نظرية التباعد)

ان تكامل تباعد متجه خلال حجم (V) يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية للمتجه على السطح الذي يضم الحجم (V) اي ان:

$$\oint_{\tau} (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau = \oint_{S} (\vec{A} \cdot d\vec{S})$$

ونلاحظ من المبرهنة اعلاه العلاقة بين التكامل السطحي والحجمي.

2- مبرهنة ستوك (نظرية الالتفاف)

وهي علاقة بين التكامل السطحي والخطي وتنص على ان :- التكامل الخطي لمتجه حل مسار مغلق يساوي تكامل المركبة العمودية لالتفاف المتجه على اي سطح محاط بالمسار، اي ان:

$$\oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{S} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

حيث أن C يمثل المسار المغلق والمحيط بالسطح S.