المساحة المستوية

المرحلة الاولى / قسم البستنة وهندسة الحدائق

مدرس المادة : د . محمد أحمد كاظم
قسم علوم التربة والموارد المائية

حساب المساحات

1 . 6 : مقدمة :

تعتبر عملية حساب المساحات من الأمور المهمة في شتى المجالات وليس في تخصص المساحة فقط . وتتوقف دقة نتائج حساب المساحات على عدة عوامل منها :

1 . دقة القياس في الطبيعة سواء كانت مسافات أو زوايا .

2 . دقة الرسم (في حالة حساب المساحة من شكل مرسوم) .

3 . الطريقة المتبعة في حساب الشكل .

مصادر تقدير المساحات :.

1 . من الطبيعة .

2 . من الخرائط .

طرق إيجاد المسافات :

1 . الطرق الحسابية : وهي أدق الطرق وفيها يقسم الشكل إلى أشكال منتظمة مثل المثلثات وتطبق قوانين الأشكال المنتظمة عليه .

2 . الطرق نصف الحسابية : وفيها يقسم الرسم إلى شرائح وتطبق عليه قوانين خاصة .

3 . الطرق الميكانيكية : وهي تعتمد على استخدام الأجهزة مثل جهازالبلانيمتر

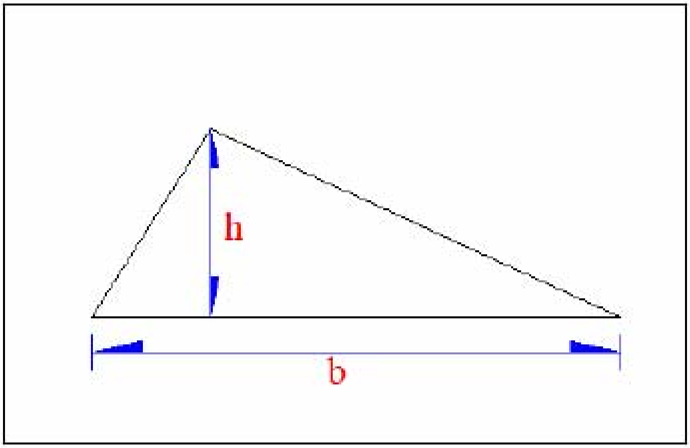
2 . 6 : مساحة الأشكال المنتظمة :

1 . 2 . 6 : مساحة المثلث : Area of Traingle

ويتم ذلك عن طريق ثلاث طرق :

1 . 1 . 2 . 6 طريقة القاعدة والارتفاع :

$$Area = \frac{bh}{2} \qquad 1- 6$$



شكل رقم(6 -1)

مساحة المثلث بدلالة القاعدة و الارتفاع

حيث:

Area : المساحة .

b : القاعدة (Base) .

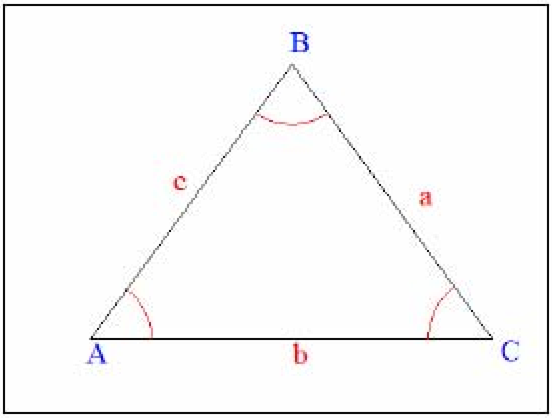
h : الارتفاع (Height) .

مثال 6 . 1 : باستخدام الشكل(6 . 1) احسب مساحة المثلث إذا كان طول قاعدته 4.5 m وطول ارتفاعه 2.7 m

الحل :

$$Area = \frac{bh}{2} = \frac{4.5 \times 2.7}{2} = 6.075 \quad m^2$$

6 . 2 . 1 . 2 : مساحة مثلث بطريقة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما :



شكل رقم(6 -2)

مساحة المثلث بدلالة ضلعين و الزاوية المحصورة

$$Area = \frac{1}{2} ab \quad \sin \quad C$$

$$\boxed{Area = \frac{1}{2} ac \quad \sin \quad B \qquad (2-\ \ 6)}$$

$$Area = \frac{1}{2} bc \quad \sin \quad A$$

حيث:

a,b,c : أطوال أضلاع المثلث كما هو بالشكل (6 -2) .

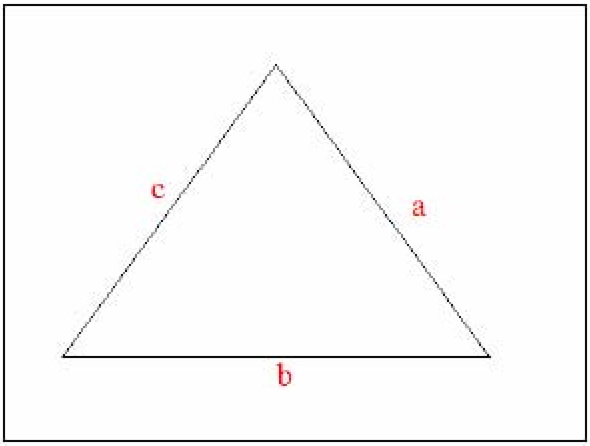
A,B,C : زوايا المثلث كما هو بالشكل (6 -2) .

مثال 6 . 2 : احسب مساحة الشكل 6 . 2 إذا علمت أن طول الضلعين B, C هو 17.51 m و 15.22 m على التوالي والزاوية التي بينهما ″14 ′15 °22

الحل :

$$Area = \frac{1}{2} bc \sin \quad A = \frac{1}{2} \times 17.51 \times 15.22 \sin \quad 22° \quad 15' \quad 14'' = 50.464 \quad m^2$$

6 . 2 . 1 . 3 : طريقة الأضلاع الثلاثة :



شكل رقم(6 -3)

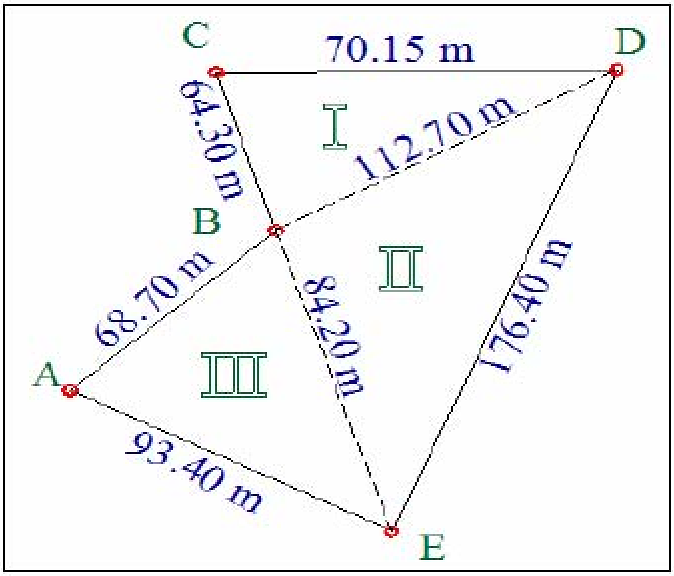
مساحة المثلث بدلالة أضلاعه الثلاثة

$$\boxed{Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (3-\ \ 6)}$$

حيث:

$$S = \frac{(a+b+c)}{2}$$

مثال 3 . 6 : أوجد مساحة قطعة الأرض بالشكل(4 . 6)



شكل رقم(6 -4)

الحل :

قسمنا قطعة الأرض كما بالشكل إلى ثلاثة مثلثات هي : I , II , III

Area of I

$$S = \frac{70.15 + 64.30 + 112.70}{2} = 123.575 \quad m$$

$$Area = \sqrt{s(s- a)(s- b)(s-c)}$$

$$Area = \sqrt{123.575(123.575-70.15)(123.575-112.70)(123.575-64.30)}$$

$$Area = 2062.947 \text{ m}^2$$

Area of II

$$S = \frac{176.40 + 84.20 + 112.70}{2} = 186.65 \quad m$$

$$Area(II) = \sqrt{186.65(186.65-176.40)(168.65-84.20)(186.65-112.70)}$$

$$Area(II) = 3807.159 \text{ m}^2$$

Area of III

$$S = \frac{84.20 + 93.40 + 68.70}{2} = 123.15 \quad m$$

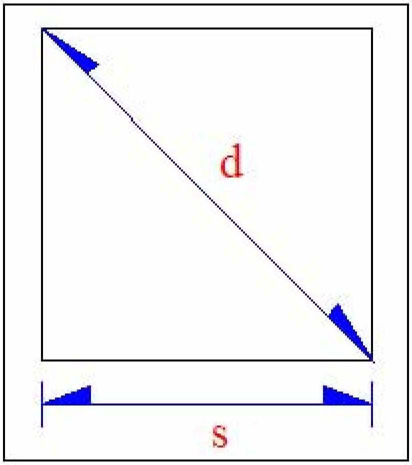
$$Area \quad (III) = \sqrt{123.15(123.15-84.20)(123.15-93.40)(123.15-68.70)}$$

$$Area \quad (III) = 2787.490 \text{ m}^2$$

$$Total \quad Area = I+II+III=2062.947+3807.159+2787.490$$

$$= 8657.596 \text{ m}^2$$

3.2.6 : مساحة المربع : Area of square



شكل رقم(6 -5)

إيجاد مساحة المربع

$$\boxed{Area = S^2 = \frac{d^2}{2} \qquad 4-\ 6}$$

حيث:

s : طول ضلع المربع .

d : طول القطر .

مثال 6 . 4 : في الشكل (6 .5) أوجد مساحة المربع إذا علمت أن طول ضلعه12m ، ثم أوجد طول القطر بدلالة المساحة

الحل :

$$Area = S^2 = (12)^2 = 144\ m^2$$

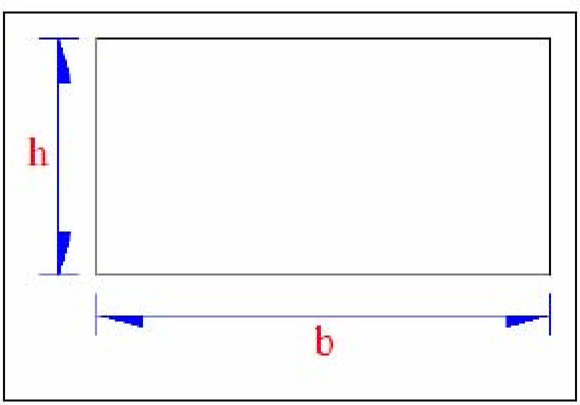
$$Area = \frac{d^2}{2} \Rightarrow d^2 = 2Area$$

$$\because d = \sqrt{2Area}$$

$$= \sqrt{144 \times 2}$$

$$= 16.97\ m$$

4.2.6 : مساحة المستطيل : Area of rectangle



شكل رقم(6 -6)

مساحة المستطيل

$$\boxed{Area = bh \qquad (5-\ 6)}$$

حيث:

b : الطول .

h : العرض .

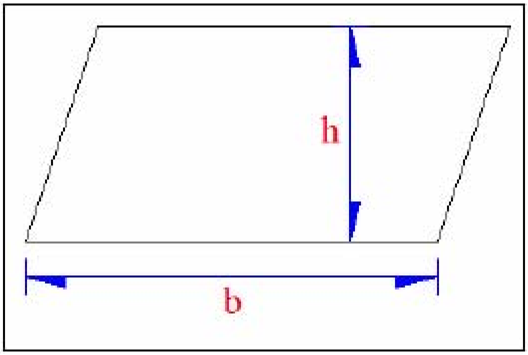
مثال (5 . 6) :

أرض زراعية مستطيلة الشكل طولها 787 m وعرضها 427 m . أوجد مساحة الأرض

الحل :

$$\text{Area} = bh = 787 \times 427 = 336049\ m^2$$

5 . 2 . 6 : مساحة متوازي الأضلاع : Area of parallelogram



شكل رقم(6 -7)

مساحة متوازي الأضلاع

$$\boxed{\text{Area} = bh \qquad (6-6)}$$

حيث :

b : القاعدة .

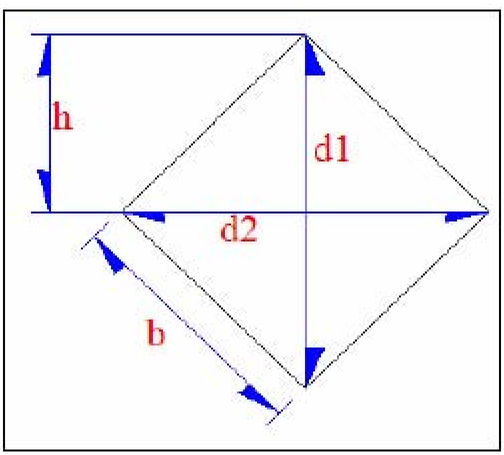
h : الارتفاع .

مثال (6 . 6) : متوازي مستطيلات طول قاعدته 58 m وارتفاعه 22 m . أوجد مساحته

الحل :

$$\text{Area} = bh = 58 \times 22 = 1276\ m^2$$

6 . 2 . 6 : مساحة المعين : Area of rhombus



شكل رقم(6 -8)

مساحة المعين

$$\boxed{\text{Area} = bh = \frac{d_1 d_2}{2} \qquad (7-6)}$$

حيث :

b : القاعدة .

h : الارتفاع .

d_1 : طول القطر الأول .

d_2 : طول القطر الثاني .

مثال (7.6) : أوجد مساحة معين إذا علمت أن طول قطريه m 17 , m 21 على التوالي ؟

الحل :

$$\text{Area} = \frac{d_1 d_2}{2}$$
$$= \frac{17 \times 21}{2} = 178.5 \quad m^2$$

7.2.6 : مساحة شبه المنحرف : Area of trapezoid .

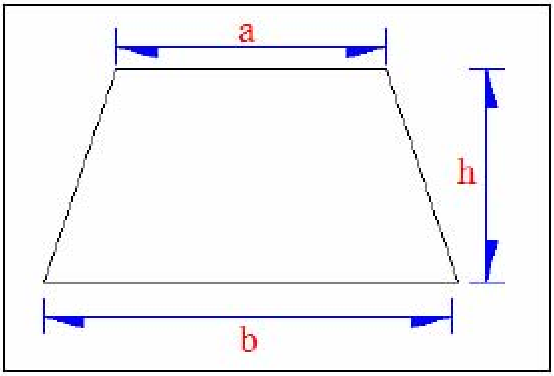
$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2}h(b+a) \qquad (8-\ 6)}$$

حيث

h : الارتفاع .

b : القاعدة الأولى .

a : القاعدة الثانية .



شكل رقم(6 -9)

مساحة شبه المنحرف

مثال (8.6) :

في الشكل (9.6) أوجد مساحة شبه المنحرف إذا علمت أن ارتفاعه m 7 وطول قاعدتيه m 24 , 14 m على التوالي

الحل :

$$\text{Area} = \frac{1}{2}h(b+a) = \frac{1}{2} \times 7(24+14)$$
$$= 133 \text{ m}^2$$

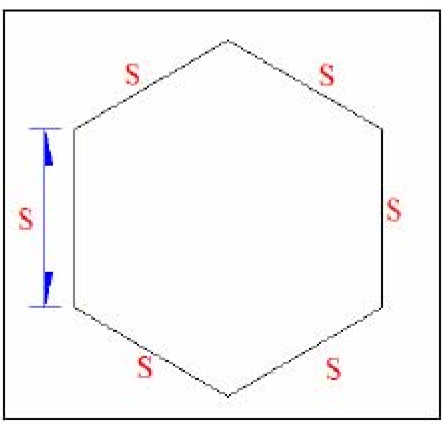
8.2.6 : مساحة المضلع المنتظم .Area of regular polygon.

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{4}ns^2 \cot\frac{180}{n} \qquad (9-\ 6)}$$

حيث :

n : عدد أضلاع المضلع المنتظم .

s : طول الضلع .



شكل رقم(6 -10)

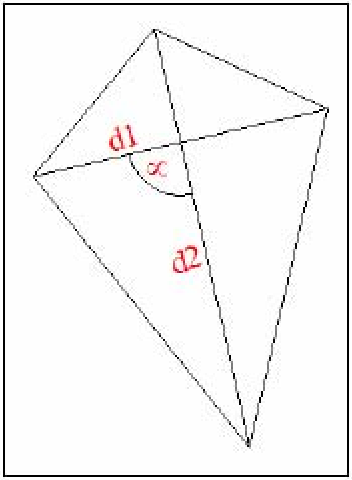
مساحة المضلع المنتظم

مثال (9.6) : مثمن طول ضلعه 9m أوجد مساحته

الحل :

$$\text{Area} = \frac{1}{4} n s^2 \cot\frac{180}{n} \quad = \quad \frac{1}{4} \times 8 \times 9^2 \cot\frac{180}{8}$$
$$= \quad 391.10\ \text{m}^2$$

6 -2 -9 مساحة الشكل الرباعي Area of Quadrilateral .



شكل رقم(6 -11)

مساحة الشكل الرباعي

$$\boxed{\text{Area} = \frac{d_1 d_2 \ \sin\alpha}{2} \qquad (10-\ 6)}$$

حيث إن :

d_1 : طول القطر الأول .

d_2: طول القطر الثاني

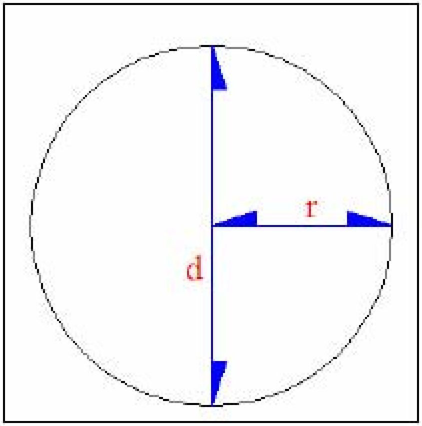
$\propto$: الزاوية المحصورة بين القطرين .

مثال (6 -10) : أوجد مساحة الشكل (6 - 11) إذا علمت أن طول قطريه 6.5 m ، 9.6m والزاوية المحصورة بينهما $48^\circ\ 12'\ 41''$

الحل :

$$\text{Area} = \frac{d_1 d_2 \ \sin\alpha}{2} \quad = \quad \frac{6.5 \times 9.6 \ \sin(84^\circ\ 12'\ 41'')}{2}$$
$$= \quad 31.04\ \text{m}^2$$

6 -2 -10 مساحة الدائرة Area of Circle.



شكل رقم(6 -12)
مساحة الدائرة

$$Area = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad (6 -11)$$

حيث :

r : نصف القطر .

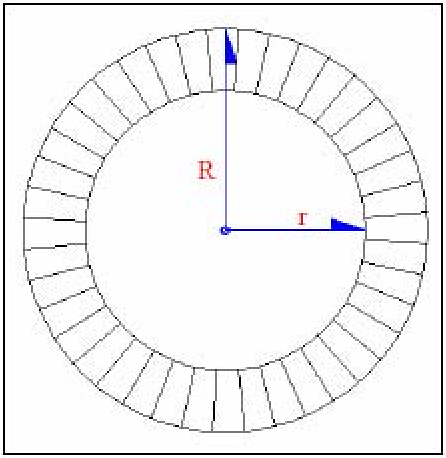
d : القطر .

مثال (6 – 11) دائرة نصف قطرها 12m أوجد مساحتها

الحل :

$$Area = \pi r^2 = \pi(12)^2$$
$$= 452.389\ m^2$$

6 - 2 - 11 مساحة الحلقة الدائرية Area of circular Ring.



شكل رقم(6 -13)
مساحة الحلقة الدائرية

$$Area = \pi(R^2 - r^2) \qquad (6 -12)$$

حيث :

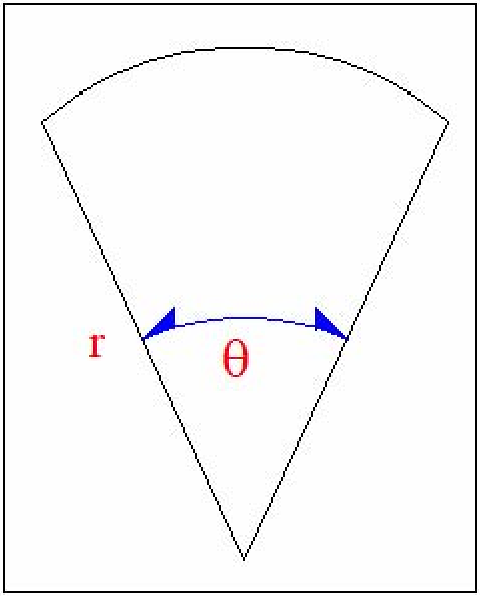
r : نصف قطر الدائرة الصغيرة .

R : نصف قطر الدائرة الكبيرة .

مثال (6 – 12) : في الشكل (6 – 13) أوجد مساحة الحلقة الدائرية إذا علمت أن نصف قطر الدائرة الداخلية الصغيرة 9m ونصف قطر الدائرة الكبيرة (11 m)

الحل :

$$Area = \pi(R^2 - r^2) = \pi(11^2 - 9^2)$$
$$= 125.66 \quad m^2$$



شكل رقم(6 -14)

مساحة القطاع الدائري

6 -2 -12 مساحة القطاع الدائري Area of sector .

$$Area = \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ} \qquad (13- \ 6)$$

حيث :

θ = الزاوية المركزية للقطاع .

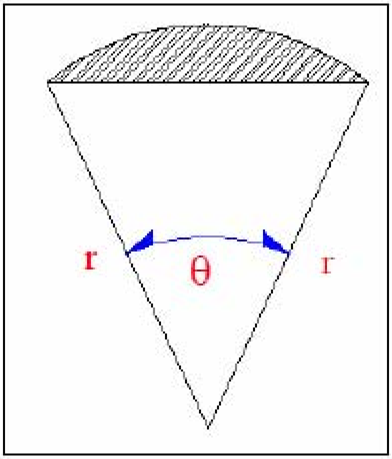
r = نصف القطر .

مثال (6 – 13) : أوجد مساحة القطاع في الشكل (6 – 14) إذا علمت أن الزاوية المركزية للقطاع $34^0 \ 15' \ 27''$ ونصف القطر 17.5 m

الحل :

$$Area = \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ} = \pi(17.5^2)\frac{34^\circ \ 15' \ 27''}{360^\circ}$$
$$= 91.55 \quad m^2$$

6 -2 -13 مساحة القطعة الدائرية . Area of segment



شكل رقم(6 -15)

مساحة القطعة الدائرية

$$Area = \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ} - \frac{r^2}{2}\sin\theta$$

$$\boxed{Area = r^2\left(\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\ \theta}{2}\right) \qquad (14- \ 6)}$$

مثال (6 – 14) : أوجد مساحة القطعة الدائرية في الشكل (6 – 15)

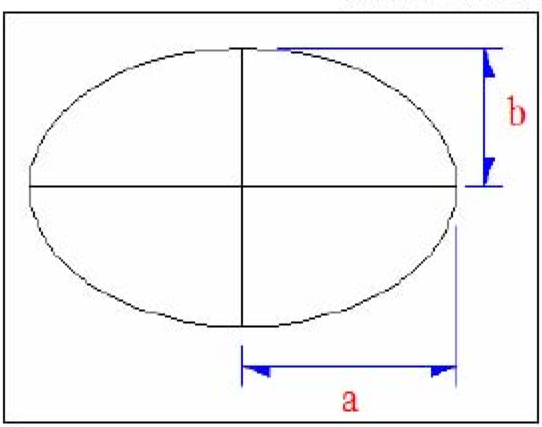
إذا علمت أن نصف القطر 8.5m والزاوية المركزية 45°

الحل :

$$Area = r^2\left(\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\ \theta}{2}\right) \qquad = \quad (8.5)^2\left(\frac{\pi \times 45}{360} - \frac{\sin\ 45}{2}\right)$$

$$= \quad 2.83 \quad m^2$$

6 -2 -14 مساحة القطع الناقص .Area of Ellipse



شكل رقم(6 -16)

مساحة القطع الناقص

$$\boxed{Area = \pi ab \qquad (15- \ 6)}$$

حيث :

a : نصف القطر الأكبر .

b : نصف القطر الأصغر .

مثال (6 – 15) في الشكل (6 – 16) احسب

مساحة القطع الناقص إذا كان طول محوره الأكبر 32.5 m

والأصغر 28.7 m

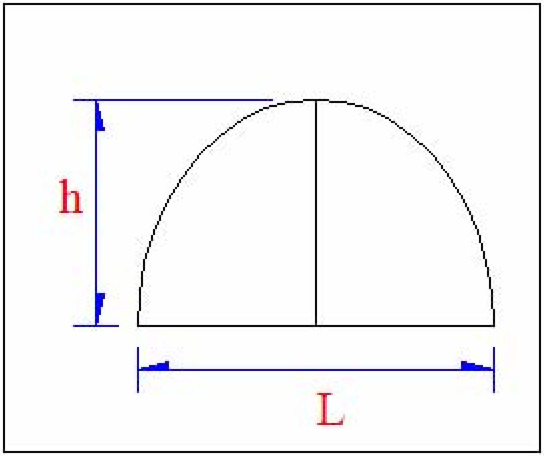
الحل :

$$Area = \pi ab \quad = \quad \pi \times 32.5 \times 28.7$$

$$= \quad 2930.32 \quad m^2$$

6 -2 -15 مساحة القطع المكافئ .Area of parabola

$$\boxed{Area = \frac{2}{3}Lh \qquad (16-6)}$$



شكل رقم(6 -17)

مساحة القطع المكافئ

حيث :

h : الارتفاع .

L : القاعدة .

مثال (16 – 6) احسب مساحة القطع المكافئ في الشكل (17 – 6) إذا كان ارتفاعه 15m وطول قاعدته 24m

الحل :

$$Area = \frac{2}{3}Lh = \frac{2}{3} \times 24 \times 15$$

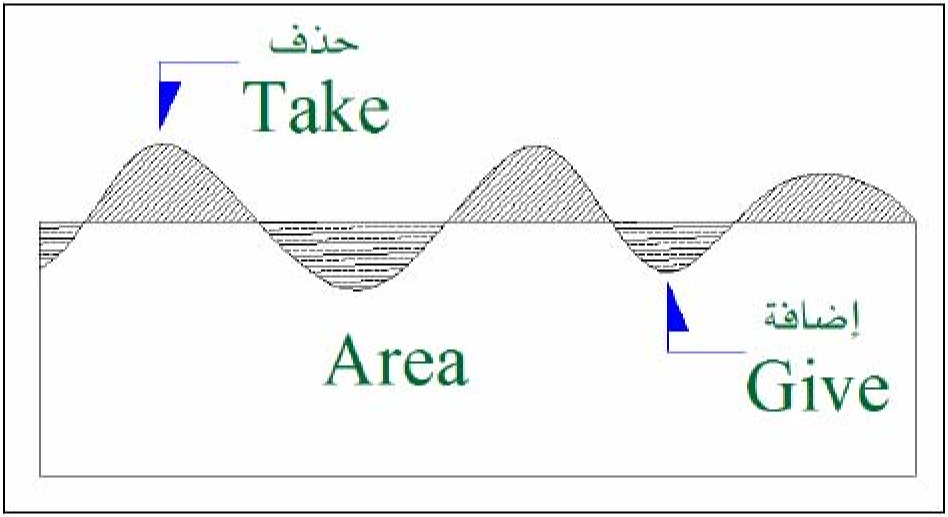
$$= 240 \quad m^2$$

6 -3 مساحة الأشكال غير المنتظمة (الطرق نصف الحسابية)

يمكن حساب مساحات الأشكال المحددة بمنحنيات غير منتظمة بعدة طرق منها :

6 -3 -1 طريقة الحذف والإضافة Take and Give method

هذه الطريقة تقريبية وتزداد دقتها كلما قلت تعاريج حدود الشكل . وفي هذه الطريقة يجري تحويل الخطوط المتعرجة إلى خطوط مستقيمة بحيث يحول الشكل إلى شكل مضلع يكافئه في المساحة على أن تكون الأجزاء المحذوفة مكافئة في المساحة للأجزاء المضافة قدر الإمكان .



شكل رقم(6 -18)

تعيين مساحة الشكل بطريقة الحذف و الإضافة

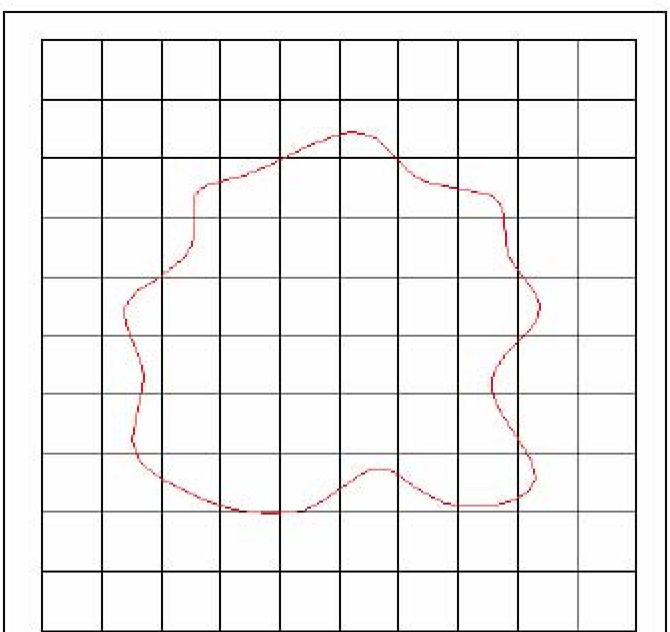
ملحوظات :

1. يفضل تجنب هذه الطريقة عندما يكون الشكل كبيراً .وذلك لتطلبها وقتا أكبر ولانخفاض الدقة .
2. تعتمد دقة هذه الطريقة على صحة التقدير عند عملية الحذف والإضافة .

6 -3 - 2 طريقة المربعات COUNTING SQUARE

في هذه الطريقة يجري تغطية الشكل بورقة شفافة مسطرة إلى مربعات صغيرة ، ثم تعد المربعات الكاملة المحصورة ضمن الشكل ، أما المربعات الداخلة جزئيا ضمن الشكل فتقدر وتضاف إلى عدد المربعات الكاملة . وتحسب المساحة الكلية بضرب عدد المربعات الكاملة الكلي في مساحة المربع . وتعالج أحيانا المربعات الداخلة جزئيا في مساحة الشكل بإحدى الطريقتين التاليتين :

1. إذا كان أكثر من نصف المربع داخلاً في الشكل فيعتبر مربعا كاملا . وإذا كان



شكل رقم(6 -19)

طريقة المربعات في تعيين مساحة الأشكال غير المنتظمة

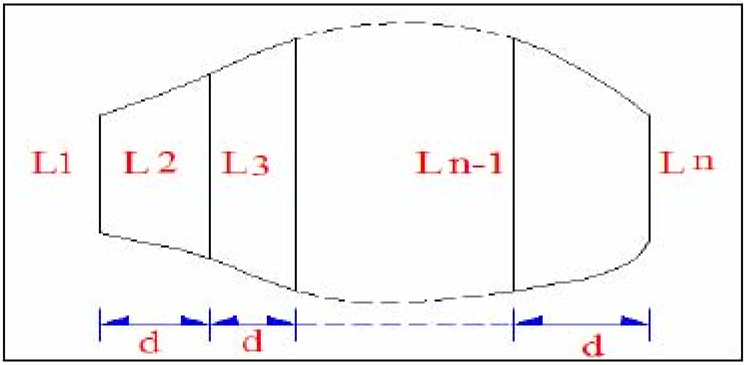
الجزء الداخل أقل من نصف المربع فيهمل هذا المربع ولا يعد ضمن المربعات الكاملة .

2. اعتبار كل مربع غير كامل ضمن الشكل مساويا لنصف مربع كامل .

6 . 3 . 3 : طريقة أشباه المنحرفات Trapezoidal rule

وفي هذه الطريقة يتم تقسيم الشكل إلى أشباه منحرفات وتحسب المساحة باستخدام القاعدة الآتية

- في هذه الطريقة افترض أن التعرج هو خط مستقيم بين كل عمودين متتاليين .
- هذه الطريقة سهلة وذات دقة مقبولة خاصة إذا كانت حدود الأرض مستقيمة .

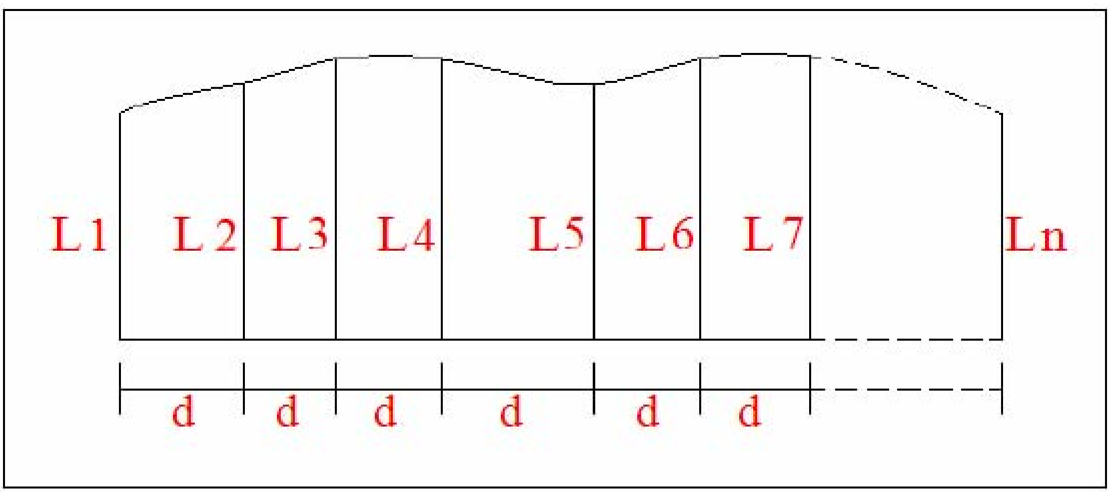


شكل رقم(6 -20)

طريقة أشباه المنحرفات في إيجاد مساحة الشكل

$$\text{Area} = \frac{d}{2}\left[L1 + 2\left(L2 + L3 + \cdots \cdots L_{n-1}\right) + L_N\right] \quad (17-\ 6)$$

6 -3 -4 طريقة سمسون Simpson's One Third Rule



شكل رقم(6 -21)

طريقة قاعدة سمسون في إيجاد مساحة الأشكال

في هذه الطريقة :

1. يتم تقسيم القاعدة إلى عدد زوجي مناسب من التقسيمات المتساوية ويقاس طول أحدها .
2. تقاس أطوال الأعمدة التي تقام من نقاط التقسيم بدءا من نقاط التقسيم وحتى نقاط تقاطع هذه الأعمدة مع الحد المتعرج .
3. تطبق المعادلة الآتية في حساب مساحة الشكل :

$$\text{Area} = \frac{d}{3}[(L_1 + L_n) + 4(L_2 + L_4 + L_6 + \dots\dots) + 2(L_3 + L_5 + L_7 + \dots\dots\dots)] \qquad 18\text{-}\ 6$$

المساحة= $\frac{\text{طول القسم}}{3}$ [(ضعف مجموع الأعمدة الفردية)+(أربع أمثال مجموع الأعمدة الزوجية)+(مجموع طول العمودين الأول و الأخير)]

مثال (6 – 17)

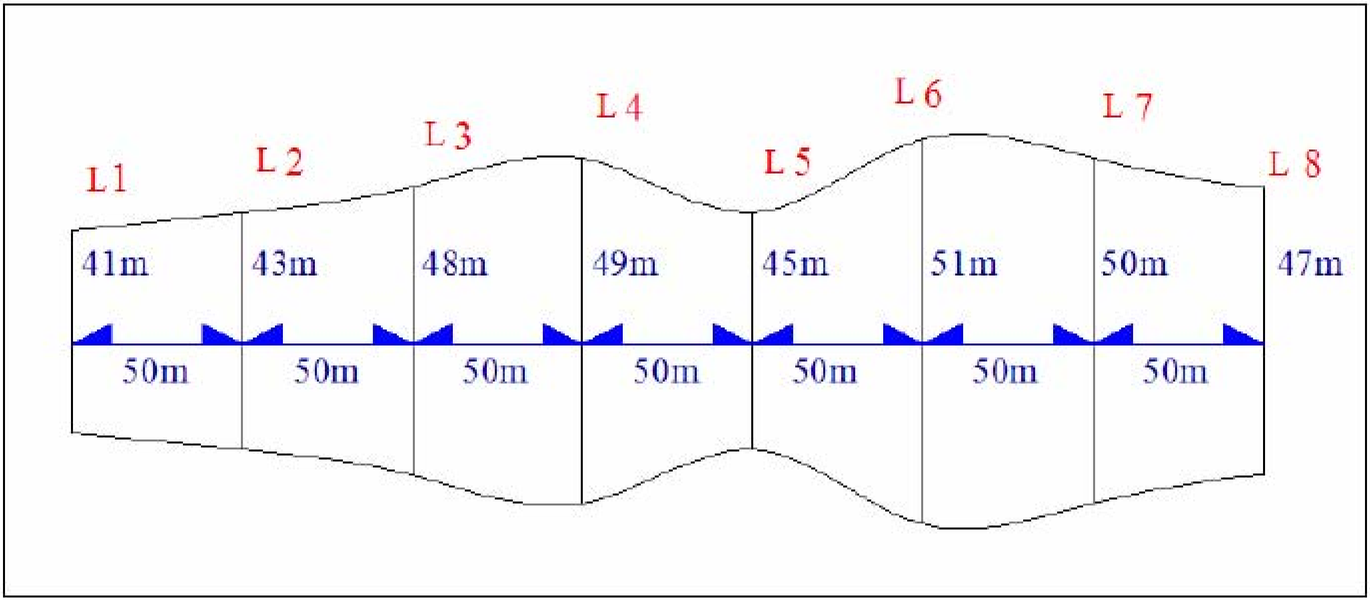
إذا كان عدد المربعات التي تغطي قطعة أرض مرسومة بمقياس رسم 1:2000 تساوي 1980 مربع . وكان طول ضلع المربع على الرسم 0.5 cm . أوجد مساحة الأرض في الطبيعة

الحل :

مساحة الأرض =عدد المربعات × مساحة المربع على الرسم × (مقلوب مقياس الرسم) ^{2} .

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 1980\times(0.5)^2\times(2000)^2 \\
&= 1980\times10^6\ \text{cm}^2 \\
&= \frac{1980000000}{10000} \\
&= 198000\ \text{m}^2
\end{aligned}$$

مثال (6 – 18) : أوجد مساحة قطعة الأرض في الشكل (6 – 22) بطريقة أشباه المنحرفات وبطريقه سمسون



شكل رقم(6 -22)

الحل :

طريقة أشباه المنحرفات

$$\text{Area}= \frac{d}{3}[L_1 + 2(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7) + L_8]$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{50}{2}[41+2(43+48+49+45+51+50)+47\ ] \\ &= 16500\ \ m^2 \end{aligned}$$

طريقة سمسون :

من الملاحظ أن عدد الأقسام سبعة وهو عدد فردي لذلك نطبق قاعدة سمسون على الأقسام الستة الأولى ونضيف مساحة الجزء الأخير على أنه شبه منحرف .

$$\text{Area}= \frac{d}{3}[(L_1 + L_7) + 4(L_2 + L_4 + L_6) + 2(L_3 + L_5)] + [\frac{h(b+a)}{2}]$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{50}{3}\ [(41+50)+4(43+49+51)+2(48+45)\ ]+[\ \frac{50(50+47)}{2}\ ] \\ &= 16575\ \ m^2 \end{aligned}$$