المحددات Determinants

يعرف المحدد بانة دالة معرفة من مجموع المصفوفات المربعة على الحقل F الى الحقل F
ويرمز لمحدد المصفوفة المربعة A من الدرجة n بالرمز $|A|$ او $det(\mathrm{A})$

ايجاد محدد المصفوفة من الدرجة 2×2

❖ لا يجاد محدد المصفوفة من الدرجة 2×2 نجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروح منة عناصر القطر الثانوي.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

مثال : احسب المحدد للمصفوفات الاتية

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad 1) \quad E = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$1) \quad |E| = \big(4(-6)\big) - \big(2(-3)\big) \Rightarrow |E| = -24 + 6 = -18$$

$$2) \quad |A| = 18 - 8 \Rightarrow |A| = 10$$

حساب المحددات من الدرجة 3×3

يمكن الحصول على المحدد للمصفوفة من الدرجة 3×3 بطريقة الاقطار و ذلك من خلال تكرار اول عمودين الى اليمين مع تحديد الاقطار الرئيسية والفرعية ومن ثم نجد مجموع حاصل ضرب الاقطار الرئيسية مطروح منها مجموع حاصل ضرب الاقطار الفرعية.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (\, a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - \, (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1 \,)$$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ احسب $|A|$ ؟

الحل:

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (32 + 0 + 4) - (12 + 12 + 0) = 36 - 24 = 12$$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ احسب $\det(A)$

$$det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (0 + 6 + 5) - (0 + 2 + 0) = 9$$

خواص المحددات

اولا : اذا كانت جميع عناصر صف او عمود في مصفوفة مربعة اصفار فان المحدد يساوي صفر .

مثال:

- اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ فان $|A| = 0$ لان جميع عناصر العمود الثاني اصفار.
- اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فان $|B| = 0$ لان جميع عناصر الصف الثاني اصفار .

ثانيا : اذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فان محددها يساوي محدد مدورها .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 18 = -8$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A^T| = 10 - 18 = -8$$

ثالثا: اذا ابدل صف او عمود بصف او عمود اخر فان اشارة المحدد لتلك المصفوفة تتغير.

مثال:

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ فان

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (4 + 0 + 20) - (0 + (-6) + (-4)) = 24 + 10 = 34$$

في حال الاستبدال اعتمادا على الخاصية اعلاه يكون شكل المصفوفة كما يلي

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ابدال الصف الاول بدل الثاني

$$|A| = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-4+0-6) - (0+20+4) = -10 - 24 = -34$$

رابعا : اذا تساوت العناصر في صفين او عمودين فان محددها يساوي صفر .

مثال: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (0-4+0) - (0-4+0) = -4+4 = 0$$

المعاملات المرافقة $Cofactors$

اذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فان العامل المرافق للعنصر a يعرف بانة حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ في محدد المصفوفة الناتجة من المصفوفة A بعد حذف الصف والعمود اي ان

$$a_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

حيث M_{ij} تمثل المصفوفة الناتجة من المصفوفة A بعد حذف الصف و العمود وتسمى هذه المصفوفة بالمصغر الاول للمصفوفة A ونرمز له بالرمز $cof(A)$

ملاحظة:

1. عند ايجاد العامل المرافق للمصفوفة A يجب ايجاد العامل المرافق لكل عنصر من عناصر المصفوفة.

2. نأخذ اشارة العنصر بعد حذف صفة وعموده وضربة في المحدد المرافق له من محدد الاشارات. $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ جد العامل المرافق للمصفوفة A؟

الحل:

$$\boldsymbol{\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(12-6) \Rightarrow \alpha_{11} = 6}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(8-6) \Rightarrow \alpha_{12} = -2}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (1)(6-9) \Rightarrow \alpha_{13} = -3}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$a_{21} = 1, a_{22} = -5, a_{23} = 3, a_{31} = -5, a_{32} = 4, a_{33} = -1,$$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ايجاد المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام العامل المرافق

لا يجاد المحدد بهذه الطريقة نقوم بإيجاد حاصل ضرب عناصر الصف والعمود في معاملاتهم المرافقة اي ان $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$ اذا اخترنا الصف i اما اذا اخترنا العمود j فان $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$

مثال: احسب $|A|$ اذا علمت ان $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ بطريقة العامل المرافق؟

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&2&4\\-1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&4\\0&3\end{vmatrix}=(6-0)\Rightarrow\alpha_{12}=6}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&4\\-1&3\end{vmatrix}=(9+4)\Rightarrow\alpha_{12}=-13}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&0\end{vmatrix}=(0+2)\Rightarrow\alpha_{13}=2}$$

$$\boldsymbol{|A|=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\alpha_{1j}=a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+a_{13}\alpha_{13}}$$

$$\boldsymbol{=(2)(6)+(-1)(-13)+(1)(2)}$$

$$\boldsymbol{=27}$$

في حالة اختيار الصف الثاني

$$\boldsymbol{|A|=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}\alpha_{2j}=a_{21}\alpha_{21}+a_{22}\alpha_{22}+a_{23}\alpha_{23}}$$

$$\boldsymbol{=(3)(3)+(2)(7)+(4)(1)}$$

$$\boldsymbol{=9+14+4}$$

$$\boldsymbol{=27}$$

حالة اختيار العمود الثالث

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{a}_{i3}\boldsymbol{\alpha}_{i3} = \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{\alpha}_{13} + \boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{\alpha}_{23} + \boldsymbol{a}_{33}\boldsymbol{\alpha}_{33}$$

$$= (\mathbf{1})(\mathbf{2}) + (\mathbf{4})(\mathbf{1}) + (\mathbf{3})(\mathbf{7})$$

$$= \mathbf{2} + \mathbf{4} + \mathbf{21}$$

$$= \mathbf{27}$$

ملاحظة: عند ايجاد المحدد بهذه الطريقة يفضل اختيار الصف والعمود الاكثر اصفار لأنه يسهل العمل الحسابي.

معكوس المصفوفة Inverse of Matrix

اذا كانت A مصفوفة مربعة محددها لا يساوي صفر فان مكوسها هو A^{-1}بحيث

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

هناك عدة طرق لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة نذكر منا

ايجاد معكوس المصفوفة باستخدام المرافقات

خطوات ايجاد معكوس المصفوفة

1. نجد محدد المعاملات بحيث لا يساوي صفر اي ان $|A| \neq 0$
2. نجد المعاملات المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة ثم نكتب مصفوفة المعاملات المرافقة$cof(A)$
3. نجد مدور المصفوفة $\mathrm{adj(A)} = (cof(A))^T$
4. نجد معكوس المصفوفة A^{-1}(وذلك بقسمة كل عنصر في المصفوفة $\mathrm{adj(A)}$ على محدد المصفوفة الاصلية)

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

مثال: جد معكوس المصفوفة الاتية $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ؟

الحل:

(1

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (8 + 27 + 8) - (12 + 12 + 12)$$

$$= 7$$

2) نجد المعاملات المرافقة لكل عنصر ثم نكتب مصفوفة المعاملات المرافقة.

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 5$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 4 = -2$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 9 = 5$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 4 = 2$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

3) نجد مدور مصفوفة المعاملات المرافقة $\mathrm{adj}(A) = (cof(A))^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

4) معكوس المصفوفة $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ احسب معكوس المصفوفة A^{-1}؟

الحل:

1) نجد محدد المصفوفة $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \big(0 + (-4) + (0)\big) - (0 + 6 + 0)$$

$$|A| = -10 \neq 0$$

2) نجد المعاملات المرافقة لكل عنصر ثم نكتب مصفوفة المعاملات المرافقة.

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 1(O - 6 + 0) = -6$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -1(0 + 2) = -2$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = +1(6+1) = 7$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -1(0-0) = 0$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = +1(0-0) = 0$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -1(3+2) = -5$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = +1(4-0) = 4$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -1(2-0) = -2$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = +1(1-4) = -3$$

3) نجد مدور مصفوفة المعاملات المرافقة $cof(A) = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj}(\text{A}) = (cof(A))^T = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 7 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

4) معكوس المصفوفة $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-7}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

استخدام امصفوفات لحل انظمة المعادلات الخطية

يعرف النظام الخطي :هو نظام يتكون من m معادلة وn متغيرات ويكون بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b\ _3 \end{bmatrix}$$

حيث

A : تمثل مصفوفة ثوابت (المعاملات)

X : تمثل مصفوفة المتغيرات

B :تمثل مصفوفة الثوابت

مثال: حول المعادلة التالية الى مصفوفة.

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = 3$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

طريقة كرامر Cramer's Method

تعتمد الحلول في هذه الطريقة على المحدد بصورة مباشرة اي محدد مصفوفة المعاملات (A) في نظام متكرر من Nمن المعاملات و M من المجاهيل بحيث لا يساوي صفر اي ان

$$X_1 = \frac{|E_1|}{|A|}, X_2 = \frac{|E_2|}{|A|}, X_n = \frac{|E_3|}{|A|}$$

حيث $|E|$محدد مصفوفة المعاملات بعد ابدال عناصر العمود (j) بعناصر المتجه Bالمتناظرة .

طريقة الحل :

1. نستخرج محدد مصفوفة المعاملات Aبحيث لا يساوي صفر. $|A| \neq 0$
2. نستخرج محدد المعاملات بعد ابدال عناصر المصفوفة A بعناصر العمود B
3. نقسم محدد مصفوفة المعاملات بعد الابدال على محدد المعاملات الاولية لاستخراج قيمةx .

مثال : جد حلا للنظام الاتي :

$$3X_1 - 4X_2 = 1$$
$$X_1 + 5X_2 = 2$$
$$AX = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 15 + 4 = 19$$
$$|E_1| = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$
$$|E_1| = 5 + 8 = 13$$

$$|E_2| = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|E_2| = 6 - 1 = 5$$

$$X_1 = \frac{|E_1|}{|A|} = \frac{13}{19}$$

$$X_2 = \frac{|E_2|}{|A|} = \frac{5}{19}$$

مثال:استخدم قاعدة كرامر لحل منظومة المعادلات الاتية :

$$-2X_1 + 3X_2 - X_3 = 1$$
$$X_1 + 2X_2 - X_3 = 4$$
$$-2X_1 - X_2 + X_3 = -3$$

الحل :

نجد محدد المعاملات بإحدى طرق المحدد

$$|A| = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2$$

$$|E_1| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{matrix} \Bigg]$$

$$|E_1| = -4$$

$$|E_2| = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{matrix} \Bigg]$$

$$|E_2| = -6$$

$$|E_3| = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{matrix} \Bigg]$$

$$|E_3| = -8$$

$$X_1 = \frac{|E_1|}{|A|} = 2 \quad ,X_2 = \frac{|E_2|}{|A|} = 3 \quad ,X_3 = \frac{|E_3|}{|A|} = 4$$

واجب //

1. اوجد المحدد للمصفوفات التالية باستخدام طريقة الاقطار ؟

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. احسب معكوس المصفوفة - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$؟

3. باستخدام طريقة كرامر جد حلال للنظام الاتي

$$\mathbf{3X + 2Y - Z = 1}$$
$$\boldsymbol{-X - 2Y + Z = 1}$$
$$\boldsymbol{X + Y + 2Z = 2}$$

.