المتجهات Vectors

تستخدم المتجهات لتمثل الكميات التي تمتلك مقدار و اتجاهاً كالسرعة والقوة و الازاحة.

❖يمكن ان تمثل المتجه بخط له اتجاه حيث طول الخط يمثل مقداره و اتجاه الخط يمثل اتجاه المتجه.

ملاحظة: يسمى المتجه الذي كل عناصره اصفار بالمتجه الصفري ويرمز له بالرمز (O)كما في المثال التالي :

$$O = [0,0]$$

*يمكن ان نرمز للمتجه بالرمز $\vec{A}, \vec{V}, \vec{U}$.

تعريف

اذا كان $\vec{C}$ متجه يبدا بالنقطة $\vec{A} = (a_1, b_1)$ وينتهي بالنقطة $\vec{B} = (a_2, b_2)$ فان المتجه $\vec{C}$ يمكن ايجاده بالصورة الاتية :

$$\vec{C} = \overrightarrow{AB} = \langle a_2 - a_1 \ , \ b_2 - b_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle a_1 - a_2 \ , \ b_1 - b_2 \rangle$$

مثال / اكتب المتجه لكل مما يأتي :

1) من $(8\ ,\ -4)$ الى $(3\ ,\ 2)$

2) من $(3\ ,0\ ,5)$ الى $(6, -2, 0)$

الحل/

$$1)\quad \vec{A} = \langle 3+4\ ,2-8\rangle = \langle 7\ ,-6\rangle$$

$$2)\quad \vec{B} = \langle 6-3\ ,-2-0\ ,0-5\rangle = \langle 3\ ,-2\ ,-5\rangle$$

ملاحظة/يمكن التعبير عن المتجه في الفضاء ثلاثي الابعاد بطريقتين

a) يكتب المتجه$\vec{A}$ بدلالة الاحداثيات $\vec{A} = \langle A_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z\rangle$

b) ويكتب ايضا بدلالة متجهات الوحدة والتي تسمى متجهات القاعدة الاساس

$$\vec{A} = A_{x_i} + \mathrm{A}_{y_j} + \mathrm{A}_{z_k}$$

حيث ان المتجهات تعرف كما يلي:

متجه الوحدة باتجاه محور x $\quad \vec{\imath} = \langle 1,0,0\rangle$

متجه الوحدة باتجاه محور y $\quad \vec{\jmath} = \langle 0,1,0\rangle$

متجه الوحدة باتجاه محور Z $\quad \vec{k} = \langle 0,0,1\rangle$

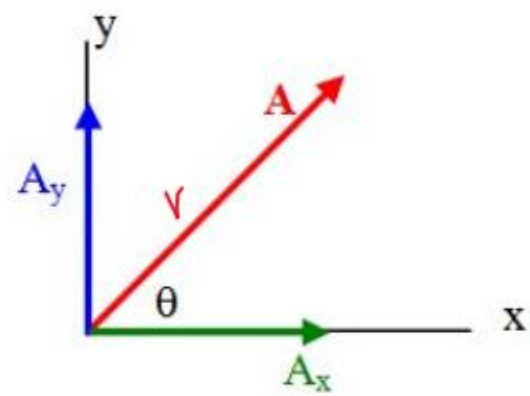
c) في الفضاء ثنائي الابعاد يوجد متجهان لمتجهات القاعدة الاساس $\vec{j},\vec{i}$

$$\vec{i} = \langle 1,0 \rangle \qquad \vec{j} = \langle 0,1 \rangle$$

ملاحظة / لجمع متجهين مكتوبين بدلالة متجهات الوحدة فأننا نجمع المعاملات مع مثيلتها $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

ايجاد طول المتجه و اتجاهه في المستوي

ليكن $\vec{A} = (A_x, A_y)$ متجه وليكن θ الزاوية التي يصنعها A مع المحور X فان طول المتجه A يكتب بالشكل $||A||$



$$||A|| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

اما اذا كان المتجه $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ يحتوي ثلاث مركبات فان طول المتجه

$$||A|| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

مثال/ جد طول المتجه التالي

$$\vec{A} = \langle 3,4 \rangle$$

الحل/

$$\|A\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

$$= \sqrt{\mathbf{3^2 + 4^2}} \Rightarrow \sqrt{\mathbf{25}} = \mathbf{5}$$

- يقصد باتجاه المتجه في الفضاء ثلاثي الابعاد هو ايجاد الزوايا α, β, γ حيث :

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\|A\|} \ , \ \cos\beta = \frac{A_y}{\|A\|} \ , \cos\gamma = \frac{A_z}{\|A\|}$$

حيث $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

مثال/ احسب طول واتجاه المتجه الاتي :

$$\vec{A} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

الحل/

ايجاد طول المتجه

$$\|A\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

$$\|A\| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

اتجاه المتجه

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\|A\|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{\|A\|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{\|A\|} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

مثال/ احسب طول واتجاهه المتجه الاتي

$$\vec{B} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 12\vec{k}$$

الحل/

ايجاد طول المتجه

$$\|B\| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}$$

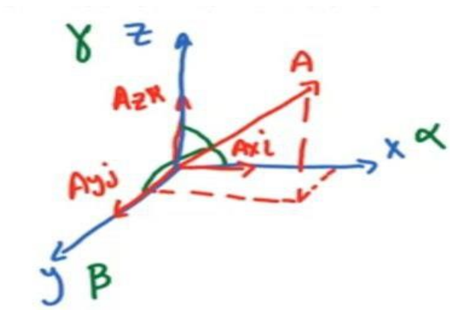
$$\|B\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

اتجاه المتجه

$$\cos\alpha = \frac{B_x}{\|B\|} = \frac{3}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{B_y}{\|B\|} = \frac{-4}{13}$$

$$\cos\gamma = \frac{B_z}{\|B\|} = \frac{12}{13}$$



العمليات على المتجهات

الضرب بعدد قياسي

اذا كان $\vec{V} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ متجه وكانت K عدد قياسي فان

$$K\vec{V} = \langle Kv_1, Kv_2, Kv_3 \rangle$$

مثال / اذا كان $K = 2$ و $\vec{V} = \langle 2, -1,4 \rangle$ اوجد $K\vec{V}$

الحل / $K\vec{V} = \langle Kv_1, Kv_2, Kv_3 \rangle$

$$= \langle 2(2)\,, 2(-1)\,,\ 2(4) \rangle \Rightarrow K\vec{V} = \langle 4, -2,8 \rangle$$

جمع وطرح المتجهات

اذا كان $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\vec{V} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ متجهان فان

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle u_1 + v_1 \, , \, u_2 + v_2 \, , u_3 + v_3 \rangle$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \langle u_1 - v_1 \, , u_2 - v_2 \, , u_3 - v_3 \rangle$$

ملاحظة / لا يمكن جمع وطرح متجهان اذا لم تكن لهما نفس العدد من المركبات .

مثال/ اذا كانت $\vec{u} = \langle 4,3,2 \rangle \quad , \vec{v} = \langle 2,6,0 \rangle$

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle 4 + 2 \, , 3 + 6 \, , 2 + 0 \rangle$$

$$=\langle 6,9,2 \rangle$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \langle 4 - 2 \, , 3 - 6 \, , 2 - 0 \rangle = \langle 2 \, , -3 \, , 2 \rangle$$

خصائص جبر المتجهات

اذا كانت $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ متجهات وليكن a, b اعداد حقيقية فان

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) $\vec{v} + 0 = \vec{v}$
3) $\vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v}$
4) $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

5) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+b\vec{v}$

واجب/

1. جد طول واتجاه المتجهات الاتية:

a) $\vec{A} = \langle 5, -2, 4\rangle$

b) $\vec{v} = \langle -1, 0, 2\rangle$

2. اذا كان $\vec{v} = \langle 6, 4, 1\rangle$, $\vec{u} = \langle 8, -3, 1\rangle$ و $k = 5$ جد كل من

a) $k\vec{u}, k\vec{v}$ b) $\vec{u} + k\vec{u}$ c) $\vec{v} - k\vec{u}$

3. جد طول واتجاه المتجه الاتي

$$\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$$

حيث $\vec{A} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{k}$

الضرب العددي(النقطي)

اذا كان $\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z\rangle$, $\vec{B} = \langle B_x, B_y, B_z\rangle$ متجهان فان

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \langle A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y + A_z\cdot B_z\rangle$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|A\|\|B\|\cos\theta$$

خصائص المتجهات

اذا كانت $\overrightarrow{A}, \vec{B}, \overrightarrow{C},$ متجهات وليكن k عدد فان`

$1. \vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C}\vec{A} + \vec{C}\vec{B}$

$2. \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$3. \vec{A} \cdot \vec{A} = \overrightarrow{\|A\|}^2$

$4. (K\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (K\vec{B}) = K(\vec{A} \cdot \vec{B})$

مثال/ احسب الضرب العددي لكل مما يأتي

$1. \vec{A} = \langle 0,3,-7 \rangle \quad , \quad \vec{B} = \langle 2,3,1 \rangle$

$2. \quad \vec{u} = 5\vec{\imath} - 8\vec{\imath} \quad , \quad \vec{V} = \vec{\imath} + 2\vec{\imath}$

الحل

$1. \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \langle (0)(2) + (3)(3) + (-7)(1) \rangle$

$= 9 - 7$

$= 2$

$2. \quad \vec{u} = 5\vec{\imath} - 8\vec{\imath} \quad , \quad \vec{V} = \vec{\imath} + 2\vec{\imath}$

$\vec{u} \cdot \vec{V} = (5)(1) + (-8)(2)$

= 5-16

=-11

مثال / اذا كانت $\vec{u} = \langle 0,0,1 \rangle$, $\vec{V} = \langle 0,2,2 \rangle$ و الزاوية المحصورة بينهما 45° جد حاصل الضرب العددي $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$= \left(\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}\right)\left(\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (2)^2}\right) \cos 45^{\circ}$$

$$= (\sqrt{1})(2\sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2$$

*لإيجاد الزاوية بين متجهان $\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle$, $\vec{B} = \langle B_x, B_y, B_z \rangle$

نستخدم القانون التالي

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|A\| \|B\|}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \rangle}{\left(\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}\right)\left(\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}\right)}$$

مثال/ اوجد الزاوية المحصورة بين المتجهان لكل مما يأتي

1) $\vec{u} = \langle 2,-1,1\rangle, \vec{v} = \langle 1,1,2\rangle$

$$\cos\theta = \frac{(2)(1)+(-1)(1)+(2)(1)}{(\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2})(\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2})}$$

$$\cos\theta = \frac{2-1+2}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})} \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

2) $\vec{u} = 4 + 4\vec{j} - 2\vec{k} \quad , \quad \vec{V} = \vec{i} - \vec{k}$

$$\cos\theta = \frac{(4)(1)+(4)(0)+(-2)(-1)}{(\sqrt{(4)^2+(4)^2+(-2)^2})(\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-1)^2})}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{(\sqrt{36})(\sqrt{2})}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \theta = 45^{\circ}$$

ملاحظات

1. اذا كانت الزاوية المحصورة $\theta = 90^{\circ}$ فان المتجهان متعامدان.

2. اذا كان حاصل الضرب النقطي صفر للمتجهين $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ فان المتجهان متعامدان وتكون الزاوية $\theta = 90^{\circ}$.

مثال / اوجد قيمة n التي تجعل المتجهان $\vec{A} = n\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ و $\vec{B} = 2n\vec{\imath} - n\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ متعامدان؟

الحل/

بما ان المتجهان متعامدان فان

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\langle A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \rangle = 0$$
$$n(2n) + 2(-n) + 1(-4) = 0$$

$$2n^2 - 2n - 4 = 0$$
$$(n-2)(n+1) = 0$$
$$either \quad n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$$
$$or \quad n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$$

الضرب الاتجاهي

اذا كان $\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle$, $\overrightarrow{B} = \langle B_x, B_y, B_z \rangle$ متجهان فان الضرب الاتجاهي يكون بالشكل $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix} k$$

$$= [A_y B_z - B_y A_z]\vec{i} - [A_x B_z - B_x A_z]\vec{j} + [A_x B_y - B_x A_y]\vec{k}$$

حيث $\vec{i} = \langle 1,0,0 \rangle$ $\quad \vec{j} = \langle 0,1,0 \rangle$ $\quad \vec{k} = \langle 0,0,1 \rangle$,

مثال/ جد $\vec{v} \times \vec{u}$ اذا علمت ان $\vec{v} = \langle 4,0,2 \rangle, \vec{u} = \langle 1,3,-3 \rangle$

الحل/

نجد مصفوفة مركبات u, v

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} k$$

$$= -6i - 14j + 12k$$
$$= \langle -6,14,12 \rangle$$

ملاحظة/ الضرب النقطي $\vec{A} \cdot \vec{B}$ كمية ثابتة بينما الضرب الاتجاهي $\vec{A} \times \vec{B}$ هو متجه وكما ان المتجه $\vec{A} \times \vec{B}$ عمودي على كل من $\vec{A}, \vec{B}$

مبرهنة/ اذا كان $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ متجهات في R^3 فان

1) $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ ($\vec{v} \times \vec{u}$ عمودي على $\vec{v}$)
2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ ($\vec{v} \times \vec{u}$ عمودي على $\vec{u}$)
3) $\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{w}$
4) $(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$
5) $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$
6) $(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

مثال/ لتكن $\vec{v} = \langle 2,3,-4 \rangle, \vec{u} = \langle 1,-1,2 \rangle$ احسب $\vec{u} \times \vec{v}$

ثم برهن ان $\vec{v} \times \vec{u}$ عمودي عل كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$؟

الحل/

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} k$$

$$= (4-6)i - (-4-4)j + (3+2)k$$

$$= -2i + 8j + 5k$$

$$= \langle -2,8,5 \rangle$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = \langle 1,-1,2 \rangle \cdot \langle -2,8,5 \rangle$$

$$= -2 - 8 + 10$$

$$= 0$$

$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ H·W