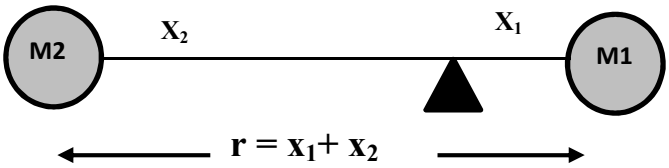
بقي السؤال الثاني وهو لماذا تدور الكواكب اصلا حول الشمس؟ وللإجابة على هذا التساؤل درس نوتن بما يسمى بمركز الكتلة **Center of Mass** . فاذا كان هناك جسمين في الكون بينهما قوه يكون هناك مركز كتلة , فاذا كانت كتلة الجسيمين متساويان فان مركز الكتلة بينهما سوف يكون بالمنتصف ويقترب من الكتلة الاكبر كلما كبرت. وعلية يمكن ان نحسب مركز الكتلة بين كتلتين غير متساويتين كالتالي:



من قانون العزوم (العتلات) وهو ان القوه في ذراعها تساوي المقاومة في ذراعها نحصل على:

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{m_2}{m_1} x_2$$

ولكن $r = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = r - x_1$

نعوض عن قيمه x_2 في المعادلة أعلاه:

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1}(r - x_1)$$

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1} r - \frac{m_2}{m_1} x_1$$

$$x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_1 = \frac{m_2}{m_1} r$$

$$x_1 (1 + \frac{m_2}{m_1}) = \frac{m_2}{m_1} r$$

$$x_1 (\frac{m_1 + m_2}{m_1}) = \frac{m_2}{m_1} r$$

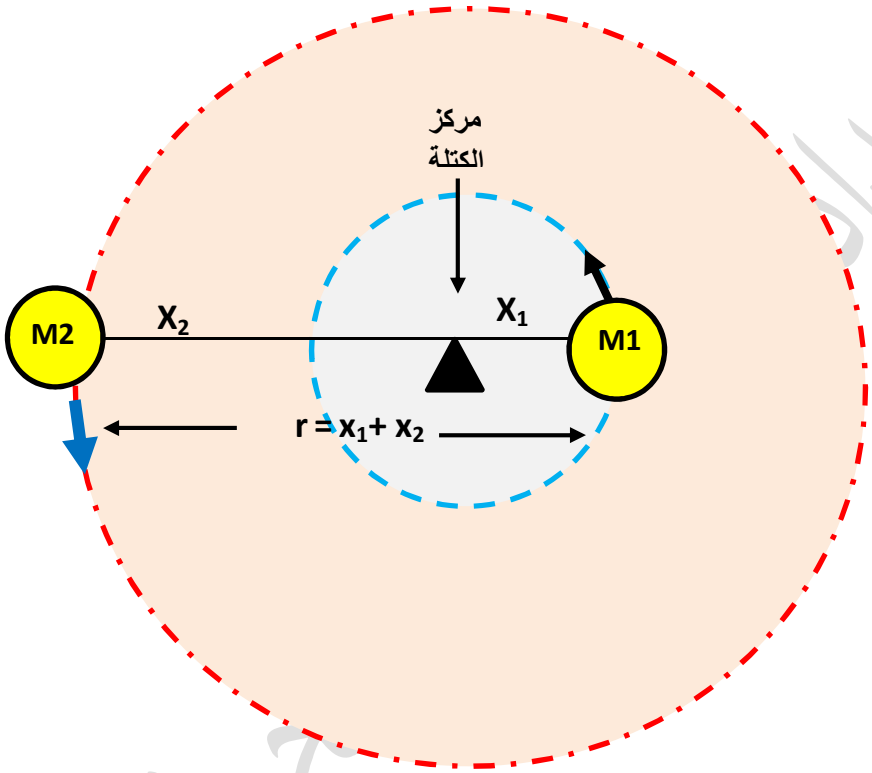
$$x_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) r$$

وهذه المعادلة تمثل مركز الكتلة بالنسبة الى x_1 وبنفس الطريقة يمكن ان نجد (يترك على الطالب ايجاده) .

اعداد الدكتور وراس صبحي قسم الفيزياء

$$x_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) r$$

وهذا يعني ان مركز الكتلة يعتمد على الكتلة الاثقل, فمثلا لو كانت الكتلة الاولى $\boldsymbol{m_1}$ هي الاثقل فالدوران حول مركز الكتلة سوف يكون بالشكل التالي:



تدور الكتلتان حول نفس مركز الثقل وهذا يعني انه كلما كبرت كتلة الجسم اقترب مركز الثقل نحوها وهكذا. وبما ان كتله الشمس كبيره جدا وهي اكبر من مجموع كتل الكواكب التي تدور حولها وعلية سوف يكون مركز ثقل الشمس في منتصفها والكواكب الاخرى سوف تدور حولها وبذلك استطاع نيوتن ان يجيب على التساؤل الثاني وهو لماذا تدور الكواكب حول الشمس.

مثال/ جد مركز الكتلة لمنظومه الارض والقمر اذا علمت ان $\boldsymbol{m_\oplus \approx 6 \times 10^{24} kg}$ وكتلة القمر $\boldsymbol{m_{moon} = 7.34 \times 10^{22} kg}$ والمسافة بين الارض والقمر $\boldsymbol{r \cong 384 \times 10^6 m}$

الحل: نطبق علاقة مركز الكتلة

$$x_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) r$$

$$x_{\oplus} = \left(\frac{m_{moon}}{m_{\oplus} + m_{moon}}\right) r \;\Rightarrow x_1 = \left(\frac{7.34 \times 10^{22}\text{kg}}{6 \times 10^{24}\text{kg} + 7.3 \times 10^{22}\text{kg}}\right) 384 \times 10^{6}\text{m}$$
$$= 4615.8\ \text{km}$$

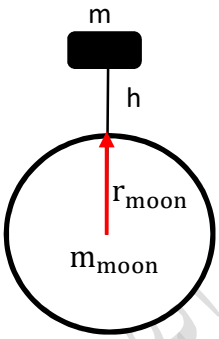
$$x_{moon} = \left(\frac{m_{\oplus}}{m_{\oplus} + m_{moon}}\right) r \;\Rightarrow x_1$$
$$= \left(\frac{6 \times 10^{24}\text{kg}}{6 \times 10^{24}\text{kg} + 7.34 \times 10^{22}\text{kg}}\right) 384 \times 10^{6}\text{m}$$

$$= 379 \times 10^{3}\ \text{km}$$

وهذا يعني ان الارض والقمر يدوران حول نقطه تقع داخل الكره الارضية بمسافة تبعد $\boldsymbol{4615.8\ km}$ عن مركزها وتبعد عن مركز القمر **379000km** فلو طبقنا الحسابات اعلاه على الشمس والارض لوجدنا ان مركز الكتلة يقع في مركز الشمس.

التعجيل بسبب الجاذبية على سطح القمر والكواكب الاخرى

المعادلة $g = G\frac{M_{\oplus}}{r_{\oplus}^2}$ تمثل معادلة التعجيل بسبب تأثير الجاذبية على جسم قريب من سطح الارض.
وبالتالي يمكن تعميم هذه المعادلة على القمر وبقية الكواكب, فمثلا اذا كان الجسم قريب من سطح القمر وكما بالشكل:



من السهولة ان نحسب وزن الجسم $\boldsymbol{m}$ على سطح القمر. وبصورة عامة

$$W = mg = F$$

اذا

$$W_{\text{moon}} = F$$

نعوض بقانون الجاذبية لنحصل على:

$$mg_{\text{moon}} = G\frac{m\ m_{moon}}{r_{moon}^2}$$

$$g_{\text{moon}} = G\frac{m_{moon}}{r_{\boldsymbol{moon}}^2}$$

مثال/ كم تبلغ الجاذبية على سطح القمر اذا علمت ان $m_{moon} = 7.34 \times 10^{22}\text{kg}$ **ونصف قطره** $r_{moon} = 1.738 \times 10^{6}\text{m}$

الحل:

$$g_{\text{moon}} = G\frac{m_{moon}}{r_{\boldsymbol{moon}}^2}$$

$$g_{\text{moon}} = 6.67 \times 10^{-11}\, N.m^2\,.kg^{-2}\,\frac{7.34\times 10^{22}\text{kg}}{(1.738\times 10^{6}\text{m})^2}$$

ملاحظة (عوضنا عن N ب $kg.m.s^{-2}$)

$$g_{\text{moon}} = 1.62\ \frac{m}{s^2} \Rightarrow g_{\text{moon}} = \frac{1.62}{9.8} = 0.156\ g_{\oplus} \approx \frac{1}{6}\ g_{\oplus}$$

كذلك يمكن ان نحسب وزن الجسم على القمر كالتالي:

$$W_{\text{moon}} = F = mg_{\text{moon}} = m\left(\frac{1}{6}\ g_{\oplus}\right) = \frac{1}{6}\left(mg_{\oplus}\right) = \frac{1}{6}\ W_{\oplus}$$

حيث ان وزن الجسم على القمر يمثل سدس وزنه على الارض فاذا كان الشخص وزنه **90 kg** على الارض يكون وزنه على $\frac{\mathbf{90}}{\mathbf{6}} = \mathbf{15\ kg}$. وبصوره عامه يمكن ان نحسب وزن اي جسم على الارض بالنسبة الى بقية الكواكب كالتالي:

عطارد Mercury

$$g_{mercury} = 0.4\ g_{\oplus}$$

$$W_{\text{mercury}} = 0.4\ W_{\oplus}$$

الزهرة Venus

$$g_{venus} = 0.98\ g_{\oplus}$$

$$W_{\text{venus}} = 0.98\ W_{\oplus}$$

المريخ Mars

$$g_{mars} = 0.39\ g_{\oplus}$$

$$W_{\text{mars}} = 0.39\ W_{\oplus}$$

المشتري Jupiter

$$g_{jupiter} = 2.37\, g_{\oplus}$$

$$W_{\text{jupiter}} = 2.37\, W_{\oplus}$$

وهكذا فمثلا شخص وزنه على الارض **60 kg** فان وزنه على المشتري يكون **142.2 kg** طبعا هذه الزيادة ليست معناها زياده بالوزن ولكن بسبب ثقل الجاذبية المسلطة على الشخص من قبل المشاري يصبح وزنه بهذا المقدار.

مثال/ اذا كان وزن جسم شخص ما على الارض 70 kg احسب القوه التي يسلطها القمر علية عندما يكون فوقة مباشرتا؟ ثم قارن هذه القوه بالقوة التي تمارسها الارض علية؟ حيث ان $m_{\oplus} \approx 6 \times 10^{24} kg$ وكتلة القمر $m_{moon} = 7.34 \times 10^{22} kg$ والمسافة بين الارض والقمر $r_{\oplus-moon} \cong 384 \times 10^{6} m$ و $r_{\oplus} = 6.371 \times 10^{6}\text{m}$

الحل:

$$F = G\frac{m_{moon} m}{r^2_{\oplus-moon}}$$

$$(a) \qquad F = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{N.m}^2\,.\text{kg}^{-2}\,\frac{7.34 \times 10^{22}\text{kg} \times 70\text{ kg}}{(384 \times 10^{6}\text{m})^2}$$

$$= 2.32 \times 10^{-3}\text{N}$$

$$(b) \qquad \text{F}_{\text{moon}} = \text{G}\frac{\text{m}_{\text{moon}}\text{m}}{\text{r}^2_{\oplus-\text{moon}}}$$

$$F_{\oplus} = G\frac{m_{\oplus} m}{r^2_{\oplus}}$$

نقسم المعادلتين لنحصل على:

$$\frac{F_{moon}}{F_{\oplus}} = \frac{r^2_{\oplus}}{\text{r}^2_{\oplus-\text{moon}}} \times \frac{\text{m}_{\text{moon}}}{m_{\oplus}}$$

$$\frac{F_{moon}}{F_{\oplus}} = \frac{(6.371 \times 10^6 \mathrm{m})^2}{(384 \times 10^6 m)^2} \times \frac{7.34 \times 10^{22} kg}{6 \times 10^{24} kg} = 3.46 \times 10^{-3}$$

$$F_{moon} = 3.46 \times 10^{-3} F_{\oplus}$$

$$F_{\oplus} = \frac{F_{moon}}{3.46 \times 10^{-3}} = \frac{2.32 \times 10^{-3} \mathrm{N}}{3.46 \times 10^{-3}} = 0.670 \times 10^3 N = 67 \mathrm{N}$$

مثال/ يقوم رجل فضاء وزنه 75 kg بإصلاح مركبته الفضائية والتي تبعد 600 km عن الارض. أحسب القوه التي تمارسها الارض علية؟

الحل:

$$F = G \frac{m_{\oplus} m}{r^2}$$

$$r = \mathrm{r}_{\oplus} + h = 6.371 \times 10^6 \mathrm{m} + 6 \times 10^5 \mathrm{m} = 6.97 \times 10^6 \mathrm{m}$$

$$F = 6.67 \times 10^{-1} \ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}} \frac{6 \times 10^{24} kg \times 75\ kg}{(6.97 \times 10^6 \mathrm{m})^2} = 610 N$$

وهذا هو مقدار القوه التي تسلطها الارض على رجل الفضاء وهو بالفضاء. الجاذبية ليست قليله على رائد الفضاء ومع ذلك يشعر كل من رائد الفضاء والمركبة بنفس التعجيل وبالتالي لا يتعجلان بالنسبة الى بعضهما البعض, ولكنهما أيضا في نفس المدار فوق الارض وبالتالي هم في حاله سقوط حر باستمرار وبذلك لا يشعرون بوزنهما.

قانون كبلر الثالث المعدل Modified Kepler's Third Law

بعد ان استطاع نيوتن من اكتشاف قوانينه الثلاثة وقانون الجاذبية مكنته هذه القوانين من الاجابة على تساؤلاته حول شكل المدارات ودوران الكواكب حول الشمس كذلك استطاع تحديد قيمه ثابت الجاذبية. اصبح من السهل علية ان يضع قانون كبلر الثالث بصيغته النهائية وتحديد قيمه ثابت التناسب.

$$\frac{P^2}{a^3} = constant$$

ولتسهيل عملية الحل فرض ان الكوكب يدور حول الشمس بمدار دائري ولإيجاد سرعة الكوكب في المدار الدائري والتي تمثل (أي السرعة) محيط الدائرة مقسوما على الزمن وذلك حسب قانون السرعة وهو المسافة على الزمن وعلية:

$$V = \frac{2\pi a}{P} \quad \ldots\ldots\ldots 1$$

V يمكن اعتبارها السرعة المدارية للمدار الدائري (وهذا ما سوف نثبته في المدارات الدائرية) وتساوي:

$$V = \sqrt{\frac{Gm}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots 2$$

من مساواة المعادلتين 1 و2

$$\frac{2\pi a}{P} = \sqrt{\frac{Gm}{a}}$$

$$\mathrm{P}^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\mathrm{Gm}}\right)\mathrm{a}^3$$

مثال/ يدور كوكب عطارد Mercury حول الشمس بمتوسط نصف قطر مقداره $5.81 \times 10^{10}\mathrm{m}$ وكتلة الشمس $1.99 \times 10^{30}\mathrm{kg}$ فما هو الزمن الذي يستغرقة عطارد في مداره حول الشمس؟ اعط اجابتك بالايام الارضية؟

الحل:

$$\mathrm{P}^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\mathrm{Gm}}\right)\mathrm{a}^3$$

$$P^2 = \left(\frac{39.47}{6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}} \times 1.99 \times 10^{30} kg}\right)(5.81 \times 10^{10}\mathrm{m})^3$$

$$P^2 = 2.96 \times 10^{-1}\ \frac{s^2}{m^3} \times 1.96 \times 10^{32}\ m^3 = 5.82 \times 10^{13}\ s^2$$

$$P = 7.63 \times 10^6\ s$$

$$P = \frac{7.63 \times 10^6}{3600 \times 24} = 88.3\ day$$

مثال/ في عام 2004 تم اكتشاف كوكب كبير بحجم كوكب المشتري وسمي بالمشتري الساخن hot jupiter يقدر مداره 1/9 من عطارد الى الشمس ويستغرق 3.09 يوم ليكمل دوره حول مداره(على

اعداد الدكتور مرتضى محي قسم الفيزياء

فرض ان مداره دائري) ما هي كتلة الكوكب؟ وسرعته المدارية؟ اذا علمت ان شبه المحور الرئيسي لعطارد هو $5.79 \times 10^{10}\ m$

الحل:

$$P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right) a^3$$

$$m = \left(\frac{4\pi^2}{GP^2}\right) a^3$$

نحول الزمن الى ثواني كالتالي:

$$24\ \text{day} \times 60\ \text{min} \times 60\ \text{sec} = 86400\ \text{s}$$

$$m = \frac{4\pi^2 \left(\frac{1}{9} \times\ 5.79 \times\ 10^{10} m\right)^3}{6.67\ \times\ 10^{-11}\ \text{N.m}^2\ .\text{kg}^{-2} (3.09\ \times 864002\ s)^2}$$

$$m = 2.21\ \times 10^{30}\ kg$$

حسب منطوق السؤال المدار دائري وعلية:

$$V = \frac{2\pi a}{P}$$

$$V = \frac{2\pi(\frac{1}{9} \times\ 5.79 \times\ 10^{10} m)}{3.09\ \times 864002\ s}$$

$$V = 151\ km/s$$

اعداد الدكتور يحيى قسم الفيزياء