Chapter One الفصل الأول
Vectors المتجهات

(3-1) ضرب المتجهات

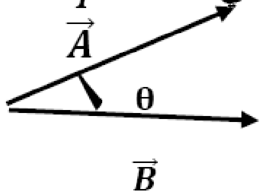
أ 1- حاصل الضرب بكمية عددية :- ويكون ناتج هذه العملية متجها ، تمتاز كل مركبة من مركباته بانها تساو؛ حاصل ضرب الكمية العددية بالمركبة المناظرة للمتجه الاصلي اي ان :-

$$\vec{C} = A\vec{B} = A\vec{B}_x + A\vec{B}_y + A\vec{B}_z \quad as \quad \vec{C}_x = A\vec{B}_x, \quad \vec{C}_y = A\vec{B}_y, \ \vec{C}_z = A\vec{B}_z$$

علما بأن A يمثل كمية عددية.

2- حاصل ضرب متجهين A &B

الضـرب العــددي Dot product : وله تسميات اخرى مثل الضرب العددي *scalar product* او الضرب الداخلي *inner product* ويكون الناتج النهائي لهذه العملية هو كمية عددية غير متجه .



$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{A}|}$$

ويكون الناتج كمية غير متجهة حيث :

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z \ and \ \vec{B} = \vec{\imath}B_x + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \ \ as \ \ \vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1, \qquad \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\jmath} = 0$$

لانه عندما $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$ اي متوازيان . وعندما تكون متعامدتان اي $\cos\theta = 0$, $\theta = 90$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}, \qquad \vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = \left|\vec{A}\right|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

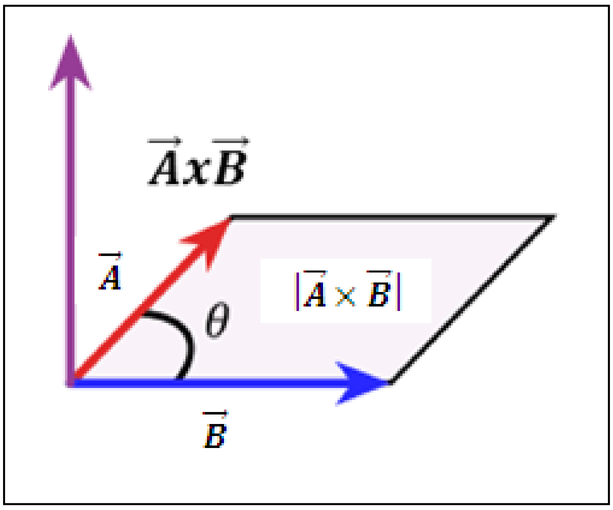
الضـرب الاتجاهي Cross product

ويكون الناتج كمية متجهة ويكتب بالشكل : $\vec{A}x\vec{B} = AB\sin\theta\,\vec{n}$

$$\vec{A}x\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{n}, \quad as\ \vec{n} = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{AB\sin\theta}$$

اي ان الناتج هو حاصل ضرب مقدار كل من المتجهين بالاخر بجيب الزاوية المحصورة بين المتجهين الاصليين ، علما ان الاتجاه يؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى .

حيث ان اتجاه $\vec{n}$ في هذه الحالة يؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى .



ويمكن اجراء الضرب الاتجاهي كما يلي :

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

حيث ان :

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}, \qquad \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

$$\theta = 0 \, , \sin\theta = 0 \, \, , then \; \vec{i}x\vec{i} = \vec{j}x\vec{j} = \vec{k}x\vec{k} = 0$$

- وعندما تكون نتيجة الضرب العددي تساوي صفر وهذا يعني بان المتجهين متعامدين:

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \; then \; \vec{A} \perp \vec{B}$$

وعليه فأن الزاوية بين المتجهين تساوي تسعون درجة.

- وعندما تكون نتيجة الضرب الاتجاهي تساوي صفر وهذا يعني بان المتجهين متوازيين:

$$if \;\; \vec{A}x\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{A} \parallel \vec{B}$$

وعليه فأن الزاوية بين المتجهين تساوي صفرا.

31- الضرب الثلاثي العددي والاتجاهي

الضـرب الثلاثي العـددي Triple scalar product

وهو كمية عددية وتحصل عملية الضرب بالصيغة التالية :

$$(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C} = (\vec{B}x\vec{C}).\vec{A} = (\vec{C}x\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = -(\vec{C}x\vec{B}).\vec{A}$$

ومن السهل التعبير عن حاصل الضرب الثلاثي للمتجهات بدلالة مركباتها المتعامدة بالشكل التالي:

$$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

وتبعا للمحدد (المصفوفة) التالي:

$$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\vec{B}.(\vec{A}x\vec{C})$$

ولاضرورة لوضع الاقواس هنا حيث ان ناتج الضرب لايتغير بالتبديل الدوري للمتجهات الثلاثة ولابتبديل موضع النقطة (.) او (x)

الضــرب الثلاثي المتجهي Triple vector product

وهي كمية متجهة وتأخذ الصيغة:

$$\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{\imath}B_x + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z)(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)$$

$$-(\vec{\imath}C_x + \vec{\jmath}C_y + \vec{k}C_z)(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

ويطلق على هذه القاعدة اسم " *back cab rule* " ووضع الاقواس هنا ضروري حيث بدونه تكون عملية الضرب غير معرفة