المصفوفات Matrices

يستخدم مفهوم المصفوفات في الكثير من التطبيقات الرياضية وغيرها من العلوم اذ تستخدم في حل المعادلات الانية والبرمجة الخطية و البرمجة غير الخطية و غيرها من المجالات الأخرى.

تعريف

تعرف المصفوفة على انها ترتيب مستطيل الشكل لكميات تنتمي الى حقل معين وتسمى هذهِ الكميات بعناصر المصفوفة وتشكل هذه العناصر m من الصفوف وn من الاعمدة ويحاط هذا النوع من الترتيب من الصفوف والاعمدة بأقواس من النوع .[ ] ,( ).

- ❖ المصفوفة المتكونة من m من الصفوف وn من الاعمدة تسمى مصفوفة من الدرجة $m \times n$

وتمثل بالصيغة التالية: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix}$

حيث a_{ij} هو عنصر يقع في الصف i حيث $i = 1,2,3, \dots m$ ويقع في العمود j

حيث $j = 1,2,3, \dots n$ ويمكن التعبير عن المصفوفة بصورة مختصرة بالشكل $[a_{ij}]$.

- ❖ تستخدم الحروف الانكليزية الكبيرة للدلالة على المصفوفات مثل $A, B, C \dots$.
- ❖ ويقال عن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ انها معرفة على الحقل R اذا كانت $a_{ij} \in R$ ولكل قيم (i, j).

درجة المصفوفة: تحدد درجة المصفوفة على اساس عدد الصفوف m و عدد الاعمدة n فتكون المصفوفة من الدرجة $m \times n$ اذا احتوت على m صف و n عمود فمثلا

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ مستطيلة من الدرجة 3×2 مكونة من ثلاث صفوف وعمودان حيث عناصر المصفوفة

$$a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{21} = 3, a_{22} = -1, a_{313} = 7, a_{32} = 5$$

معرفة على حقل الاعداد الحقيقيةRلان كل عناصرها اعداد حقيقية.

بعض انواع المصفوفات الخاصة

المصفوفة الصفية او الافقية *Row Matrix*

يقـــال عــــن Aانهـــا مصـــفوفة صـــفية او افقيـــة اذا كانـــت $m = 1$ وتكتـــب
$A = [a_{11} \quad , a_{12} \quad , \ldots\ldots a_{1n}]_{1\times n}$

المصفوفة العمودية Column Matrix

يقال عن Aانها مصفوفة عمودية اذا كان $n = 1$ وتكتب بالصيغة الاتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

أي ان المصفوفة Aمكونة من m من الصفوف وعمود واحد فقط.

مثال:

1. المصفوفة $A = [1 \quad 3 \quad -1 \quad 0]_{1\times 4}$ صفية معرفة على حقل الاعداد الحقيقية.
2. المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ عمودية معرفة على حقل الاعداد الحقيقية.

المصفوفة الصفرية Zero Matrix

هي المصـــفوفة الـــتي تكـــون جميـــع عناصرهـــا اصـــفار اي ان $a_{ij} = 0$ ويرمـــز للمصـــفوفة الصفرية بالرمز $O_{m\times n}$.

مثال: المصفوفات التالية هي مصفوفات صفرية

$$O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}, O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

مصفوفة الوحدة Unity Matrix

هي المصفوفة التي تكون جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد وبقية العناصر تكون اصفار ويرمز لها بالرمز $I_{m\times n}$ حيث $m \times \mathrm{n}$ الدرجة وعليه فان

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

المصفوفة المربعة square matrix

تسمى المصفوفة $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ بانها مربعة اذا كان عدد صفوفها مساوي لعدد اعمدتها اي ان $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ وتكتب بالصيغة التالية

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

القطر الرئيسي (main diagonal): هو القطر المؤلف من العناصر الواقعة على القطر المبتدئ بالعنصر في الزاوية العليا اليسرى والمنتهي في العنصر الواقع في الزاوية السفلى اليمنى من المصفوفة.
أي ان عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة $A = [a_{ij}]$ من الدرجة n هي $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n\,n}$ ويسمى مجموع عناصر القطر الرئيسي باثر المصوفة ويرمز له بالرمز $tr(A)$ وعليه

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

القطر الثانوي (secondary diagonal) : هو القطر المؤلف من العناصر الواقعة على القطر المبتدئ بالعنصر في الزاوية السفلى اليسرى والمنتهي في العنصر الواقع في الزاوية العليا اليمنى من المصفوفة.

مثال: المصفوفات التالية هي مصفوفات مربعة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

المصفوفة المثلثية سفلى Lower Triangular

يقال ان A مصفوفة مثلثية سفلى اذا كانت جميع عناصر المصفوفة A فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر.

المصفوفة المثلثية العليا Upper Triangular

يقال ان المصفوفة A عليا اذا كانت جمع عناصر المصفوفة A تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر.

مثال: نلاحظ ان المصفوفة A مثلثية سفلى بينما المصفوفة B مثلثية عليا

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\4&-1&6&0\\3&5&4&2\end{bmatrix}_{4\times4},\ B=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&6&8&2\\0&0&4&-1\\0&0&0&3\end{bmatrix}_{4\times4}$$

المصفوفة القطرية Diajonal Matrix

هي المصفوفة التي جميع عناصرها التي فوق وتحت القطر الرئيسي تساوي صفر اي انها مصفوفة مثلثية عليا وسفلى ويروز لها بالرمز D.

$$D_{2\times2}=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}_{2\times2},\ D_{3\times3}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

العميات على المصفوفات Operations on Matrices

تساوي مصفوفتين Equality of Tow Matrices

لتكن كل من $A=[a_{i,j}], B=[b_{i,j}]$ مصفوفة يقال ان المصفوفتين A, B بانهما متساويتان اذا كان كل من

1. A, B من نفس الدرجة أي ان لهما نفس عدد السطور و الاعمدة.
2. عناصرهما المتناظرة متساوية أي ان $a_{i,j}=b_{i,j}$ لكل قيم i,j.

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix}\sqrt{4}&3\\7&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&3\\7&0\end{bmatrix}$ نلاحظ ان A = B

مثال:

تكون المصفوفتان $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & X \\ Y & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ Z & -4 & 8 \end{bmatrix}$ متساويتان اذا وفقط اذا كانت قيم $Z = 5, Y = 2, X = 7$.

جمع وطرح المصفوفات : Add and subtract matries

يمكن جمع وطرح مصفوفتين A, B اذا كانتا من الدرجة نفسها $m \times n$ وان الناتج يكون مصفوفة من الدرجة نفسها وتكون بالشكل الاتي:

$$A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}] = C$$

حيث ان

$$A \mp B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \mp \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} \mp b_{11}) & (a_{12} \mp b_{12}) \dots & (a_{1n} \mp b_{1n}) \\ (a_{21} \mp b_{21}) & (a_{22} \mp b_{22}) \dots & (a_{2n} \mp b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{m1} \mp b_{m1}) & (a_{m2} \mp b_{m2}) & (a_{mn} \mp b_{mn}) \end{bmatrix}$$

مثال :

1. اذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad , B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times3}$

احسب $\quad 1) \quad A + B \qquad 2\ ) \quad A - B$

الحل

$$A + B = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 9 \\ 13 & 2 & 12 \\ 14 & 10 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} , \qquad A - B = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2. اذا كان $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{2\times3}$

احسب $B - A$ (2 $A + B$ (1

الحل

$$A + B = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 10 \\ 13 & 2 & 9 \end{bmatrix}_{2\times3} , \qquad B - A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

مبرهنة : اذا كانت المصفوفات A, B, C متوافقة بالنسية للجميع فان:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $A + (-A) = 0$

مثال : اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

تحقق من ان $A + (B + C) = (A + B) + C$

الحل

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(B + C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + (B + C) = (A + B) + C$$

ضرب المصفوفات

الضرب بمقدار ثابت

يمكن ضرب المصفوفة بمقدار ثابت عن طريق ضرب هذا الثابت بجميع عناصر المصفوفة كما في المثال الاتي:

مثال :

1. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 8 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ فأن $2A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 6 & -10 & 16 \\ 14 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ فان $\frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)(3) & \left(\frac{1}{3}\right)(-9) \\ \left(\frac{1}{3}\right)(12) & \left(\frac{1}{3}\right)(0) \end{bmatrix}$

ضرب مصفوفتين

تمتثل المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $p \times q$ لعملية الضرب AB اذا كان عدد اعمدة A مساويا لعدد صفوف B اي ان $n = p$ ويكون ناتج الضرب هو المصفوفة $C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)$ من الدرجة $m \times q$ ولإيجاد c_{ij} نضرب عناصر السطر في الموقع i في المصفوفة A بالعناصر المقابلة في العمود في الموقع j ثم نجمع المضروبات، فاذا كان لدينا المصفوفتين التاليتين:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}) + (a_{12}b_{21}) + (a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}) + (a_{12}b_{22}) + (a_{13}b_{32}) & (a_{11}b_{13}) + (a_{12}b_{23}) + (a_{13}b_{33}) \\ (a_{21}b_{11}) + (a_{22}b_{21}) + (a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}) + (a_{22}b_{22}) + (a_{23}b_{32}) & (a_{21}b_{13}) + (a_{22}b_{23}) + (a_{13}b_{23}) \\ (a_{31}b_{11}) + (a_{32}b_{21}) + (a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12}) + (a_{32}b_{22}) + (a_{33}b_{32}) & (a_{31}b_{13}) + (a_{32}b_{23}) + (a_{33}b_{23}) \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

يقال ان المصفوفة Aمتوافقة مع المصفوفة B بالنسبة لعملية الضرب اذا كان عدد اعمدة المصفوفة A مساويا مع صفوف المصفوفة B وناتج الضرب يكون مصفوفة تحمل نفس عدد صفوف المصفوفة A وعدد اعمدة المصفوفة B.

مثال :

جد AB, BAاذا علمت ان $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4)(1) + (-1)(5) & (4)(4) + (-1)(-3) \\ (3)(1) + (-2)(5) & (3)(4) + (-2)(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 5 & 16 + 3 \\ 3 - 10 & 12 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -7 & 18 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(4) + (4)(3) & (1)(-1) + (4)(-2) \\ (5)(4) + (-3)(3) & (5)(-1) + (-3)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 12 & -1 - 8 \\ 20 - 9 & -5 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

من المثال السابق نلاحظ ان $AB \neq BA$

نستنتج من ذلك ان ضرب المصفوفات ليس من الضروري ان يكون عملية إبداليه.

ملاحظة :

اذا كانت A موافقة الى B بالنسبة لعملية الضرب فليس من الضروري ان تكون B موافقة الى A بالنسبة لعملية الضرب.

مثال:

جد كل من $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-6+2 & 4-3-4 & 1-3+2 & 0-3+4 \\ 2+2-3 & 8+1+6 & 2+1-3 & 0+1-6 \\ 4-6-1 & 16-3+2 & 4-3-1 & 0-3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-9+4 & 1+6-12 & -1+3-2 & -2+3+0 \\ 4+3-6 & 2-2+18 & -2-1+3 & -4-1+0 \\ 8-9-2 & 4+6+6 & -4+3+1 & -8+3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 18 & 0 & -5 \\ -3 & 16 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

مبرهنة : اذا كانت A, B, C, D مصفوفات متوافقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب فان

1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ لكل $\lambda \in F$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$

مثال :

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

تحقق من ان $A(BC) = (AB)C$

الحل

$$(AB) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+10 & 3+25 \\ 8+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(BC) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+2 & 24-1 \\ 6+10 & 12-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 23 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 14 & 23 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 42+80 & 69+35 \\ 28+0 & 46+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 & 104 \\ 28 & 46 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66+56 & 132-28 \\ 24+4 & 48-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 & 104 \\ 28 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC) = (AB)C$$

مدور المصفوفة Transpose of Matrix

هي المصفوفة الناتجة من تدوير صفوف المصفوفة A مع اعمدتها أي ان A^T هوه اعمدة المصفوفة A

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$ مصفوفة فان $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$

مبرهنة خواص مدور المصفوفة

اذا كانت A, B مصفوفة معرفة على الحقل F ولتكن λ عدداً حقيقيا فأن

1. $A = (A^T)^T$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ لكل $\lambda \in F$
3. اذا كانت A, B متوافقتين بالنسبة لعملية الجمع فأن $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. اذا كانت A, B متوافقتين بالنسبة لعملية الضرب فأن $(AB)^T = A^T B^T$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

اثبت ان $(A + B)^T = A^T + B^T$

الحل:

$$(A + B)^T = (\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix})^T = (\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix})^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad , B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + B)^T = A^T + B^T$$

واجب:

1. جد AB, BA اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

تحقق من الاتي :

a) $(AB)^T = A^T B^T$

b) $A(B + C) = AB + AC$

c) $\lambda\,(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ حيث $\lambda = 3$

3. اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

احسب الاتي:

a) $A + 5I_3 - A^T$

b) $A^2 - 3I_3 - 4A$