

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة البصرة

كلية التربية للعلوم الصرفة - قسم الفيزياء

الدوال المعقدة

اعداد الدكتور

موسى كاظم شامس

فيزياء الالكترونيكا النظرية



تقديم:

تم الاطلاع على العديد من المصادر العلمية التي تخص الدوال المعقدة. ان هذه المصادر عرضت مواضيع الدوال المعقدة بطرق مختلفة وكذلك تسلسل المواضيع خلال الشرح. لذلك كانت لنا رؤية خاصة في اختيار طريقة الشرح وتسلسل المواضيع بما ينسجم مع اهدافنا. لقد تم الاقتصار على المواضيع الاكثر شيوعاً وعمدنا على طرح امثلة كثيرة واثباتات قليلة حتى يكون لدى الطلبة الفهم الاكثر والاستفادة الاكبر من المادة في فهم مواضيع الفيزياء الاخرى، مثل الميكانيك الكمي وفيزياء الحالة الصلبة وكذلك في فيزياء الالكترونييات وغيرها من مواضيع الفيزياء الاخرى. لقد بذلنا جهد كبير لتقديم لك الموضوع بطريقة مبسطة ومفيدة وجنبناك التعب والامرهاق النفسي والضيق في عدم حصولك على الفهم. ان لموضوع الدوال المعقدة قوانين اساسية تم التركيز عليها وتم اخفاء العديد من التفاصيل الرياضية تجنباً للاطالة وتركناها اعتماداً على مستوى الطالب الذي تحصل عليه من مواضيع الرياضيات في السنوات السابقة.

الدكتور: موسى كاظم شامر

٢٠١٩-٢٠٢٠

الى كل من اراد ان يتعلم ليرتقي

المحتويات

الفصل الاول: الاعداد المعقدة

الفصل الثاني: الدوال النظامية البسيطة

الفصل الثالث: تفاضل الدوال العقدية ومعادلات كوشي - مريمان

الفصل الرابع: تكامل الدوال المعقدة ونظرية كوشي

الفصل الاول

الاعداد المعقدة Complex Numbers

التمهيد: لماذا نظام الاعداد المعقدة؟ لقد تعلمنا سابقاً ان حل المعادلة

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (1)$$

باستخدام طريقة الدستور هو:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

وعرفنا ان جذور المعادلة (1) حقيقية عندما يكون المقدار تحت الجذر $(b^2 - 4ac \geq 0)$ موجب، اما اذا كان المقدار $b^2 - 4ac < 0$ فهذا يعني ان جذور المعادلة (1) ليست ضمن نظام الاعداد الحقيقية. لذلك اقتضت الضرورة وجود نظام اعداد اخر يقع ضمنه الحلول الغير الحقيقية للمعادلات. لقد وضع العالم الرياضي **كاوس** نظام اعداد جديد يشمل على:

١- يشمل جميع الاعداد الحقيقية.

٢- يشتمل على **i** الوحدة التخيلية والتي لها الخاصية **$i^2 = -1$** .

هذا النظام هو **نظام الاعداد المعقدة**، حيث يعتبر **$i (= \sqrt{-1})$** هو اساس النظام. اليك بعض الامثلة البسيطة:

اليك مجموعة من الاعداد التالية:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i, \quad \sqrt{-3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}, \quad i^3 = i^2i = -i$$

هذه الاعداد هي اعداد **خيالية**، لكن مجموعة الاعداد التالية:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{8} = -4, \quad i^2 = -1$$

هي اعداد **حقيقية**.

Real and Imaginary Parts of a Complex Number

لو رجعنا الى المعادلة (1) و عوضنا عن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 2$ ، فأنها تصبح:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad (3)$$

حل المعادلة (4) يكون:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i$$

حيث نلاحظ ان جذري z لهما جزء حقيقي والآخر خيالي معاً، لذلك سنطلق مصطلح العدد المعقد على z ليعني المجموعة الكاملة للأعداد الحقيقية والخيالية او تركيب الاثنين معاً. لتوضيح اكثر، ان العدد المعقد $z = a + ib$ مركب من جمع حدين، الحد الحقيقي (لا يحتوي على i) ويسمى الجزء الحقيقي (العدد الحقيقي) للعدد المعقد ويرمز له $Re\{z\}$. ومعامل i في الحد الاخر يسمى بالجزء الخيالي (العدد الخيالي) للعدد المعقد ويرمز له $Im\{z\}$ ، حيث ان b هو ليس خيالياً. ان الجزء الحقيقي او الخيالي للعدد المعقد ممكن ان يكون صفراً، فاذا كان الجزء الحقيقي صفراً، فإن العدد المعقد يكون خيالياً، اما اذا كان الجزء الخيالي للعدد المعقد صفراً، فإن العدد المعقد يكون حقيقياً. يمكن ان نكتب العدد المعقد على شكل زوج من الاعداد الحقيقية، الجزء الحقيقي اولاً ومن ثم الجزء الخيالي، فمثلاً يمكن كتابة العدد العقدي $5 + 3i$ على الشكل التالي (5,3). ان هذا ليس الشكل المناسب جداً في الحسابات، لكنه يستخدم في التمثيل الهندسي للعدد المعقد.

أن الاعداد المعقدة لها اهمية كبيرة في مجالات تطبيقية عديدة مثل الهندسة الكهربائية وكذلك في حل المعادلات التفاضلية في فروع الفيزياء المختلفة بالإضافة الى حقول متقدمة في الرياضيات تتعامل مع دوال المتغير المعقد التي تعطي طرق مفيدة متعددة لحل التمارين حول انسياب الموائع، الكهربائية، ميكانيك الكم.

Algebraic Calculations of Complex Numbers

يمكن القيام بالعمليات الحسابية الجبرية للأعداد المعقدة باتباع نفس الأسلوب في جبر الأعداد الحقيقية، لأجراء العمليات الأربعة الحسابية، نفترض لدينا العددين المعقدين $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$:

١- عملية الجمع:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

٢- عملية الطرح

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

٣- عملية الضرب

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

٤- عملية القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

مثال: انجز العمليات الحسابية الأربعة للعددين المعقدين $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 3 - i$.

الحل:

-١

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = 5 + i0 = 5$$

-٢

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = -1 + 2i$$

-٣

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 7 + i$$

-٤

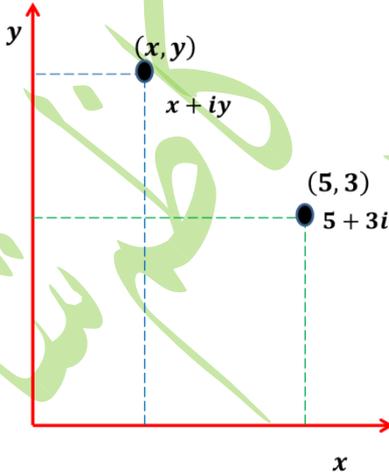
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

إذا كان لدينا z_1 ، z_2 و z_3 ثلاث اعداد معقدة، فأنها تخضع الى القوانين التالية:

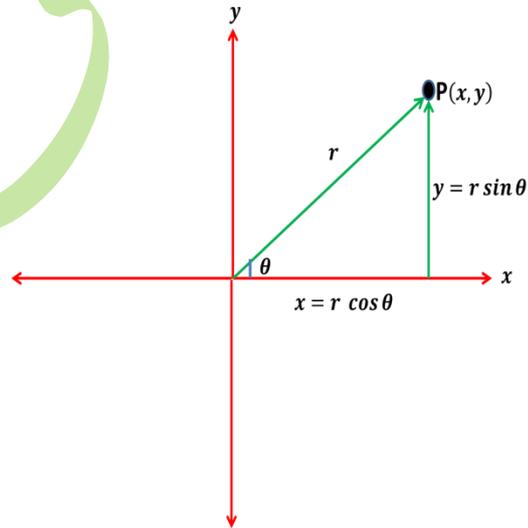
- ١- قانون التبديل للجمع $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- ٢- قانون التجميع للجمع $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- ٣- قانون التبديل للضرب $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- ٤- قانون التجميع للضرب $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- ٥- قانون التوزيع $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

المستوي المعقد The Complex Plane

في الهندسة التحليلية، يمكن رسم النقطة $(5,3)$ كما موضح بالشكل ادناه. كما رأينا، ان الرمز $(5,3)$ قد يعني ايضاً العدد العقدي $5 + 3i$. لهذا فالنقطة $(5,3)$ تدل اما على $(5,3)$ أو $5 + 3i$ كما في الشكل (1). بنفس الطريقة ، اي عدد معقد $x + iy$ (x, y حقيقيان) يمكن تمثيله في المستوي xy كذلك اي نقطة (x, y) في المستوي xy يمكن تمثيلها بـ $x + iy$ بالإضافة الى (x, y) . عندما يستخدم المستوي xy بهذه الطريقة لرسم الاعداد العقدية، فإنه يسمى **بالمستوي المعقد** حيث يكون x يمثل المحور الحقيقي و y المحور.



الشكل (1)



الشكل (2)

عندما يكتب العدد المعقد بالصيغة $z = x + iy$ ، نقول انه بالصيغة الكارتيزية (التعامدية لأن x و y هي الاحداثيات المتعامدة للنقطة التي تمثل العدد في المستوي المعقد). في الهندسة التحليلية، يمكننا تعيين موضع النقطة بإعطاء احداثياتها القطبية (الاسطوانية (r, θ)) بدلاً من احداثياتها الكارتيزية (x, y) كما في الشكل (2).

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad r \geq 0 \quad (4)$$

حيث ان $r \geq 0$, وان r, θ الاحداثيين القطبيين للنقطة (x, y) المقابلة للعدد المعقد $z = x + iy$. يمثل r **طول العدد المعقد** z ويكون

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re}\{z\})^2 + (\text{Im}\{z\})^2}$$

مثال: جد قيمة r للأعداد المعقدة التالية:

$$z = 5 + 10i \quad -1$$

$$z = 3 - 2i \quad -2$$

$$z = -3 \quad -3$$

$$z = 2i \quad -4$$

الحل: يمكن استخراج قيمة r من الصيغة الرياضية التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re}\{z\})^2 + (\text{Im}\{z\})^2}$$

$$1- r = |z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$$

$$2- r = |z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$3- r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$4- r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

اما الزاوية θ التي يصنعها متجه العدد المعقد z مع المحور الحقيقي باتجاه الموجب (بعكس اتجاه عقرب الساعة) وتسمى **بزاوية العدد المعقد** او الزاوية القطبية ويرمز لها بالرمز $\arg\{z\}$ (او تسمى سعة او طور او الازاحة الزاوية للعدد المعقد). ومن المعادلة (4) نكتب العدد المعقد بالصيغة:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (5)$$

ان المعادلة (5) تسمى **الصيغة القطبية** للعدد المعقد. يمكن استخراج زاوية العدد المعقد من خلال المعادلة (4):

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (6)$$

ان الصيغة الرياضية لعلاقة اويلر تعطى بالعلاقة التالية:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

وبالتالي يمكن كتابة العدد المعقد في المعادلة (5) باستخدام صيغة اويلر **بالصيغة الاسية** كما في الشكل التالي:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (7)$$

مثال: جد الصيغة القطبية والأسية للعدد المعقد من الصيغة الكارتيزية $z = 5 - i5$ مع الرسم.

الحل:

أولاً: نقوم بتعيين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي المعقد. ان الجزء الحقيقي موجب والخيالي سالب فأن العدد المعقد z يقع في الربع الرابع للمستوي المعقد

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

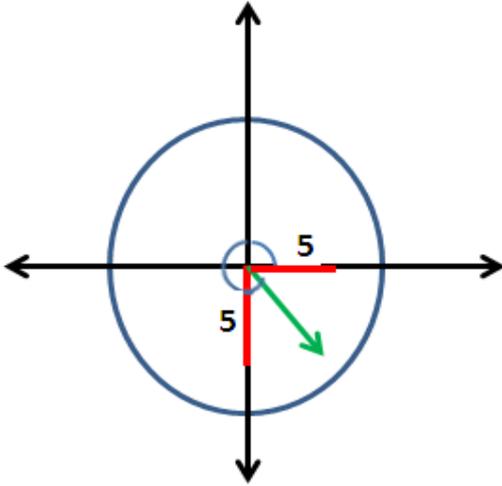
$$r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$



ان قيمة الزاوية θ بالنصف قطرية ، لذلك فأن الصيغة القطبية والأسية للعدد المعقد تكون بالشكل التالية:

$$z = 5\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) = 5\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

مثال: جد الصيغة القطبية والأسية للعدد المعقد من الصيغة الكارتيزية $z = 2 + i2\sqrt{3}$ مع الرسم.

الحل:

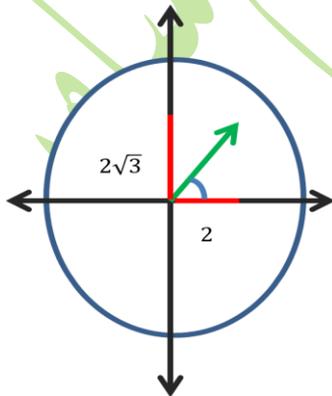
أولاً: نقوم بتعيين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي المعقد. العدد المعقد z يقع في الربع الاول للمستوي المعقد.

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

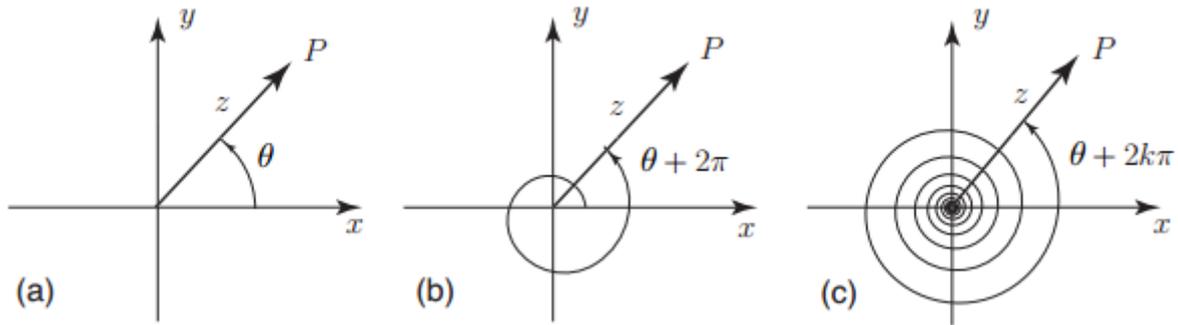
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



لذلك فإن الصيغة القطبية للعدد المعقد تكون بالشكل التالية:

$$z = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ملاحظة: لأي عدد معقد $z \neq 0$ توجد فقط قيمة واحدة للسعة θ في الفترة $0 \leq \theta < 2\pi$. في الشكل ادناه الزاوية θ التي صنعها z مع المحور الموجب كما في الشكل a. لذلك وكما في الشكل b نرى انه يمكن اضافة 2π او 360° ونحصل على نفس z في المستوي xy . في العموم، وكما مبين في الشكل c اي مضاعف صحيح من 2π يمكن اضافته الى او طرحه من θ بدون ان يؤثر على الصيغة الكارتيزية للعدد المعقد.



الشكل (3).

على سبيل المثال

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{الصيغة القطبية}$$

ومع ذلك يمكن كتابة الصيغة اعلاه بالصورة المكافئة التالية:

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) \right)$$

او بصورة اعم:

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

حيث ان k هو عدد صحيح. ان الصيغة الاخيرة تبين بأن الصيغة القطبية للعدد المعقد z ، $\arg\{z\}$ ، يمكن ان تأخذ عدد غير محدد من القيم، كل قيمة تختلف عن الاخرى بـ $2k\pi$ وبالتالي:

$$\arg\{z\} = \text{Arg}\{z\} + 2k\pi$$

هذا ليس اكثر من نتيجة لخواص الدوال المثلثية لأي عدد صحيح k :

$$\cos(\theta + 2k\pi) \equiv \cos(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + 2k\pi) \equiv \sin(\theta),$$

بصورة عامة فإن المعادلة (7) تصبح:

$$z = r (\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)) = r e^{i(\theta+2k\pi)} \quad (8)$$

مثال:

$$\sqrt{3} + i = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

مثال:

$$-\sqrt{3} - i = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) + 2i \sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

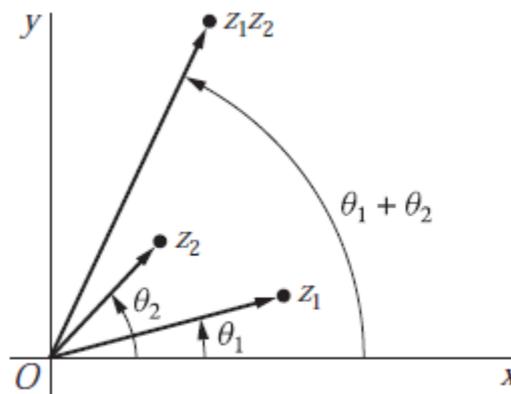
ضرب وقسمة الاعداد المعقدة بالصيغة القطبية والأسية

Multiplying and dividing complex numbers in polar and exponential form

الشكل (4) يوضح رسم لتمثيل حاصل ضرب عددين معقدتين، اذا كان z_1 و z_2 هما عددان معقدان لهما الصيغ القطبية التالية:

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$



الشكل (4).

اولاً: سنجد حاصل ضرب العددين z_1 و z_2

$$z_1 z_2 = [r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

اذن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ومنها نحصل

$$\arg\{z_1 z_2\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2$$

وبدلالة صيغة اويلر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ فإن

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

ثانياً: سنجد قسمة العددين المعقدين

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

ومنها نحصل

$$\arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \arg\{z_1\} - \arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2$$

مثال: جد $\arg\{z_1 z_2\}$ اذا علمت بأن $z_1 = -1$ و $z_2 = i$

الحل:

$$\arg\{z_1 z_2\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

مثال: جد $\arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$ اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لـ z_1 و z_2 هي: $z_1 = -2$ و $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

الحل:

$$\arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \arg\{z_1\} - \arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مثال: جد بالإحداثيات الكارتزية $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ ، اذا علمت بأن الصيغ القطبية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \text{ و } z_1 = 12 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

الحل:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = 48 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$z_1 z_2 = 48 [\cos(\pi) + i \sin(\pi)] = -48 + 0i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{12}{4} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 0 + 3i$$

نظرية دي مويفر De Moivre's theorem

اذا كان z و w عددان معقدان

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

و

$$w = t \cos \varphi + it \sin \varphi$$

عندئذ حاصل ضرب zw

$$zw = (r \cos \theta + ir \sin \theta)(t \cos \varphi + irt \sin \varphi)$$

$$= r t \cos \theta \cos \varphi + irt \cos \theta \sin \varphi + irt \sin \theta \cos \varphi - rt \sin \theta \sin \varphi$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi$$

يكون

$$zw = rt [\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]$$

وكننتيجة من حاصل ضرب zw

$$\arg\{zw\} = \arg\{z\} + \arg\{w\} = \theta + \varphi$$

لحالة خاصة: اذا كان $r = 1, t = 1$ و $\theta = \varphi$ بمعنى $z = w = \cos \theta + i \sin \theta$

نحصل

$$z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \quad eq(9)$$

لكن

$$z^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \quad eq(10)$$

من المعادلتين $eq(9)$ و $eq(10)$

$$z^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين في المعادلة اعلاه بـ $\cos \theta + i \sin \theta$ ، نحصل:

$$z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين في المعادلة اعلاه بـ $\cos \theta + i \sin \theta$ وباستخدام المتطابقة المثلثية اعلاه، نحصل:

$$z^4 = (\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos(4\theta) + i \sin(4\theta)$$

لعدد معين من عمليات الضرب p نحصل

$$z^p = (\cos \theta + i \sin \theta)^p = \cos(p\theta) + i \sin(p\theta)$$

حيث p عدد صحيح. في الحقيقة هذه النتيجة يمكن ان تصح للحالات التي يكون فيها عدد p صحيح سالب ايضاً او عدد منطقي مثل $\frac{1}{2}$. هذه النتيجة تسمى **نظرية دي موافر**.

مثال: باستخدام نظرية دي موافر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية، جد الصيغة الكارتيزية لـ

$$z^8 = (1 + i)^8$$

الحل: لغرض استخراج الصيغة القطبية نتبع:

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي

$$z = 1 + i = r (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

نستخدم نظرية دي موافر:

$$(1 + i)^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \right]^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$(1 + i)^8 = 16(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi))$$

$$(1 + i)^8 = 16(1 + i0)$$

$$(1 + i)^8 = 16 + i0$$

مثال: باستخدام نظرية دي موافر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية، جد الصيغة الكارتيزية لـ

$$z^{10} = (-1 + \sqrt{3}i)^{10}$$

الحل:

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

نكتب $-1 + \sqrt{3}i$ بالصيغة $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ من خلال:

$$-1 + \sqrt{3}i = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موافر:

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{10} = \left[2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^{10} = (2)^{10}\left(\cos\left(10\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(10\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{10} = 1024\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right)\right)$$

$$= 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 1024(-0.5 + 0.866i)$$

جذور العدد المعقد حسب نظرية دي موافر

Roots of a complex number according to De-Mouvre's theorem

سوف نرى كيف يمكننا ان نستخدم التعميم لزاوية العدد المعقد في ايجاد جذور العدد المعقد باستخدام نظرية دي موافر:

مثال: جد جذور العدد المعقد باستخدام نظري دي موافر $z^3 = 8$.

الحل:

$$8 = 8(\cos(0) + i \sin(0))$$

نتوقع ثلاثة جذور لـ z تحقق المعادلة التكعيبية. هكذا اعادة ترتيب، الان نكتب الجانب الايمن كعدد معقد بالصيغة القطبية:

$$z^3 = 8(\cos(0) + i \sin(0))$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π . سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 8(\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

الآن نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موافر نحصل

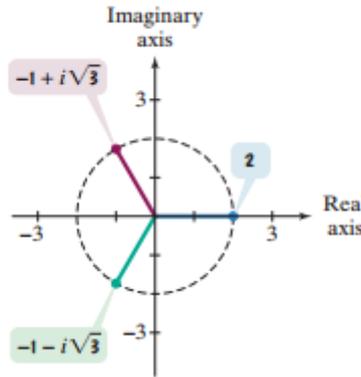
$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \quad z_0 = 2(\cos(0) + i \sin(0)) = 2$$

$$k = 1 \quad z_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \quad z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = -1 - i\sqrt{3}$$



اذن هنالك ثلاثة قيم (اثنان معقدة) لـ $8^{\frac{1}{3}}$. لو عوضنا الجذور في $z^3 = 8$ لحصلنا على ان الطرف الايسر يساوي الطرف الايمن :

$$(-1 - i\sqrt{3})^3 = 8 \quad \text{و} \quad (-1 + i\sqrt{3})^3 = 8 \quad \text{و} \quad 2^3 = 8$$

مثال: جد جذور العدد المعقد باستخدام نظري دي موافر $z^3 = i$.

الحل :

$$z^3 = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π . سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

الآن نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي مويفر نحصل

$$z = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right)^{\frac{1}{3}} = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi+4k\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi+4k\pi}{6} \right) \right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر لاحد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \quad z_0 = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k = 1 \quad z_1 = 1 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k = 2 \quad z_2 = 1 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) = -i$$

مثال: جد جذور العدد المعقد باستخدام نظري دي مويفر $z^2 = 1 + i$.

الحل : المطلوب ايجاد جميع الجذور $z = (1 + i)^{\frac{1}{2}}$.

نقوم اولاً بايجاد قيمة r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{z\})^2 + (\operatorname{Im}\{z\})^2} = \sqrt{2}$$

ومن ثم باستخدام المعادلة التالية نستخرج θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π . سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right) \quad k = 0, \pm 1,$$

الآن نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام نظرية دي موافر نحصل

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right) \right) \end{aligned}$$

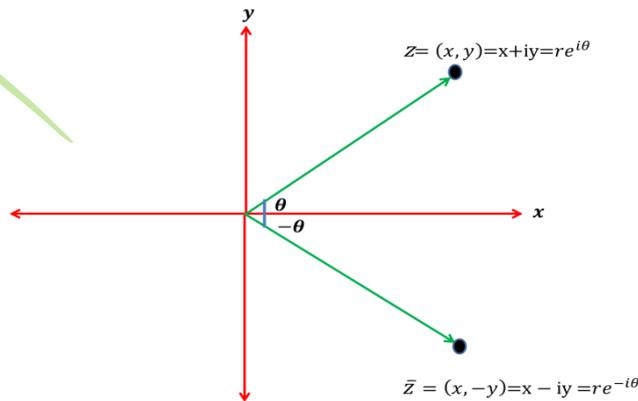
الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستعود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \quad z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) = 1.099 + 0.455i$$

$$k = 1 \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right) = -1.099 - 0.455i$$

المترافق المعقد للعدد المعقد **The complex conjugate of a complex number**

إذا كان $z = x + iy$ ، فإن المترافق المعقد للعدد المعقد z والذي يرمز له بالرمز \bar{z} يكون $\bar{z} = x - iy$. يمثل \bar{z} هندسياً بالنقطة $(x, -y)$ وهو انعكاس بالنسبة الى المحور الحقيقي x وكما بالشكل ادناه:



الشكل (5).

ان زوج النقط (x, y) و $(x, -y)$ في المستوي المعقد هي صورة مرآة لكل منهما حيث ان x هو المرآة كما في الشكل اعلاه. لذا فإن z و \bar{z} بالصيغة القطبية لهما نفس قيمة r ، لكن قيمة θ هي سالبة احدهما الاخر. فاذا كتبنا :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

فإن

$$\bar{z} = r (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = re^{-i\theta} \quad (11)$$

ان مرافق كل عدد حقيقي $z = x + i0$ هو العدد نفسه.

$$\bar{z} = \overline{x + i0} = x - i0 = z$$

اما اذا كان $z = 0 + iy$ عدد تخيلي صرف، فإن مرافقه المعقد هو $-z$

$$\bar{z} = \overline{0 + iy} = 0 - iy = -z$$

اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

وبنفس الطريقة يمكن ان نبرهن على ان

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = x_1 - x_2 - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

اما بالنسبة الى $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ فيكون:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

بالنسبة الى $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad eq(12)$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} \cdot \frac{x_2 + iy_2}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + ix_1y_2 - ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad eq(13)$$

من المعادلات (12) و (13) نحصل على المساواة.

ان حاصل جمع العدد المعقد والمترافق المعقد هو $z + \bar{z} = 2x$ وحاصل طرحهما هو $z - \bar{z} = 2iy$ وبالتالي فإن الجزء الحقيقي والخيالي بدلالة كل من العدد المعقد والمترافق المعقد يكون:

$$Re\{z\} = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$Im\{z\} = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

اما ناتج حاصل ضربهما $z\bar{z}$ فيكون

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = \bar{z}z = |z|^2$$

ومنها نجد ان

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$$

تمرين: افرض ان $z = 4 + 3i$ و $\bar{z} = 4 - 3i$ جد الجزء الحقيقي والخيالي لهما:

$$|z| = |\bar{z}| \text{ حيث ان } \left| \frac{(3+4i)(\overline{2-i})}{1+3i} \right| \text{ مثال بسط (جد ناتج)}$$

الحل:

$$\left| \frac{(3+4i)(\overline{2-i})}{1+3i} \right| = \frac{|3+4i||2-i|}{|1+3i|} = \frac{\sqrt{9+16}\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

مثال: بسط (جد ناتج) $(2+i)(\overline{1+3i}) - 2 + 4i$.

الحل:

$$(2 + i)(\overline{1 + 3i}) - 2 + 4i = (2 + i)(1 - 3i) - 2 + 4i$$

$$= 2 - 6i + i + 3 - 2 + 4i = 3 - i$$

مثال: افرض ان $z_2 = 2 + 5i$ و $z_1 = 4 + 3i$ ، جد الجزء الخيالي للعدد المعقد z_1 وحاصل ضرب $\overline{z_1 z_2}$:

الحل:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(4 + 3i) + (2 + 5i)} = (4 - 3i) + (2 - 5i)$$

$$\overline{6 + 8i} = 6 - 8i$$

$$6 - 8i = 6 - 8i$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{(4 + 3i) - (2 + 5i)} = (4 - 3i) - (2 - 5i)$$

$$\overline{2 - 2i} = 2 + 2i$$

$$2 + 2i = 2 + 2i$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{(-7 + 26i)} = -7 - 26i$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i$$

$$Re\{z_1\} = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(4 + 3i) + (4 - 3i)}{2} = 4$$

$$Im\{z_1\} = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(4 + 3i) - (4 - 3i)}{2i} = 3$$

مثال: جد $(\bar{z}_3)^4$ اذا علمت بأن $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

الحل:

$$(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 \right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 \right]^2 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]^2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 \right] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذر التربيعي للعدد المعقد Square root of complex number

الآن يمكننا أن نستخرج الجذر التربيعي للعدد المعقد، لو فرضنا أن العدد $z = a + ib$ ، فأنا نبحث عن جذور العدد $X = x + iy$ بحيث أن $X^2 = z$ وأن $z = a + ib$:

$$X^2 = (x + iy)^2 = z = a + ib \quad (14)$$

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib \quad (15)$$

من (15) نجد أن

$$x^2 - y^2 = a \quad (16)$$

$$2xy = b \quad (17)$$

من المعادلات أعلاه نجد:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \quad (18)$$

من المعادلات (16) و (17) و (18) نحصل على:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (19)$$

بجمع المعادلتان (16) و (19)

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) \quad (20a)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right)} \quad (20b)$$

ب طرح المعادلتان (16) و (19)

$$2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) \quad (21a)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \quad (21b)$$

لاحظ أن هذه الكميات x و y موجبة أو صفرية بغض النظر عن العلامة a . المعادلات (20) و (21) صحيحة في العموم، قيمتان متعاكستان لـ x واثنان لـ y . ولكن لا يمكن الجمع بين هذه القيم بشكل اعتباطي، بالنسبة للمعادلة (17) ... (21) ليست نتيجة للمعادلات (20) و (21)، لذلك يجب أن نكون حذرين لتحديد x و y بحيث يكون لحاصل ضربهما علامة b وبالتالي ناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: عندما $b \neq 0$

(أ) $b > 0$ حيث ان x و y لهما نفس الإشارة.

(ب) $b < 0$ حيث ان x و y لهما الإشارات مختلفة.

بجذر المعادلة (14) وتعويض المعادلتان (20b) و (21b)

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right) \quad \text{for } b > 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right) \quad \text{for } b < 0$$

الحالة الثانية: عندما $b = 0$

$$X^2 = a$$

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{a} \quad \text{for } a > 0$$

$$X_{1,2} = \pm i\sqrt{a} \quad \text{for } a < 0$$

الحالة الثالثة: عندما $a = b = 0$

$$X_{1,2} = 0$$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -i$

الحل:

$$a = 0, \quad b = -1, \quad b < 0$$

بما ان $b < 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right)$$

وبالتالي فإن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $X_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -5 + 12i$

الحل:

$$a = -5, \quad b = 12, \quad b > 0$$

بما ان $b > 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right)$$

$$X_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{25 + 144})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{25 + 144})} \right)$$

$$X_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(8)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(18)} \right) = \pm(2 + 3i)$$

وبالتالي فإن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +(2 + 3i)$ و $X_2 = -(2 + 3i)$

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد المعقد $X^2 = \frac{-1+5i}{2+3i}$

الحل: نجد حاصل القسمة من خلال الخطوات التالية:

$$\frac{-1 + 5i}{2 + 3i} = \frac{-1 + 5i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{13 + 13i}{4 + 9} = 1 + i$$

بما ان $b > 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right)$$

$$X_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+1})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+1})} \right)$$

$$X_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})} \right)$$

$$X_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})} \right)$$

$$X_2 = - \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})} \right)$$

معادلات متعدد الحدود Polynomial Equations

في الرياضيات، المعادلات الحدودية أو معادلات متعددة الحدود Polynomial equations هي معادلات تأخذ الشكل التالي:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + \dots + a_0 X + a_0 = 0$$

حيث a_i معاملات المعادلة، والهدف هو إيجاد جميع قيم المجهول X . ونقول أن كثير الحدود من الدرجة الأولى إذا كانت أعلى قوة لـ X تظهر في المعادلة هي واحد. وهي من الدرجة الثانية إذا كانت أعلى قوة لـ X هي اثنين وهكذا. إذن نقول أن كثيرة الحدود من الدرجة n إذا كانت أعلى قوة لـ X هي n . تنص المبرهنة الأساسية في الجبر أن لكل معادلة حدودية من الدرجة n يوجد عدد n من الحلول (ذلك إذا احتسبنا الحلول المكررة أي التي يجب أن نعدّها مرتين). كما تجدر الإشارة إلى أن كل معادلة حدودية ذات معاملات تنتمي إلى الأعداد الحقيقية، إن كان لها حلول تنتمي إلى الأعداد المعقدة فإن هذه الحلول تكون دائماً مترافقة أي أنه يكون دائماً هناك حل في شكل $a + ib$ وآخر في شكل $a - ib$. أولاً لنفرض ان لدينا معادلة من الدرجة الثانية:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

لكي نجد جذور العدد X ، ننقل c الى الطرف الاخر والقسمة على a الذي لا يساوي صفر نحصل على:

$$X^2 + \frac{b}{a}X = -\frac{c}{a}$$

نستخدم طريقة اكمال المربع، بإضافة $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ الى طرفين المعادلة اعلاه

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$X + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وبالتالي نحصل على

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة $X^2 + (2i - 3)X + (5 - i) = 0$.

الحل: باستخدام الحل بطريقة الدستور:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i - 3) \pm \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(5 - i)}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{-2i + 3 \pm \sqrt{-4 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$

الآن نحاول ان نجد الجذرين $\sqrt{-15 - 8i}$ من خلال المعادلة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right) \quad \text{for } b < 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{-15 - 8i} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{225 + 64})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{225 + 64})} \right)$$

$$X_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{289})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{289})} \right)$$

$$X_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + 17)} - i \sqrt{\frac{1}{2}(15 + 17)} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(2)} - i \sqrt{\frac{1}{2}(32)} \right) = \pm(1 - 4i)$$

لذلك فالجذران $\pm\sqrt{-15 - 8i}$ هما $\pm(1 - 4i)$ ، عندئذ:

$$X_{1,2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2}$$

وبالتالي فإن الجذرين الخياليين هما: $X_2 = 1 + i$ و $X_1 = 2 - 3i$.

اما بالنسبة الى معادلات متعددة الحدود من الرتب العليا، فنتبع الطرق الموضحة في الأمثلة التالية:

مثال: جد الجذور الحقيقية والمعقدة المترافقة لمعادلة متعددة الحدود التالية:

$$6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 = 0$$

الحل: نأخذ العوامل الاولية لكل من المعاملات $a_4 = 6$ و $a_0 = -10$ وتكون:

عوامل $a_4 = 6$ هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ وعوامل $a_0 = -10$ هي $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. نقسم عوامل a_4 على a_0 على شرط ان لا يكون هنالك قاسم مشترك بين العوامل ما عدا ± 1 فنحصل على الحلول الجذرية الحقيقية الممكنة:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{6}, \pm 10, \pm \frac{10}{3}$$

نحرب الحلول الجذرية الحقيقية في المعادلة متعددة الحدود، نختار فقط الحلول الجذرية التي تجعل المعادلة تساوي الصفر. من خلال ذلك نجد ان $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ هما الجذران الحقيقيان لمعادلة متعدد الحدود. نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$$\begin{array}{r}
 6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 \\
 -\frac{1}{2}) \times \begin{array}{r} 6 \quad -25 \quad 32 \quad 3 \quad -10 \\ \underline{-3 \quad 14 \quad -23 \quad 10} \end{array} \\
 \hline
 \frac{2}{3}) \times \begin{array}{r} 6 \quad -28 \quad 46 \quad -20 \quad 0 \\ \underline{4 \quad -16 \quad 20} \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$6 \quad -24 \quad 30 \quad 0$$

ان ناتج القسمة يقبل القسمة على 6 وبالتالي نحصل على

$$1 \quad -6 \quad 5$$

وبالتالي:

$$6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 = (2X + 1)(3X - 2)(X^2 - 4X + 5)$$

الان نستخدم طريقة الدستور لإيجاد جذور $(X^2 - 4X + 5)$

$$X_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i$$

$$اذن الحلول هي $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ و $X_3 = 2 + i$ و $X_4 = 2 - i$$$

مثال: وجد الجذور الخيالية للمعادلة $X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي -1 و 3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$$\begin{array}{r}
 -1) \times \begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -5 \quad -10 \quad -6 \\ \underline{-1 \quad 1 \quad 4 \quad 6} \end{array} \\
 \hline
 3) \times \begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \end{array}
 \end{array}$$

3 6 6

1 2 2 0

وبالتالي فإن

$$X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0 = (X + 1)(X - 3)(X^2 + 2X + 2)$$

نستخدم طريقة الحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام الدستور $(X^2 + 2X + 2)$ لغرض استخراج الجذور الخيالية:

$$X_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -1$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1 + i$ و $X_4 = -1 - i$

مثال: وجد الجذر التربيعي للمعادلة $2X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 8X + 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي $\frac{1}{2}$ و 3 .

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$\frac{1}{2}) \times$	2	-3	-7	-8	6
		1	-1	-4	-6
3) ×	2	-2	-8	-12	0
		6	12	12	
	2	4	4	0	

وبالتالي فإن

$$2X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 8X + 6 = 0 = (2X - 1)(X - 3)(2X^2 + 4X + 4)$$

نستخدم طريقة الحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام الدستور $(2X^2 + 4X + 4)$ لغرض استخراج الجذور الخيالية: حيث نقسم طرفيها على 2 لنحصل على $(X^2 + 2X + 2)$:

$$X_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = \frac{1}{2}$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1 + i$ و $X_4 = -1 - i$

مثال: وجد الجذر التربيعي للمعادلة $X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0$ اذا علمت بأن الجذر الحقيقي هو 1 .

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$$\begin{array}{r}
 1) \times \quad \quad \quad 1 \quad -7 \quad 19 \quad -13 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad -6 \quad 13 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad -6 \quad 13 \quad 0
 \end{array}$$

وبالتالي فإن

$$X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0 = (X - 1)(X^2 - 6X + 13)$$

نستخدم طريقة الحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام الدستور $(X^2 - 6X + 13)$ لغرض استخراج الجذور الخيالية:

$$X_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = 3 \pm 2i$$

اذن الحلول هي $X_1 = 1$ و $X_2 = 3 + 2i$ و $X_3 = 3 - 2i$

مسائل الفصل الأول

س ١ : جد الصيغة القطبية والاسية للأعداد المعقدة مع الرسم.

$$-١ \quad . z = -5 + 5i$$

$$-٢ \quad . z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

$$-٣ \quad . z = -3i$$

س ٢ : جد بالإحداثيات الكارتيزية $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ ، إذا علمت بأن الصيغ الكارتيزية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad z_1 = 8i$$

س ٣ : باستخدام نظرية دي مويفر للأعداد المعقدة بالصيغة القطبية، جد الصيغة الكارتيزية:

-١

$$.z^{10} = (-1 + \sqrt{3}i)^{10}$$

-٢

$$.z^{15} = (1 + i)^{15}$$

-٣

$$.z^7 = (1 + \sqrt{3}i)^7$$

س ٤ : جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي مويفر لكل من:

$$-١ \quad .z^2 = \sqrt{3} + 3i$$

$$-٢ \quad .z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$$

$$-٣ \quad .z^4 = -4$$

$$-٤ \quad .z^3 = -8i$$

الفصل الثاني

الدوال النظامية البسيطة

المتغير ودوال المتغير المعقد Variable and functions of complex variables

يسمى الرمز z الذي يعبر عن أي عنصر في فئة الاعداد المعقدة بالمتغير المعقد. اذا كان لكل قيمة للمتغير المعقد z توجد قيمة واحدة او عدة قيم للمتغير المعقد w ، فيقال ان w هي دالة لـ z وتكتب:

$$w = f(z)$$

يسمى z بالمتغير المعقد المستقل، بينما w بالمتغير المعقد المعتمد. اذا وجدت لكل قيمة من المتغير المستقل z قيمة واحدة فقط للمتغير المعتمد w ، فأنا نقول ان w دالة وحيدة القيمة للمتغير z او ان $f(z)$ وحيدة القيمة. اما اذا وجدت لكل قيمة مقابلة للعدد z اكثر من قيمة لـ w ، فأنا نقول ان w دالة متعددة القيم او كثيرة القيم للمتغير z . فاذا كانت $w = z^2$ فان لكل قيمة للمتغير z قيمة واحدة فقط w ، اما $w = z^{\frac{1}{2}}$ فان لكل قيمة z توجد قيمتان لـ w .

الدوال العكسية

اذا كان $w = f(z)$ ، فانه يمكن أيضاً أن نعتبر z كدالة في المتغير w وتكتب $z = g(w) = f^{-1}(w)$ وعادة تسمى الدالة f^{-1} بالدالة العكسية المناظرة للدالة f .

التحويلات

اذا كان $w (= u + iv)$ (حيث u و v حقيقيان) دالة وحيدة القيمة في المتغير $z (= x + iy)$ (حيث x و y حقيقيان) فانه يمكن ان نكتب:

$$u + iv = f(x + iy)$$

وبمساواة الجزئيين الحقيقيين والجزئيين الخيلين في الطرفين فأنها تكون مكافئة الى:

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y)$$

اذا اعطينا نقطة مثل P في المستوي z ، فانه توجد نقطة مثل \hat{P} مناظرة في المستوي w . ونقول ان النقطة P نقلت او حولت الى النقطة \hat{P} باستخدام التحويل وتسمى \hat{P} بصورة P .

مثال: أكتب $f(z) = z^2$ على شكل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

الحل:

$$w = u + iv = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وبمساواة الجزئيين الحقيقيين والجزئيين الخيليين في الطرفين فأننا نرى:

$$u = u(x, y) = x^2 - y^2$$

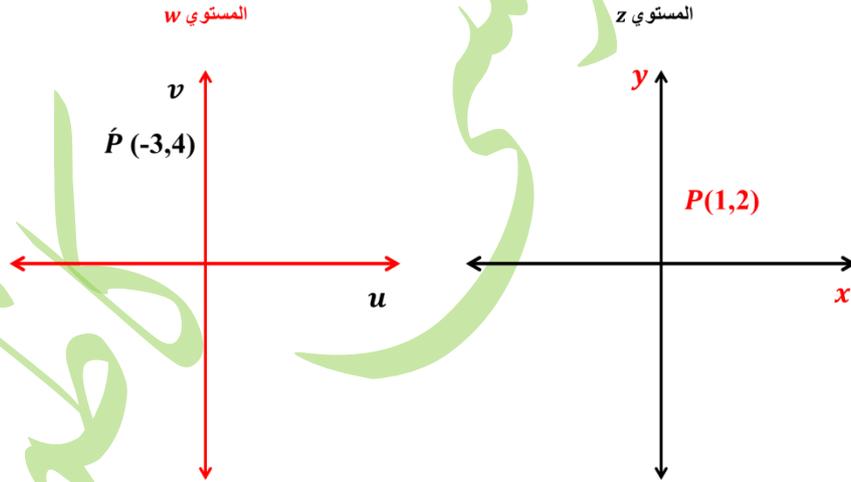
$$v = v(x, y) = 2xy$$

لنقل النقطة $(1, 2)$ في المستوى العقدي z الى النقطة المناظرة لها في المستوى w :

$$u = 1^2 - 2^2 = -3$$

$$v = 2xy = 4$$

اذن تكون النقطة المناظرة في المستوى w هي $(-3, 4)$ وكما في الرسم التقريبي في ادناه:



الشكل (6)

مثال: لديك $w = f(z) = z^2 + 3z$ ، جد u و v واحسب $f(z)$ في $z = 1 + 3i$.

الحل:

$$u = \operatorname{Re}\{f(z)\} = x^2 - y^2 + 3x$$

$$v = \operatorname{Im}\{f(z)\} = 2xy + 3y$$

$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

وهكذا نرى بأن

$$v(1,3) = 15 \text{ و } u(1,3) = -5$$

مثال: لديك $w = f(z) = 2zi + 6\bar{z}$ ، جد u و v واحسب f في $z = \frac{1}{2} + 4i$.

الحل:

$$f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy)$$

$$u(x, y) = 6x - 2y$$

$$v(x, y) = 2x - 6y$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 4i\right) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i$$

وهكذا نرى بأن

$$u\left(\frac{1}{2}, 4\right) = -5$$

$$v\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 23$$

مثال: اعتبر $w = f(z) = z^2$ ، اوجد قيم w المناظرة لكل من:

$$(أ) \quad z = -2 + i \quad ، \quad (ب) \quad z = 1 - 3i$$

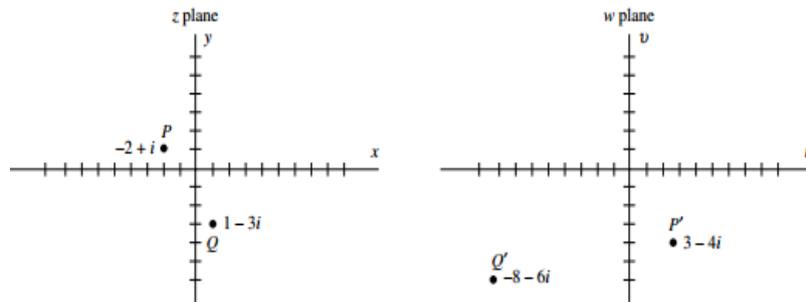
وبين كيف يمكن تمثيل هذا التناظر بيانياً. وبين كيف يمكن تمثيل هذا التناظر بيانياً.

الحل: (أ)

$$w = f(-2 + i) = (-2 + i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

(ب):

$$w = f(1 - 3i) = (1 - 3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$$



النقطة $z = -2 + i$ ، الممثلة بالنقطة P في المستوى z لها صورة $w = 3 - 4i$ الممثلة بالنقطة \hat{P} في المستوى w ، نقول ان P قد نقلت الى \hat{P} بواسطة دالة الرسم او التحويل $w = z^2$. بالمثل $z = 1 - 3i$ قد نقلت الى $w = -8 + 6i$ ، اذن لكل نقطة واحدة في المستوى z توجد نقطة واحدة تمثلها في المستوى w وبالتالي تكون دالة وحيدة القيمة للمتغير z .

الاحداثيات الانحائية

اذا اعطينا التحويل $w = f(z)$ او المكافئ له $v = v(x, y)$ و $u = u(x, y)$ فأنا نسمي (x, y) الاحداثيات المتعامدة بالنسبة الى نقطة ما في المستوى z و (u, v) بالاحداثيات الانحائية للنقطة P في المستوى z .

التحويل الخطي Linear Transformation

يسمى التحويل $w = az + b$ بالتحويل الخطي حيث ان a و b اعداد معقدة و w دالة خطية. هنالك ثلاث انواع من التحويل الخطي يتم فيها تحويل النقاط من المستوى z الى المستوى المعقد w وهي:

1- تحويل النقل (ازاحة بمقدار b) Transport Transformation

إذا كان $a = 1$ و b اختيارية فإن

$$w = f(z) = z + b$$

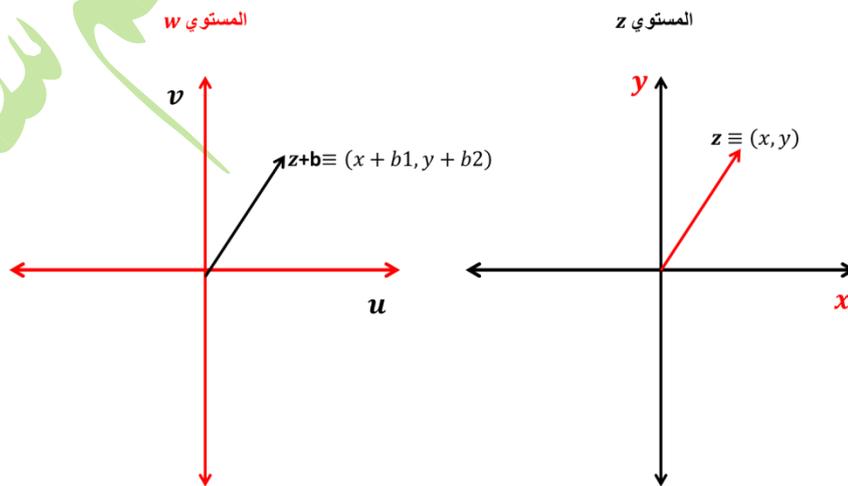
وهنا نلاحظ أن كل نقطة z أزيحت بإضافة العدد b . وبما ان $b = b_1 + ib_2$ فإن

$$w = u + iv = x + iy + b_1 + ib_2$$

$$u = x + b_1$$

$$v = y + b_2$$

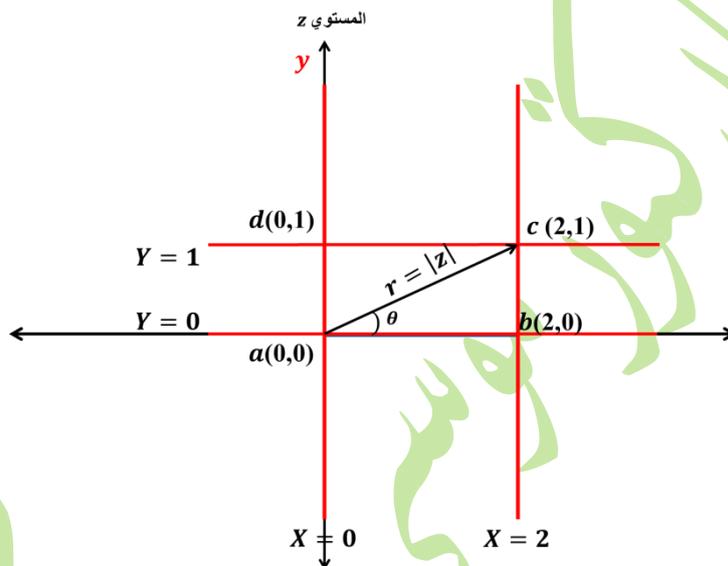
هذا يعني ان النقطة (x, y) في المستوى z هي النقطة $(x + b_1, y + b_2)$ في المستوى w كما في الشكل ادناه



الشكل (7)

مثال: افرض ان لدينا المستطيل الذي تكوّن من تقاطع المستقيمات $X = 0$ و $X = 2$ و $Y = 0$ و $Y = 1$ وكما موضح في الرسم ادناه حيث كل نقطة من نقاط المستطيل تكونت من تقاطع مستقيمين، جد r و θ ومن ثم باستخدام التحويل الخطي حول المستطيل في المستوي z الى المستوي w ، باستخدام تحويل النقل اذا علمت بأن $w = z + 1 - 2i$.

الحل:



الشكل (8)

العدد المعقد z ممثل بالرسم بالنقطة c بحيث ان

$$z = 2 + i \equiv (2,1)$$

نستخرج قيمة r من خلال التالي:

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

نستخرج قيمة θ بالدرجة من خلال:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26.5^\circ$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (0 + i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1, -2)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (2 + i0) + 1 - 2i = 3 - 2i \equiv b'(3, -2)$$

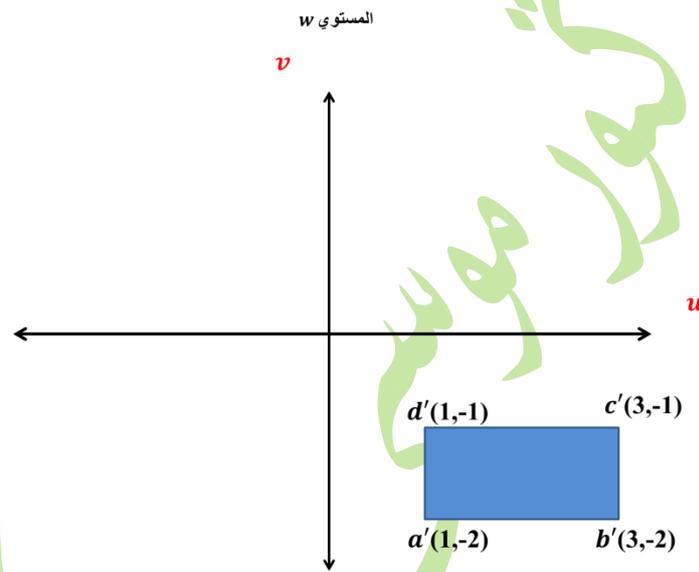
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (2 + i) + 1 - 2i = 3 - i \equiv c'(3, -1)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (0 + i) + 1 - 2i = 1 - i \equiv d'(1, -1)$$

لذلك نعين نقاط المستوى w كما في الشكل ادناه:



الشكل (9)

٢- تحويل التدوير (ازاحة بمقدار $\arg\{a\}$) Rotation Transformation

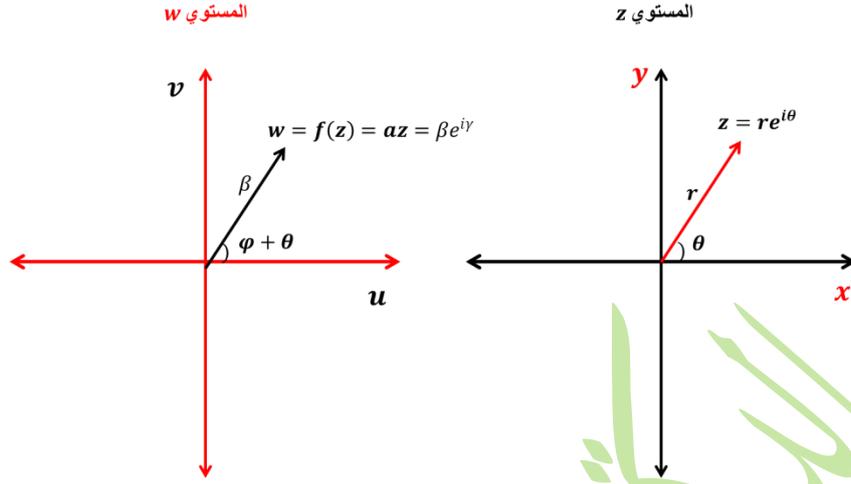
إذا كان $b = 0$ و a اختيارية وهو عدد معقد أي أن

$$w = f(z) = az$$

حيث أن $a = \rho e^{i\varphi}$ و $z = r e^{i\theta}$ ، وعلية يكون

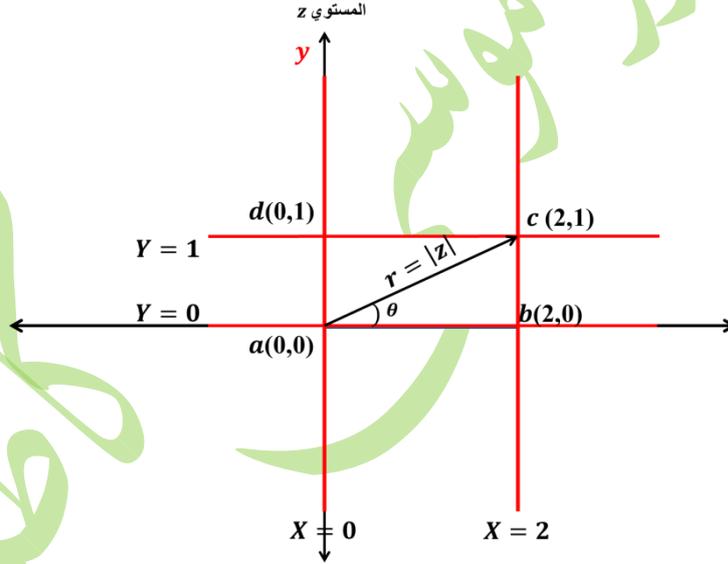
$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

هذا النوع من التحويل يعني تدوير (ازاحة) المتجه z حول نقطة الاصل بزاوية φ حيث $\varphi = \arg\{a\}$ مع تصغير او تكبير هذا المتجه بمقدار ρ حيث $\rho = |a|$.



الشكل (10)

مثال: استعمل التحويل $w = (1 + i)z$ بنقل المستطيل في الرسم ادناه من المستوي z الى المستوي w .



الشكل (11)

الحل:

$$w = f(z) = pre^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\varphi}$$

نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = 26.5^\circ$$

نستخرج ρ و φ من

$$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1}{1} = 45^\circ$$

وبالتالي فإن β والزاوية γ تكون

$$\beta = r\rho = \sqrt{10}$$

$$\gamma = 71.5^\circ$$

لذا فإن $f(z)$ تكون

$$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10} e^{i71.5}$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوى w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوى المعقد z في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (1 + i)(0 + i0) \equiv a'(0,0)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (1 + i)(2 + i0) \equiv b'(2,2)$$

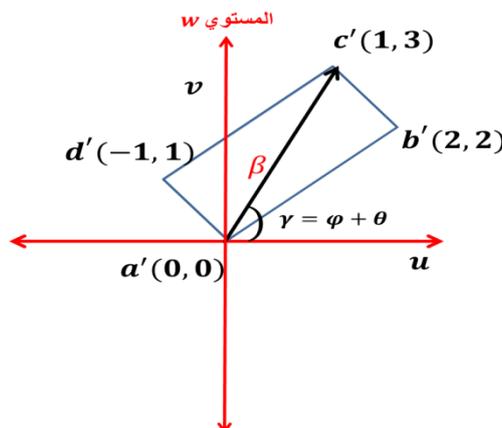
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (1 + i)(2 + i) \equiv c'(1,3)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (1 + i)(0 + i) \equiv d'(-1,1)$$

لذلك نعين نقاط المستوى w كما في الشكل (12) ادناه:

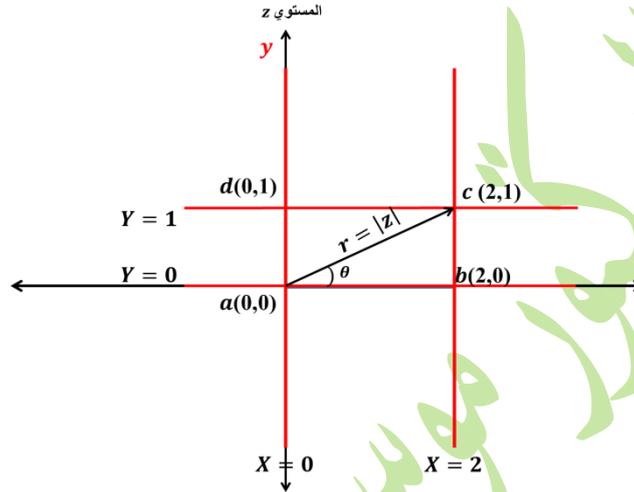


٣- تحويل النقل و التدوير (ازاحة بمقدار b و $\arg\{a\}$)

Transport & Rotation Transformation

يجمع التحويل $w = az + b$ بين تحويل النقل و التدوير وكما مبين في المثال التالي:

مثال: أستخدم التحويل $w = (1 + i)z + (1 - 2i)$ لنقل المستطيل الى المستوي w



الشكل (13)

$$w = f(z) = \rho e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

كما في المثال اعلاه نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = 26.5^\circ$$

$$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1}{1} = 45^\circ$$

نستخرج ρ و φ من

$$\beta = r\rho = \sqrt{10}$$

$$\gamma = 71.5^\circ$$

وبالتالي فإن β والزاوية γ تكون

لذا فإن $f(z)$ تكون

$$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوى w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوى المعقد z في التحويل الخطي $w = (1 + i)z + (1 - 2i)$ ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (1 + i)(0 + i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1, -2)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (1 + i)(2 + i0) + 1 - 2i = 3 - 2i \equiv b'(3,0)$$

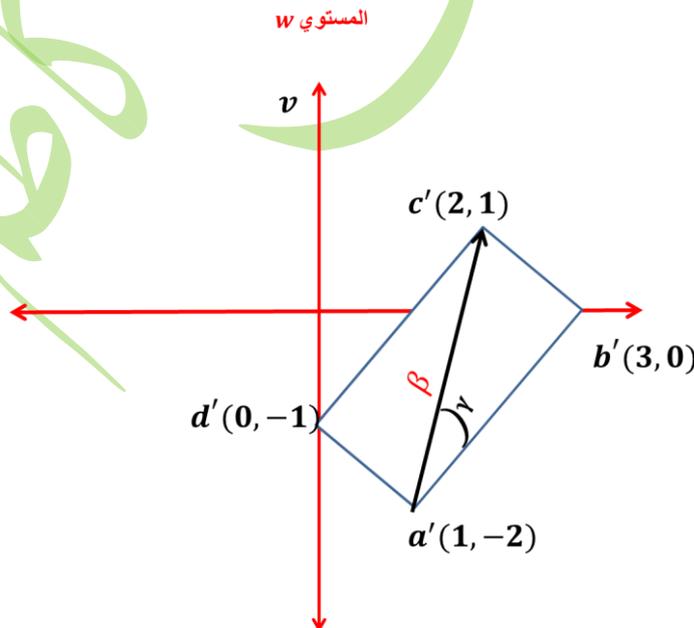
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (1 + i)(2 + i) + 1 - 2i = 3 - i \equiv c'(2,1)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (1 + i)(0 + i) + 1 - 2i = 1 - i \equiv d'(0, -1)$$

لذلك نعين نقاط المستوى w كما في الشكل ادناه:



الدوال البسيطة

١- **الدوال المعقدة الأسية:** تكتب الدالة المعقدة الأسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر كالاتي:

$$f(z) = e^z$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

لحالة $y = 0$ ، فإن الدالة المعقدة الأسية تكون

$$e^z = e^x$$

نلاحظ ان هذه الدالة تتحول الى دالة أسية لمتغيرات حقيقية. اما عندما $x = 0$ ، الدالة المعقدة الأسية تكون

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

وتعرف بصيغة اويلر. ان الدالة الاسية المعقدة تحقق قانون الاشتقاق لكل z

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

يمكن اعادة كتابة صيغة الدالة المعقدة الأسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر بالشكل:

$$f(z) = e^z = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$$

الصيغة القطبية للدالة المعقدة الأسية

$$f(z) = e^z = (\rho \cos \varphi) + i(\rho \sin \varphi)$$

من المقارنة بين الصيغتين نجد ان

$$\rho = e^x$$

$$\varphi = y$$

حيث تقاس y بنصف قطرية وهي الزاوية القطبية للدالة المعقدة الأسية ويرمز لها بالرمز $arg(f(z))$ ويتم حسابها بنفس طريقة حساب θ في الفصل الاول.

اما بالنسبة للقيمة المطلقة للدالة المعقدة الأسية فهي

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |e^z| \\ &= |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| \\ &= |e^x| |(cosy + isiny)| \\ &= e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} \\ |f(z)| &= e^x = \rho\end{aligned}$$

ان المعادلة الاخيرة تتيح لنا حساب ρ بنفس طريقة حساب r من القيمة المطلقة $|z|$ في الفصل الاول. ان $e^x > 0$ لكل عدد حقيقي x لهذا فإن $|e^z| > 0$ وان $e^z \neq 0$ لكل عدد عقدي z . هذا يعني ان مدى الدالة المعقدة الأسية هو كل المستوي المعقد ما عدا نقطة الاصل.

اما الجزء الحقيقي و الخيالي للدالة المعقدة الأسية $e^z = f(z)$ فهما:

$$Re(e^z) = e^x \cos y$$

$$Im(e^z) = e^x \sin y$$

مثال: اكتب $f(z) = e^{z^2}$ بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر، وما الجزء الحقيقي، الخيالي، زاوية والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الأسية؟

الحل: نكتب الدالة الاسية بدلالة الاحداثيات المتعامدة x و y وباستخدام صيغة اويلر، بالشكل التالي:

$$e^{z^2} = e^{(x^2-y^2)+2ixy} = e^{(x^2-y^2)} (\cos(2xy) + i\sin(2xy))$$

لغرض ايجاد الجزء الحقيقي والخيالي، نعيد كتابة المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$e^{z^2} = \left(e^{(x^2-y^2)} \cos(2xy) \right) + i \left(e^{(x^2-y^2)} \sin(2xy) \right)$$

من المعادلة اعلاه ، الجزء الحقيقي يكون:

$$Re(e^{z^2}) = e^{(x^2-y^2)} \cos(2xy)$$

والجزء الخيالي يكون:

$$Im(e^{z^2}) = e^{(x^2-y^2)} \sin(2xy)$$

اما زاوية الدالة المعقدة الأسية تكون:

$$\arg(e^{z^2}) = 2xy$$

والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الأسية تكون:

$$|e^{z^2}| = e^{(x^2-y^2)} \sqrt{\cos^2(2xy) + \sin^2(2xy)} = e^{(x^2-y^2)}$$

مثال: اثبت ان $e^{z+2\pi i} = e^z$.

الحل:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = e^z (1 + i0) \\ &= e^z \end{aligned}$$

مثال: جد حل الدالة الاسية المعقدة $e^z = -1$.

الحل: يمكن ان نكتب (-1) بالصيغة القطبية التالية:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

حيث ان

$$\rho = |e^x| = |e^z| = |-1 + 0i| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الاسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^x (\cos y + i\sin y) = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

نجد ان

$$e^x = 1 \quad x = 0$$

و

$$y = \pi$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \pi + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = i\pi(1 + 2k)$$

مثال: جد حل الدالة الأسية المعقدة $e^{2z} = 1 + i$.

الحل: يمكن ان نكتب $(1+i)$ بالصيغة القطبية التالية :

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

حيث

$$\rho = |e^{2x}| = |e^{2z}| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الأسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^{2x} (\cos 2y + i \sin 2y) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

حيث

$$e^{2x} = \sqrt{2}$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\ln(e^{2x}) = \ln(\sqrt{2})$$

$$2x = \ln(\sqrt{2})$$

$$x = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = \ln(2)^{\frac{1}{4}}$$

$$x = \ln^4 \sqrt{2}$$

و

$$2y = \frac{\pi}{4}$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$2y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi + 8k\pi}{4}$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = \ln\sqrt[4]{2} + i\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

من خواص الدالة الاسية ما يأتي:

$$1- e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$2- \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} =$$

$$3- \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$4- (e^z)^n = e^{nz}$$

حيث ان n عدد صحيح.

من الخواص الاخرى، اذا كان z_1 و z_2 عددين معقدين غير صفرين، حيث

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

من السهولة ان نبرهن ان

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$\ln z_1 z_2 = \ln(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}) = \ln(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) = \ln r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2)$$

لتبسيط المعادلة اعلاه نستخدم

$$\ln r_1 r_2 = \ln r_1 + \ln r_2$$

وبالتالي

$$\ln z_1 z_2 = \ln r_1 + \ln r_2 + i\theta_1 + i\theta_2 = (\ln r_1 + i\theta_1) + (\ln r_2 + i\theta_2)$$

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

وهي ليست لجميع القيم، فعلى سبيل المثال نفرض ان الصيغة الكارتزية لكل من z_1 و z_2 تعطى

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

و

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

نحاول اثبات ان

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

بالنسبة لطرف الايسر

$$\ln z_1 z_2 = \ln \left((-\sqrt{3} + i)(-1 + i\sqrt{3}) \right) = \ln(0 - 4i) = \ln 4 - \frac{\pi}{2}i \quad r = 4, \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

بالنسبة الى الطرف الايمن

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(-\sqrt{3} + i) + \ln(-1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\frac{5\pi}{6} + \ln 2 + i\frac{2\pi}{3} = 2\ln 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

$$\ln z_1 + \ln z_2 = 2\ln 2 + i\frac{3\pi}{2} = \ln 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

نلاحظ ان

$$\ln z_1 z_2 \neq \ln z_1 + \ln z_2$$

لأثبات خلاف اعلاه، نكتب الطرف الايسر بشكل التالي:

$$\ln z_1 z_2 = \ln 4 + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = \ln 4 + i\frac{3\pi}{2}, k = 1$$

وبالتالي نحصل

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

كذلك من الخواص الاخرى هي

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$$

اثبت ذلك بنفس الاسلوب اعلاه. ايضاً من الخواص

$$\ln \left(z^{\frac{1}{m}} \right) = \frac{1}{m} \ln z \quad n = 1, 2, \dots, \dots$$

لأثبت تلك العلاقة نتبع التالي: الصيغة القطبية للعدد العقدي تعطى بالشكل

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

باستخدام تعميم الزاوية القطبية

$$z = r(\cos(\theta + 2\pi k) + i\sin(\theta + 2\pi k))$$

نجد الطرفين بالنسبة الى m

$$\frac{1}{z^m} = r^{\frac{1}{m}}[\cos(\theta + 2\pi k) + i\sin(\theta + 2\pi k)]^{\frac{1}{m}}$$

باستخدام نظرية دي مويفر للطرف الايمن

$$= r^{\frac{1}{m}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right) \right]$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة الأسية

$$\frac{1}{z^m} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right)}$$

من معادلة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي بالصيغة الأسية تكون المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$\ln z^{\frac{1}{m}} = \ln r^{\frac{1}{m}} + i \left(\frac{\theta + 2\pi k}{m} + 2\pi n \right)$$

$$\ln z^{\frac{1}{m}} = \ln r^{\frac{1}{m}} + i \left(\frac{\theta + 2\pi k + 2\pi p}{m} \right) = \frac{1}{m} (\ln r + i(\theta + 2\pi q)) \quad , q = (k + p)$$

$$\ln z^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \ln z$$

من الخواص الاخرى هي

$$e^{\ln z} = z$$

حيث ان الطرف الايسر

$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i\theta} = e^{\ln|z|} e^{i\theta} = |z| e^{i\theta} = r e^{i\theta} = z$$

مثال: اثبت ان

$$\ln(-\ln(i)) = \ln\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}$$

الحل:

نقوم أولاً بحساب $\ln(i)$

$$\ln(i) = \ln(0 + i) = \ln r + i\theta$$

$$\ln(i) = \ln\sqrt{0^2 + 1^2} + i \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)$$

$$\ln(i) = \ln(0^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} + i \tan^{-1}(\infty)$$

$$\ln(i) = \frac{1}{2} \ln(1) + i \frac{\pi}{2}$$

$$\ln(i) = \frac{1}{2} 0 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$$

ثانياً نقوم $\ln(-\ln(i))$

$$\ln\left(-i \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - i \frac{\pi}{2} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - i \frac{\pi}{2}$$

$$\ln(-\ln(i)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \frac{\pi}{2}$$

$$\ln z^n = n \ln z$$

$$\ln(1+i)^2 = 2 \ln(1+i)$$

$$\ln(1+i)^2 = \ln(1+2i-1) = \ln(0+2i) = \ln 2 + i \frac{\pi}{2}$$

$$2 \ln(1+i) = 2 \left[\ln\sqrt{1^2 + 1^2} + i \tan^{-1}\frac{1}{1} \right] = \ln 2 + i \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي:

من الخواص الأخرى هي

وهي ليست بصورة عامة

مثال: اثبت ان

الحل:

بالنسبة للطرف الأيسر

بالنسبة للطرف الأيمن

$$\ln(1+i)^2 = 2\ln(1+i)$$

مثال: اثبت ان

$$\ln((-1+i)^4) \neq 4\ln(-1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$\ln((-1+i)^4) = \ln(((1-i)^2)^2) = \ln(4) + i\pi$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$4\ln(-1+i) = 4 \left[\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} \right] = 2\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i3\pi = 2\ln 2 + i3\pi$$

وبالتالي

$$\ln((-1+i)^4) \neq 4\ln(-1+i)$$

٢- دالة اللوغاريتم المعقدة

الصيغة الاسية للعدد المعقد $z = re^{i\theta}$ ، فان دالة اللوغاريتم الطبيعي له تكون:

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln(e^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

حيث $\ln r$ تمثل دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد الحقيقي الموجب r والذي يكون $r = |z|$ وان $\theta = \arg z$ ، لهذا فان $\ln z$ دالة متعددة القيم للعدد العقدي غير الصفري z . اذا كان φ القيمة الرئيسية لـ $\arg z$ حيث $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ وبالتالي يمكن ان نكتب $\theta = \varphi + 2n\pi$ حيث ان $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ، لهذا يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصورة التالية:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2n\pi)$$

حيث تبين المعادلة اعلاه ان $\ln z$ هو دالة متعددة لقيم z وبعده غير منته من قيم دالة اللوغاريتم، التي لها الجزء الحقيقي نفسه، اما الجزء الخيالي فيختلف بمضاعفات صحيحة من العدد 2π .

عندما $n = 0$ نحصل على ما يسمى بالقيمة الرئيسية لدالة اللوغاريتم وتكتب بالشكل:

$$\ln z = \ln r + i\varphi \quad r > 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

حيث تكون $\ln z$ مفردة القيمة، تحتوي منطقة تعريفها على الاعداد العقدية غير الصفريية، ومداهما هي الشريحة $-\pi < \text{Im}(\ln z) < \pi$.

مثال: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = 1 + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg z = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\ln(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right)$$

مثال: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = \sqrt{3} + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\varphi = \arg z = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right)$$

مثال: اذا علمت بأن صيغة الأسية للعدد العقدي هي $z = re^{i\theta}$ ، اثبت ان

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

الحل:

صيغة الأسية للعدد العقدي هي:

$$z = re^{i\theta}$$

مشتقة صيغة الأسية للعدد العقدي هي:

$$dz = rie^{i\theta} d\theta + e^{i\theta} dr = e^{i\theta} (ird\theta + dr)$$

$$\frac{dz}{e^{i\theta}} = ird\theta + dr \quad (1)$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z تعطى:

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z :

$$d \ln z = \frac{dr}{r} + i d\theta = \frac{1}{r} (i r d\theta + dr)$$

باستخدام (1) تصبح المعادلة اعلاه

$$d \ln z = \frac{1}{z} dz$$

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

٣- دوال القوى المعقدة

تعرف الدالة الأسية a^z ، $a \neq 0$ بالمعادلة:

$$a^z = e^{z \ln a}$$

وعندما $z = 0$ ، تكون $a^0 = 1$ وبخلافه فإن

$$\ln a = \ln|a| + i \arg\{a\}$$

ويكون للدالة الأسية متعددة القيم

$$a^z = e^{z\{\ln|a| + i(\arg\{a\} + 2n\pi)\}}$$

مثال: اثبت ان

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}} \left[\cos\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) \right]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z \ln a}$$

نعيد كتابة $(1+i)^i$ على شكل

$$(1+i)^i = e^{i \ln(1+i)} = e^{i(\ln|a| + i \arg\{a\})}$$

$$= e^{i\{\ln(\sqrt{1^2+1^2}) + i \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)\}}$$

$$= e^{i\{\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}\}} = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i\ln(\sqrt{2})}$$

$$p \ln f = \ln f^p$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}} \left[\cos\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) \right]$$

مثال: اثبت ان

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi} [\cos(\ln(4)) - i \sin(\ln(4))]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z \ln a}$$

$$2i^{(-2i)} = e^{-2i\{\ln(2)+i\frac{\pi}{2}\}} = e^{\pi} [\cos(\ln(4)) - i \sin(\ln(4))]$$

مثال: اذا علمت بأن $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ ، اثبت ان

$$-(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}} [\cos(\pi) - i \sin(\pi)]$$

الحل:

باستخدام $a^z = e^{z \ln a}$

$$-(-i)^i = -1 e^{i\{\ln(1)-i\frac{\pi}{2}\}} = -e^{\frac{\pi}{2}}$$

, where $\ln(1) = 0$

$$-(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}} [\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$$

, where $-1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$

مثال: اثبت ان

$$(1-i)^{4i} = \frac{\cos(\ln(4))}{e^{7\pi}} + i \frac{\sin(\ln(4))}{e^{7\pi}}$$

الحل: باستخدام $a^z = e^{z \ln a}$ ، نعيد كتابة $(1-i)^{4i}$ على شكل

$$(1 - i)^{4i} = e^{4i \{ \ln(\sqrt{2}) + i \frac{7\pi}{4} \}} = e^{-7\pi} e^{4i \ln(\sqrt{2})} = e^{-7\pi} e^{i \ln 4}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1 - i)^{4i} = \frac{\cos(\ln(4))}{e^{7\pi}} + i \frac{\sin(\ln(4))}{e^{7\pi}}, \text{ where } e^{-7\pi} = \frac{1}{e^{7\pi}}$$

٤ - الدوال المثلثية المعقدة

تعرف الدوال المثلثية $\sin z$ و $\cos z$ والدوال الاخرى بدلالة الدالة الاسية للمتغير z كما يأتي:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (1)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (2)$$

من جمع المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

من طرح المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

بالنسبة الى تفاضل كل من $\cos z$ و $\sin z$ فيكون

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{ie^{iz} - (-ie^{-iz})}{2i} = i \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

بالنسبة للدالة المثلثية المعقدة $\cos z$ يمكن بصيغة الرياضية التالية:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

حيث يمكن اثبات العلاقة اعلاه من خلال التالي:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z = x + iy$$

$$\cos z = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2}, \quad ii = -1, -ii = 1$$

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2}$$

$$\cos z = \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i \sin x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

يمكن ايجاد القيمة المطلقة لـ $\cos z$ بشكل التالي:

$$|\cos z| = |\cos(x + iy)| = |\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y|$$

$$= \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}, \quad -ii = 1$$

$$= \sqrt{\cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{1 \cos^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y + 1 \sinh^2 y - \cos^2 x \sinh^2 y}$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

كذلك الحال بالنسبة للقيمة المطلقة لـ $\sin z$ (اختبر نفسك)

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

الآن نريد ان اثبت $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1 + z_2)$

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 =$$

$$= \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} \right) + \left(\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2i \times 2} (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) \right] + \left[\frac{1}{2 \times 2i} (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \right]$$

$$= \frac{[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}] + [e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}]}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2)$$

بطريقة اخرى

$$\begin{aligned}
\sin(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{2i} \\
&= \frac{[(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)] - [(\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)]}{2i} \\
&= \frac{[\cos z_1 \cos z_2 + \cos z_1 i \sin z_2 + i \sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 i \sin z_2] - [\cos z_1 \cos z_2 - \cos z_1 i \sin z_2 - i \sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2]}{2i} \\
&= \frac{\cos z_1 i \sin z_2 + i \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 i \sin z_2 + i \sin z_1 \cos z_2}{2i} = \frac{2i \cos z_1 \sin z_2 + 2i \sin z_1 \cos z_2}{2i} \\
&= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2
\end{aligned}$$

بالنسبة لدالة المثلثية المعقدة ادناه

$$\tan z = \left(\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \right) + i \left(\frac{\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \right)$$

فيكون اثباتها من خلال

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)} = \frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y} \\
&= \frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y} \cdot \frac{\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y}{\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y} \\
&= \frac{\sin x \cos x \cosh^2 y + i \sin^2 x \cosh y \sinh y + i \cos^2 x \sinh y \cosh y - \cos x \sin x \sinh^2 y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \\
&= \frac{\sin x \cos x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + i (\cos^2 x + \sin^2 x) \cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \\
&= \frac{\sin x \cos x + i \cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \\
&= \left(\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \right) + i \left(\frac{\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} \right)
\end{aligned}$$

الآن نحاول ان نثبت ان

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

يكون ذلك من خلال

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \left(\frac{1}{2i} \right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})^3 \\ &= \left(\frac{1}{2i} \right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \left(\frac{1}{2i} \right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= \left(\frac{1}{2i} \right)^3 (e^{3ix} - 2e^{ix} + e^{-ix} - e^{ix} + 2e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= \left(\frac{1}{2i} \right)^3 ((e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} + e^{-ix})) \\ &= -\left(\frac{1}{4} \right)^3 \left(\frac{(e^{3ix} - e^{-3ix})}{2i} - 3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \right) \\ &= \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \end{aligned}$$

مثال: اثبت ان $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

الحل: الدالة المثلثية المعقدة $\sin z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

في الطرف الايسر، المترافق المعقد لدالة المثلثية المعقدة $\sin z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{\sin z} = \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

يمكن كتابة الدالة المثلثية المعقدة $\sin z$:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

الطرف الايمن، المترافق المعقد لدالة المثلثية المعقدة $\sin z$ في المعادلة اعلاه:

$$\begin{aligned}
\sin \bar{z} &= \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^y - e^{-ix}e^{-y}}{2i}, \quad z = x + iy \\
&= \frac{(\cos x + i\sin x)e^y - (\cos x - i\sin x)e^{-y}}{2i} = \frac{(e^y \cos x + e^y i\sin x) - (e^{-y} \cos x - e^{-y} i\sin x)}{2i} \\
&= \frac{e^y \cos x + e^y i\sin x - e^{-y} \cos x + e^{-y} i\sin x}{2i} = \frac{(e^y - e^{-y})\cos x + (e^y + e^{-y})i\sin x}{2i} \\
&= \cos x \frac{(e^y - e^{-y})}{2i} + i\sin x \frac{(e^y + e^{-y})}{2i} = -i\cos x \frac{(e^y - e^{-y})}{2} + \sin x \frac{(e^y + e^{-y})}{2} \\
&= \sin x \frac{(e^y + e^{-y})}{2} - i\cos x \frac{(e^y - e^{-y})}{2} \\
&= \sin x \cosh y - i\cos x \sinh y
\end{aligned}$$

وبالتالي يتساوى الطرفين.
من المتطابقات الأخرى هي

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$1 + \tan^2 z = \sec^2 z$$

$$1 + \cot^2 z = \csc^2 z$$

٥- الدوال المثلثية الزائدية المعقدة

تعرف دالة الجيب الزائدية وجيب التمام الزائدية للمتغير العقدي z بالمعادلتين:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

أما بالنسبة لاشتقاقهما:

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

لدالتين $\sinh z$ و $\cosh z$ خصائص مشابهة لما هي عليه كل من $\sin z$ و $\cos z$ ، نجل بعضها بما يلي:

$$\sinh z = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2} e^x (\cos y + i \sin y) - \frac{1}{2} e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$\sinh z = \cos y \frac{e^x - e^{-x}}{2} + i \sin y \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

وبطريقة مشابهة نجد

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\cosh z = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2} e^x (\cos y + i \sin y) + \frac{1}{2} e^{-x} (\cos y - i \sin y)$$

$$\cosh z = \cos y \frac{e^x + e^{-x}}{2} + i \sin y \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

كذلك فإن

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = 1$$

كذلك فإن

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{+z}}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z$$

أما

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{+z}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

بالنسبة الى

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} \right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \right)$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \frac{e^{z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} + e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{z_1+z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \sinh(z_1 + z_2)$$

بنفس الطريقة

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = |\sinh x \cos y + i \cosh x \sin y|^2$$

$$= \left(\sqrt{\sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y} \right)^2$$

$$= \sinh^2 x \cos^2 y + (1 + \sinh^2 x) \sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x \cos^2 y + 1 \sin^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\sinh(iz) = i \sin z$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z$$

$$\cosh(iz) = \cos z$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

اما الدوال الزائدية الاربع الاخرى، يتم تعريفها بطريقة مشابهة لنظائرها من الدوال المثلثية، بحيث ان

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

مثال: اثبت ان

$$\sinh(z + i\pi) = -\sinh z$$

الحل:

$$\begin{aligned} \sinh(z + i\pi) &= \frac{e^{(z+i\pi)} - e^{-(z+i\pi)}}{2} = \frac{e^z e^{i\pi} - e^{-z} e^{-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^z (\cos\pi + i\sin\pi) - e^{-z} (\cos\pi - i\sin\pi)}{2} = \frac{e^z (-1 + i0) - e^{-z} (-1 - i0)}{2} \\ &= \frac{-e^z + e^{-z}}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z \end{aligned}$$

بنفس الطريقة

$$\cosh(z + i\pi) = -\cosh z$$

ومن اعلاه نستطيع ان نثبت

$$\tanh(z + i\pi) = \frac{\sinh(z + i\pi)}{\cosh(z + i\pi)} = \frac{-\sinh z}{-\cosh z} = \tanh z$$

مثال: اثبت ان

$$1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$$

الحل

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{2} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{2} = 1$$

اذن

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

بالقسمة على $\cosh^2 z$ نحصل على

$$\frac{\cosh^2 z}{\cosh^2 z} - \frac{\sinh^2 z}{\cosh^2 z} = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

$$1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$$

٦- الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة

يمكن تعريف معكوس الدوال الزائدية بدلالة الدالة اللوغاريتمية المعقدة كما كالتالي :

اذا كان $z = \sinh w$ ، فإن

$$z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$$

افرض ان $v = e^w$ وبالتالي:

$$2z = v - \frac{1}{v}$$

$$v^2 - 2zv - 1 = 0$$

$$v = z + (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} = z + e^{\frac{1}{2} \ln(1+z^2)} = z + e^{\frac{1}{2} [\ln|1+z^2| + i \arg(1+z^2)]}$$

$$= z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg(1+z^2)}$$

من التعريف $v = e^w$ اعلاه

$$w = \ln v = \ln \left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg(1+z^2)} \right)$$

وبالتالي:

$$w = \sinh^{-1} z = \ln \left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg(1+z^2)} \right)$$

او يكون $\sinh^{-1} z$ بالصيغة التالية:

$$w = \sinh^{-1} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$$

وبنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع ان نثبت بأن:

$$w = \cosh^{-1} z = \ln \left(z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg(z^2 - 1)} \right)$$

او يكون $\cosh^{-1} z$ بالصيغة التالية:

$$w = \cosh^{-1} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

الان نعمل على ايجاد:

$$w = \tanh^{-1} z$$

$$z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{\frac{e^w - e^{-w}}{2}}{\frac{e^w + e^{-w}}{2}} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$z = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$w = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

$$w = \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

مثال: جد ناتج $\cosh^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$.

الحل:

$$w = \cosh^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \ln \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 1} \right) = \ln \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \right) = \ln \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \ln \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} + i \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$\cosh^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = i \frac{2\pi}{3}, \quad \ln 1 = 0$$

مثال: جد ناتج $\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

الحل:

$$w = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2} + i \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right)\right]}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2} + i\pi\right]}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{i\pi}{2}\right]}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

باستخدام تعريف دالة اللوغاريتم المعقدة

$$= \ln\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) + i \tan^{-1}(1)$$

$$\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = i\frac{\pi}{4}$$

مثال: جد ناتج $\tanh^{-1}(1 + 2i)$.

الحل:

$$w = \tanh^{-1}(1 + 2i) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + 1 + 2i}{1 - 1 - 2i}\right) = \frac{1}{2} \ln(-1 + i) = \frac{1}{4} \ln 2 + i\frac{3}{8}\pi$$

$$\frac{1 + 1 + 2i}{1 - 1 - 2i} = \frac{2 + 2i}{-2i} = \frac{2(1 + i)}{-2i} = \frac{(1 + i)}{-i} = +i(1 + i) = (ii + i) = -1 + i$$

من الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة الأخرى هي

$$1 - w = \operatorname{csch}^{-1} z = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z} \right)$$

$$2 - w = \operatorname{sech}^{-1} z = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \right)$$

$$3 - w = \operatorname{coth}^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

٧- معكوس الدوال المثلثية المعقدة

يمكن تعريف معكوس الدوال المثلثية بدلالة الدالة اللوغاريتمية، لتعريف دالة معكوس دالة جيب للعدد العقدي z :

$$w = \sin^{-1} z$$

يمكن كتابة المعادلة أعلاه

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

وبالتالي:

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

بضرب الطرفين بـ e^{iw} نحصل على

$$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$

ومنها نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في e^{iw}

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

لنفرض ان $v = e^{iw}$ ونعيد كتابة المعادلة أعلاه، وبالتالي:

$$v^2 - 2izv - 1 = 0$$

باستخدام طريقة الدستور

$$v = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$v = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام $a^z = e^{z \ln a}$ بالنسبة الى $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ في المعادلة اعلاه، نحصل

$$v = iz + e^{\left(\frac{1}{2}[\ln|1-z^2| + i \arg\{1-z^2\}]\right)} = iz + e^{\left(\frac{1}{2}\ln|1-z^2| + \frac{i}{2}\arg\{1-z^2\}\right)}$$

$$v = iz + e^{\left(\ln|1-z^2|^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2}\arg\{1-z^2\}\right)}$$

$$v = iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{i}{2}\arg\{1-z^2\}\right)}$$

باستخدام التعريف

$$v = e^{iw}$$

واخذ اللوغاريتم

$$iw = \ln v$$

$$w = \frac{1}{i} \ln v = \frac{1}{i} \ln \left\{ iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\arg\{1-z^2\}} \right\}$$

$$w = \sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left\{ iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\arg\{1-z^2\}} \right\}$$

او

$$w = \sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left\{ iz + \sqrt{1 - z^2} \right\}$$

بنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع اثبات ان

$$\cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} \ln \left\{ z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\arg\{z^2-1\}} \right\}$$

او

$$\cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} \ln \left\{ z + \sqrt{z^2 - 1} \right\}$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$$

$$w = \tan^{-1} z$$

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \right)}{\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \right)} = \frac{1}{i} \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \right)$$

$$iz = \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \right)$$

$$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw}$$

نضرب طرفي المعادلة اعلاه e^{iw} نحصل

$$iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$$

نرتب المعادلة اعلاه

$$ize^{2iw} + iz = e^{2iw} - 1$$

$$ize^{2iw} - e^{2iw} = -1 - iz$$

$$(iz - 1)e^{2iw} = -1 - iz$$

نضرب طرفي المعادلة بـ i

$$-(z + i)e^{2iw} = -(i - z)$$

$$e^{2iw} = \frac{i - z}{z + i}$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$2iw = \ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

$$w = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

$$w = \tan^{-1}z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

مثال: اثبت ان

$$\sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - i \ln(2 + \sqrt{3})$$

الحل:

$$w = \sin^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln\left\{iz + \sqrt{1-z^2}\right\}$$

$$\sin^{-1}(2) = \frac{1}{i} \ln\left(i2 + \sqrt{1-2^2}\right) = \frac{1}{i} \ln(i2 + \sqrt{-3}) = \frac{1}{i} \ln(i2 + i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{i} \ln[i(2 + \sqrt{3})] = \frac{1}{i} [\ln i + \ln(2 + \sqrt{3})] = -i [\ln i + \ln(2 + \sqrt{3})]$$

$$= -i \ln i - i \ln(2 + \sqrt{3}) = -i \left(\ln 1 + i \frac{\pi}{2}\right) - i \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$= -i \left(0 + i \frac{\pi}{2}\right) - i \ln(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - i \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - i \ln(2 + \sqrt{3})$$

مثال: اثبت ان

$$w = \cos^{-1}(i) = \frac{\pi}{2} - i \ln(1 + \sqrt{2})$$

الحل:

$$\cos^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\cos^{-1}(i) &= \frac{1}{i} \ln(i + \sqrt{-1-1}) = \frac{1}{i} \ln(i + i\sqrt{2}) = \frac{1}{i} \ln(i(1 + \sqrt{2})) \\
&= \frac{1}{i} [\ln i + \ln(1 + \sqrt{2})] = -i \ln i - i \ln(1 + \sqrt{2}) \\
&= -i \left(\ln \sqrt{0+1^2} + i \tan^{-1} \frac{1}{0} \right) - i \ln(1 + \sqrt{2}) \\
&= -i \left(\ln 1 + i \frac{\pi}{2} \right) - i \ln(1 + \sqrt{2}) = -i \left(0 + i \frac{\pi}{2} \right) - i \ln(1 + \sqrt{2}) \\
&= \frac{\pi}{2} - i \ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

مثال: اثبت ان

$$w = \tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} \ln 3 + \frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
\tan^{-1} z &= \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{i-z}{z+i} \right) \\
\tan^{-1}(2i) &= \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{i-2i}{2i+i} \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{-i}{3i} \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(-\frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\ln \left(\frac{1}{3} \right) + i\pi \right) = \frac{1}{2i} (\ln(1) - \ln(3) + i\pi) = \frac{1}{2i} (0 - \ln(3) + i\pi) \\
\tan^{-1}(2i) &= \frac{-1}{2i} \ln(3) + \frac{\pi}{2} = \frac{i}{2} \ln(3) + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

من الدوال المثلثية المعقدة المعكوسة الأخرى:

$$1 - \csc^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \right)$$

$$2 - \sec^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} \right)$$

$$3 - \cot^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{i+z}{z-i} \right)$$

$$4 - \sin^{-1}(2) + \cos^{-1}(2)$$

مسائل الفصل الثاني

س ١ : اثبت التالي:

اثبت ماياتي

$$e^{z+\pi i} = -e^z \quad -٣ \quad e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{e} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad -٢ \quad e^{(2+3\pi i)} = -e^2 \quad -٣$$

س ٢ : جد حل الدوال الاسية المعقدة التالية:

$$e^z = 1 \quad -١$$

$$e^z = 2 - 2i \quad -٢$$

$$e^{2z} = i \quad -٣$$

$$e^{4z} = i \quad -٤$$

$$e^z = 1 + i\sqrt{3} \quad -٥$$

س ٣ : اثبت التالي:

$$\ln(1 - i) = \ln(\sqrt{2}) - i \frac{\pi}{4}$$

$$\ln(-1 + i) = \ln(\sqrt{2}) + i \frac{3\pi}{4}$$

ومن ثم اثبت

$$\ln((1 - i)(-1 + i)) = \ln(1 - i) + \ln(-1 + i)$$

و

$$\ln\left(\frac{(1 - i)}{(-1 + i)}\right) = \ln(1 - i) - \ln(-1 + i)$$

س ٤ : اثبت العلاقات التالية:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1 - z_2)$$

$$\cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 + z_2)$$

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2)$$

$$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

$$\sin(-z) = -\sin z$$

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\tan(-z) = -\tan z$$

$$\cot(-z) = \cot z$$

الدكتور محمد موسى
لاظم

الفصل الثالث

تفاضل الدوال العقدية ومعادلات كوشي-ريمان

الدوال التحليلية: يقال أن الدالة $f(z)$ تكون تحليلية في المجال D إذا كانت $f(z)$ معرفة وقابلة للتفاضل في جميع نقاط D . ويقال أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند نقطة $z = z_0$ في D إذا $f(z)$ تحليلية في جوار z_0 .

التفاضل: لتكن $f(z)$ معرفة عند العدد z_0 بالمستوي العقدي، فإن تفاضل $f(z)$ عند z_0 باستخدام التعريف هو:

$$\hat{f}(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right)$$

بشرط ان تكون هذه الغاية موجودة. ويقال للدالة $f(z)$ بانها قابلة للتفاضل عند z_0 عندما يكون التفاضل الدالة عند z_0 موجود.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = z^2$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\hat{f}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \right)$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} \right)$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

الدالة $f(z) = z^2$ معرفة بالمستوي المعقد كله وقابلة للتفاضل في جميع نقاطه.

مثال: جد تفاضل الدالة $f(z) = z^2 - 5z$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

الحل:

$$\hat{f}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{(z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z) - z^2 + 5z}{\Delta z} \right)$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z - z^2 + 5z}{\Delta z} \right)$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z - 5)$$

$$\hat{f}(z) = 2z - 5$$

الدالة $f(z) = z^2 - 5z$ دالة معرفة بالمستوي المعقد كله وقابلة للتفاضل في جميع نقاطه.

مثال: اثبت ان الدالة $f(z) = x + 4iy$ غير قابلة للتفاضل لأي نقطة من نقاط z .

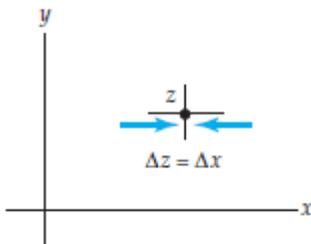
الحل: نفرض ان z نقطة في المستوي المعقد.

$$\hat{f}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{(x + \Delta x) + 4i(y + \Delta y) - x - 4iy}{\Delta x + i\Delta y} \right)$$

$$\hat{f}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right)$$

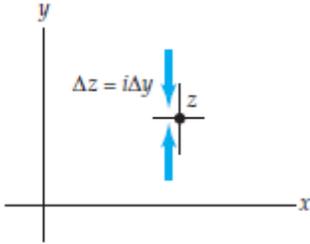
الآن، وكما في الشكل ادناه، لو فرضنا ان $\Delta z \rightarrow 0$ على طول الخط الموازي الى المحور x ، وعندئذ $\Delta z = \Delta x$ و $\Delta y = 0$ وبالتالي:

$$\hat{f}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = 1 \quad (1)$$



من جهة اخرى، وكما في الشكل ادناه، لو فرضنا ان $\Delta z \rightarrow 0$ على طول الخط الموازي الى المحور y ، وعندئذ $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$ وبالتالي:

$$\hat{f}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{4i\Delta y}{i\Delta y} \right) = 4 \quad (2)$$



مما سبق بان القيم في المعادلة 1 و 2 مختلفة، وبالتالي نستخلص بأن الدالة $f(z) = x + 4iy$ غير قابلة للتفاضل عند اي نقطة من نقاط z .

تمارين: باستخدام التعريف، اوجد مشتقة الدالة:

١- $f(z) = z^3 - 2z$ عند نقطة $z = -1$.

٢- $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ، حدد اين تكون الدالة غير تحليلية:

٣- برهن ان $\frac{d}{dz} f(z) = z^2 \bar{z}$ غير موجودة في اي مكان.

٤- جد تفاضل الدالة $f(z) = |z|^2$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

٥- جد تفاضل الدالة $f(z) = \bar{z}$ وهل هي دالة معرفة وقابلة للتفاضل.

قواعد التفاضل

اذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ و $h(z)$ دوال تحليلية في z فإن قواعد التفاضل للدوال المعقدة التالية (مطابقة لقوانين تفاضل الدوال الحقيقية) تتحقق:

1- $\frac{d}{dz} \{f(z) + g(z)\} = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{d}{dz} g(z) = \hat{f}(z) + \hat{g}(z)$

2- $\frac{d}{dz} \{f(z) - g(z)\} = \frac{d}{dz} f(z) - \frac{d}{dz} g(z) = \hat{f}(z) - \hat{g}(z)$

3- $\frac{d}{dz} \{cf(z)\} = c \frac{d}{dz} f(z) = c\hat{f}(z)$, where $c = \text{constant}$

4- $\frac{d}{dz} \{f(z)g(z)\} = f(z) \frac{d}{dz} g(z) + g(z) \frac{d}{dz} f(z) = f(z)\hat{g}(z) + g(z)\hat{f}(z)$

$$5- \frac{d}{dz} \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\} = \frac{g(z) \frac{d}{dz} f(z) - f(z) \frac{d}{dz} g(z)}{\{g(z)\}^2} = \frac{g(z) \dot{f}(z) - f(z) \dot{g}(z)}{\{g(z)\}^2}, \text{ where } g(z) \neq 0$$

$$6- \text{ If } w = f(\xi), \text{ where } \xi = g(z)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \dot{f}(\xi) \frac{d\xi}{dz} = \dot{f}(g(z)) \dot{g}(z)$$

$$7- \text{ If } w = f(\xi), \text{ where } \xi = g(\eta) \text{ and } \eta = h(z)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{d\eta} \frac{d\eta}{dz}$$

تسمى العلاقات ٦ و ٧ بقواعد تسلسل التفاضل دوال الدوال.

$$8- \text{ If } w = f(z)$$

لذلك فإن

$$z = f^{-1}(w)$$

وبالتالي فإن كل من $\frac{dz}{dw}$ و $\frac{dw}{dz}$ تحقق

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

$$9- \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \quad n \text{ an integer}$$

العلاقة اعلاه، لا يمكن تطبيقه للقوى مترافق المعقد،

$$10- \frac{d}{dz} [g(z)]^n = n [g(z)]^{n-1} \dot{g}(z) \quad n \text{ an integer}$$

مثال: استخدم قواعد التفاضل لإيجاد تفاضل الدوال المعقدة التالية:

$$1- f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z \Rightarrow \dot{f}(z) = 12z^3 - 15z^2 + 2$$

$$2- f(z) = \frac{z^2}{4z+1} \Rightarrow \dot{f}(z) = \frac{(4z+1)(2z) - z^2(4)}{(4z+1)^2} = \frac{4z^2+2z}{(4z+1)^2}$$

$$3- \quad f(z) = (iz^2 + 3z)^5 \Rightarrow 5(iz^2 + 3z)^4(2iz + 3)$$

$$4- \quad f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right) \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-z)(1) - (1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

الدالة $f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ دالة تحليلية لكل قيم z ما عدا $z = 1$ حيث ان تفاضل الدالة غير موجود والدالة غير تحليلية. اما النقطة $z = 1$ فتسمى النقطة الشاذة.

مثال: باستخدام قاعدة قسمة دالتين اثبت ان:

$$\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan z &= \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = \frac{\cos z \frac{d}{dz} \sin z - \sin z \frac{d}{dz} \cos z}{(\cos z)^2} \\ &= \frac{\cos z (\cos z) - \sin z (-\sin z)}{(\cos z)^2} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z \end{aligned}$$

مثال: برهن ان

$$\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

الحل:

لنفرض ان $w = \ln \xi$ وان $\xi = f(z)$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{f(z)} f'(z) \quad , \text{where} \quad d\xi = f'(z) dz$$

مثال: برهن ان

$$\frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$$

الحل:

$$\frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(1+z) - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln(1-z)$$

$$\frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z^2}$$

مثال: باستخدام قواعد التفاضل، جد تفاضل حاصل ضرب الدالتين:

$$z \tan^{-1}(\ln z)$$

الحل:

$$\frac{d}{dz} (z \tan^{-1}(\ln z)) = z \frac{d}{dz} (\tan^{-1}(\ln z)) + \tan^{-1}(\ln z)$$

$$= z \left\{ \frac{1}{1 + (\ln z)^2} \right\} \frac{d}{dz} (\ln z) + \tan^{-1}(\ln z) \quad , \text{ where } \frac{d}{dx} (\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= z \left\{ \frac{1}{1 + (\ln z)^2} \right\} \frac{1}{z} + \tan^{-1}(\ln z)$$

$$\frac{d}{dz} (z \tan^{-1}(\ln z)) = \left\{ \frac{1}{1 + (\ln z)^2} \right\} + \tan^{-1}(\ln z)$$

معادلات كوشي – ريمان Cauchy-Riemann Equations

مما سبق، رأينا أن دالة $f(z)$ لمتغير المعقد z تكون تحليلية عند النقطة z عندما تكون الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل عند z وفي كل نقطة في جوار z . هذا المتطلب أكثر من مجرد التفاضل في نقطة ما لأن الدالة المعقدة يمكن أن تكون قابلة للتفاضل عند النقطة z ولكن لا يمكن أن تكون قابلة للتفاضل في أي مكان آخر. تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في مجال D إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للتفاضل في جميع النقاط D . لقد تم تطوير اختباراً آخر لتقصي تحليلية الدالة المعقدة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ يقوم على التفاضل الجزئي لأجزائها الحقيقية والخيالية u و v .

نرى أنه إذا كانت دالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ قابلة للتفاضل عند النقطة z ، فيجب أن تحقق الدالتان u و v زوج من المعادلات التفاضلات الجزئية من الدرجة الأولى.

لنفترض ان $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ قابلة للتفاضل عند $z = x + iy$. عندها في النقطة z تكون التفاضلات من الرتبة الاولى لكل من u و v موجودة وتحقق معادلتا كوشي – ريمان التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

من معادلتا كوشي ريمان بالصيغة الكارتيزية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\hat{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال: حقق معادلتا كوشي ريمان لدالة $f(z) = z^2 + z$ ، حيث ان دالة $f(z)$ تحليلية لكل قيم z .

الحل:

ان $f(z)$ بدلالة x و y تكتب بالشكل التالي:

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$$

وبالتالي فإن

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + x$$

$$v(x, y) = 2xy + y$$

التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u و v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

لذلك بالنسبة لأي نقطة (x, y) في المستوى المعقد، نرى أن معادلتا كوشي ريمان قد تحققت. من معادلتا كوشي ريمان يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\hat{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\hat{f}(z) = 2x + 1 + i2y = 2x + 1 + i2y$$

$$\hat{f}(z) = 2z + 1$$

معيار عدم التحليلية Criterion for Non-analyticity

إذا لم تتحقق معادلتا كوشي-ريمان في كل نقطة من z في المجال D ، فإن الدالة $f(z) = u + iv$ تكون غير تحليلية في D .

مثال: اثبت ان الدالة المعقدة $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ دالة غير تحليلية في كل نقطة من z .

الحل:

$$u(x, y) = 2x^2 + y$$

$$v(x, y) = y^2 - x$$

التفاضلات الجزئية من الرتبة الاولى لكل من u و v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نرى أن معادلات كوشي ريمان تتحقق فقط اذا كانت $y = 2x$ ، لذلك نستنتج بأن الدالة غير تحليلية في اي نقطة من z .

شرط كافية التحليل A Sufficient Condition for Analyticity

بعد ذاتها ، لا تضمن لنا معادلتا كوشي ريمان فيما اذا كانت الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ دالة تحليلية عند النقطة $z = x + iy$. من الممكن أن تتحقق معادلات كوشي-ريمان عند z ومع ذلك قد لا تكون $f(z)$ قابلة للتفاضل عند z . في كلتا الحالتين، فإن $f(z)$ ليست تحليلية عند z ، عندما نضيف شرط الاستمرارية إلى u و v وإلى المشتقات الجزئية الأربعة $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ ، يمكن إظهار أن معادلات كوشي-ريمان ليست ضرورية فقط ولكنها أيضًا كافية لضمان تحليل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ عند z .

معيار التحليلية Analytical standard

افترض أن الدوال $u(x, y)$ و $v(x, y)$ الحقيقية ومستمرة ولديهما مشتقات جزئية من الدرجة الأولى مستمرة في المجال D . إذا حققت u و v معادلات كوشي-ريمان في جميع نقاط D ، فإن الدالة المعقدة

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

تحليلية في D .

مثال: بالنسبة للدالة $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$ ، الدوال $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ و $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

دوال مستمرة ما عدا النقطة $x^2 + y^2 = 0$ أي عند $z = 0$. أكثر من ذلك، التفاضلات الجزئية من الرتبة الأولى تكون مستمرة ما عدا النقطة $x^2 + y^2 = 0$ أي عند $z = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وهكذا نستنتج أن $f(z)$ تحليلية في أي مجال D لا يحتوي على النقطة $z = 0$.

مثال: باستخدام معادلتنا كوشي-ريمان، جد تفاضل الدالة $f(z) = \ln z$.

الحل:

$$f(z) = \ln z = \ln(x + iy) = \ln|x + iy| + i \arg(x + iy)$$

$$w = u + iv = f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

باستخدام تفاضلات كوشي-ريمان وباستخدام قواعد التفاضل نحصل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي تحققت معادلتا كوشي – ريمان. من معادلتا كوشي ريمان يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\hat{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)} - i \frac{y}{(x^2 + y^2)} = \frac{x}{(x^2 + y^2)} - i \frac{y}{(x^2 + y^2)}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{x - iy}{(x^2 + y^2)} = \frac{x - iy}{(x^2 + y^2)} = \frac{1}{z}$$

الصيغة القطبية لمعادلات كوشي – ريمان

Polar form of the Cauchy-Riemann equations

يمكن التعبير عن الدالة المعقدة بدلالة الإحداثيات القطبية. في الواقع ، الصيغة

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

وهي غالبا ما يكون أكثر ملاءمة للاستخدام. في الإحداثيات القطبية تصبح معادلات كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

من معادلتا كوشي ريمان بالصيغة القطبية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\hat{f}(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

مثال: اذا كان لدينا

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

برهن انه يمكن كتابة معادلات كوشي – ريمان بدلالة الاحداثيات القطبية بالشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

الحل:

من الفصل الاول عرفنا ان الجزء الحقيقي والخيالي للعدد المعقد يكتب بدلالة الاحداثيات القطبية بالشكل التالي:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

وان كل من r و θ يمكن ايجادها من خلال الصيغ التالية:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \quad (1)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta \quad (2)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta \quad (3)$$

التفاضل الجزئي $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos\theta \quad (4)$$

من معادلة كوشي ريمان الاولى $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ وباستخدام (1) و (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \cos\theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \sin\theta = 0 \quad (5)$$

من معادلة كوشي ريمان الاولى $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ وباستخدام (2) و (3)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \sin\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \cos\theta = 0 \quad (6)$$

بضرب (5) بـ $\cos\theta$ ونضرب (6) بـ $\sin\theta$ والجمع نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بضرب (5) بـ $-\sin\theta$ ونضرب (6) بـ $\cos\theta$ والجمع نحصل على

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

مثال: حقق معادلتا كوشي ريمان بالصيغة القطبية للدالة $f(z) = \frac{1}{z}$.

الحل:

الصيغة الأسية والقطبية للدالة تعطى

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{\cos\theta}{r} - i \frac{\sin\theta}{r}$$

وبالتالي

$$u(r, \theta) = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$v(r, \theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\cos\theta}{r}$$

وبالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بالنسبة الى

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

اذن

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وبالتالي تحقق معادلتنا كوشي – ريمان بالصيغة القطبية. من معادلتنا كوشي ريمان بالصيغة القطبية يمكن كتابة تفاضل $f(z)$ كالتالي:

$$\hat{f}(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

$$\hat{f}(z) = e^{-i\theta} \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} + i \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \left(-\frac{\cos \theta}{r} + i \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

$$\hat{f}(z) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2} (\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\hat{f}(z) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2} (e^{-i\theta}) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2} (e^{-i\theta}) = -\frac{1}{z^2}$$

الدوال النظامية

يقال لدالة المتغير العقدي $f(z)$ بأنها نظامية عند z_0 اذا كان تفاضلها موجود عند z_0 وعند كل نقطة من z تقع في جوار العدد z_0 . او يقال ان $f(z)$ نظامية في D اذا كانت نظامية عند كل نقاط D .

امثلة:

$$f(z) = z^2 \text{ نظامية في المستوي العقدي كله.}$$

$$f(z) = \bar{z} \text{ ليست نظامية، لأنها غير قابلة للاشتقاق.}$$

$$\text{ماذا بالنسبة الى } f(z) = |z|^2 \text{ ؟؟؟؟}$$

إذا كانت $f(z)$ دالة نظامية في المنطقة D ، فينبغي أن يوجد حول كل نقطة في D جوار تكون فيه الدالة معرفة. وهذا يعني أن تكون z نقطة داخلية في المنطقة. وعندئذ تكون الدالة النظامية معرفة في هذه المنطقة. يقال أن الدالة النظامية كلية إذا كانت نظامية عند كل نقطة بالمستوي العقدي كله.

الدوال التوافقية Harmonic functions

افترض أن الدالة المعقدة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحليلية في مجال D . وأن u و v لديهم مشتقات جزئية مستمرة من الدرجة الثانية في D . بما أن $f(z)$ تحليلية، فإن معادلات كوشي-ريمان تتحقق في كل نقطة z . فإذا فاضلنا معادلتنا كوشي-ريمان، المعادلة الأولى بالنسبة إلى x و الثانية بالنسبة إلى y ، نحصل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

بجمع المعادلتين نحصل

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (L1)$$

إذا تحققت المعادلة أعلاه، فهذا يدل أن $u(x, y)$ دالة توافقية. أما إذا فاضلنا معادلتنا كوشي-ريمان، المعادلة الأولى بالنسبة إلى y و الثانية بالنسبة إلى x ، نحصل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ب طرح المعادلتين، نحصل

$$\nabla^2 v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (L2)$$

إذا تحققت المعادلة أعلاه، فهذا يدل أن $v(x, y)$ دالة توافقية. تسمى المعادلات $(L1)$ و $(L2)$ معادلات لابلاس، ويسمى ∇^2 بثابت لابلاس.

الدوال التوافقية المترافقة

لقد أوضحنا للتو أنه إذا كانت دالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحليلية في المجال D ، فإن أجزائها الحقيقية والخيالية u و v توافقية بالضرورة في D . الآن لنفترض $u(x, y)$ هي دالة حقيقية توافقية في D . إذا كان من

الممكن ايجاد دالة توافقية حقيقية أخرى $v(x, y)$ بحيث u و v يحققان معادلات كوشي-ريمان في المجال D ، تسمى الدالة $v(x, y)$ مترافقة توافقية لـ $u(x, y)$. من خلال الجمع بين الدالات مثل $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ نحصل على دالة تحليلية في D .

مثال: لديك الدالة $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ ، حقق المطالب التالية:

(١) اثبت ان الدالة هي دالة توافقية في كامل المستوي المعقد.

(٢) جد الدالة التوافقية المترافقة $v(x, y)$ للدالة $u(x, y)$.

الحل:

اولاً: الان نحاول ان نثبت ان $u(x, y)$ تحقق معادلة لا بلاس. المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى x .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad (1CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى x .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى y .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5 \quad (2CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى y .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

نلاحظ بان الدالة u حققت معادلة لا بلاس وبالتالي فهي دالة توافقية.

ثانياً: نحاول ايجاد الدالة التوافقية المترافقة $v(x, y)$ للدالة $u(x, y)$. ان من خصائص الدالة التوافقية المترافقة هي ان الدالة تحقق معادلتنا كوشي-ريمان.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

باستخدام (1CR) و (2CR) فإن

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad (3CR)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5 \quad (4CR)$$

التكامل الجزئي للمعادلة (3CR) بالنسبة الى y

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x) \quad (5CR)$$

لاستخراج قيمة $h(x)$ ، نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (5CR) بالنسبة الى x .

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x) \quad (6CR)$$

نعوض المعادلة (6CR) في المعادلة (4CR)، ومن ذلك نحصل:

$$h'(x) = 5 \quad (7CR)$$

نكامل المعادلة (7CR) بالنسبة الى x نحصل

$$h(x) = 5x + C$$

حيث C ثابت حقيقي. لذلك فإن الدالة التوافقية المرافقة للدالة u في المعادلة (5CR) تأخذ الصيغة التالية:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C \quad (8CR)$$

الان نحاول ان نثبت بأن v دالة توافقية من خلال تحقق معادلة لا بلاس (L2)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

اذن الدالة v تحقق معادلة لا بلاس وبالتالي فهي دالة توافقية.

مثال: اذا كان لدينا الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، حيث ان $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ دالة حقيقية. حقق المطالب التالية:

١- اثبت ان الدالة $u(x, y)$ دالة توافقية.

٢- جد الدالة التوافقية المترافقة $v(x, y)$.

٣- عند $y = 0$ و $z = x$ ، أثبت ان الدالة التحليلية $f(z)$ بدلالة z تعطى بالشكل التالي:

$$f(z) = \ln(z^2) + iC$$

حيث ان C هو ثابت التكامل.

الحل:

اولاً: الان نحاول ان نثبت ان $u(x, y)$ تحقق معادلة لا بلاس $(L1)$. المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى x .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad (1CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى x .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

المشتقة الجزئية الاولى للدالة u بالنسبة الى y .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad (2CR)$$

المشتقة الجزئية الثانية للدالة u بالنسبة الى y .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

نلاحظ بان الدالة u حققت معادلة لا بلاس وبالتالي فإنها دالة توافقية.

نحاول ايجاد الدالة التوافقية المترافقة $v(x, y)$ للدالة $u(x, y)$ من خلال تحقيق معادلة لا بلاس $(L2)$. ان من خصائص الدالة التوافقية المترافقة $v(x, y)$ هي انها تحقق معادلتنا كوشي-ريمان.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

باستخدام (1CR) و (2CR) فإن

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad (3CR)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2} \quad (4CR)$$

التكامل الجزئي للمعادلة (3CR) بالنسبة إلى y

$$v(x, y) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + h(x) \quad (5CR)$$

لاستخراج قيمة $h(x)$ ، نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (5CR) بالنسبة إلى x .

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2} + h'(x) \quad (6CR)$$

نعوض المعادلة (6CR) في المعادلة (4CR)، ومن ذلك نحصل:

$$h'(x) = 0 \quad (7CR)$$

نكامل المعادلة (7CR) نحصل

$$h(x) = C$$

حيث C ثابت حقيقي. لذلك فإن الدالة التوافقية المرافقة للدالة u في المعادلة (5CR) تأخذ الصيغة التالية:

$$v(x, y) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + C \quad (8CR)$$

الآن نحاول ان نثبت بأن الدالة v توافقية من خلال تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

وبالتالي فإن v تحقق معادلة لابلاس فهي دالة توافقية. نحاول ان نجد $f(z) = \ln(z^2) + iC$ ، عند $y = 0$ و

$$z = x$$

$$f(z) = \ln(z^2) + iC$$

النقاط المنفردة Single points

هي النقاط التي ليس للدالة فيها مشتقة، فاذا لم تكون لدالة نظامية او التحليلية مشتقة في z_0 ولكن توجد لها مشتقة في نقاط اخرى، تسمى بذلك z_0 نقطة منفردة.

مثال: لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

نفاضل الدالة

$$f'(z) = -\frac{1}{(z+1)^2}$$

الدالة نظامية او تحليلية ما عدا $z = -1$ تصبح الدالة غير معرفة، حيث تمثل نقطة منفردة وحيدة.

الاقطاب Poles

اذا كانت لدينا الدالة

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}$$

حيث تمثل $\psi(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقاط المنطقة تضم $z = z_0$. اذا كان n عدد صحيح موجب، تكون نقطة منفردة للدالة $f(z)$ عند $z = z_0$ ، تسمى هذه النقطة "قطب" من الرتبة n . فاذا كانت $n = 1$ فإن القطب عادة ما يسمى بالقطب البسيط، اما اذا كانت $n = 2$ فإنه يسمى بالقطب المزدوج وهكذا.

مثال: لديك الدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

للدالة نقطتان منفردتان هما

١- قطب بسيط $z = -1$.

٢- قطب مزدوج $z = 3$.

او بطريقة اخرى ايضا لعدد صحيح n بحيث

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n f(z)) = A \neq 0$$

فإن $z = z_0$ يسمى قطباً من الرتبة n . فاذا كانت $n = 1$ فإن القطب عادة ما يسمى بالقطب البسيط، اما اذا كانت $n = 2$ فإنه يسمى بالقطب المزدوج وهكذا.

مثال: لديك الدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

الحل:

عند النقطة المفردة $z = 3$

$$\lim_{z \rightarrow 3} \left((z-3)^2 \frac{z}{(z-3)^2(z+1)} \right) = \frac{3}{4} \neq 0$$

اذن النقطة تمثل $z = 3$ قطباً مزدوجاً للدالة من الرتبة $n = 2$.

عند النقطة المفردة $z = -1$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1) \frac{z}{(z-3)^2(z+1)} \right) = \frac{-1}{16} \neq 0$$

اذن النقطة تمثل $z = -1$ قطباً بسيطاً للدالة من الرتبة $n = 1$.

نقاط التفرعات Branch points

للدوال المتعددة القيم نقاط فرعية منفردة

مثال: $f(z) = (z-3)^{1/2}$ لها نقطة تفرع $z = 3$.

مثال: $f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ لها نقطتا تفرع $z = 1$ و $z = -2$.

النقاط المنفردة القابلة للرفع Individual liftable points

النقطة المنفردة z_0 للدالة $f(z)$ تسمى نقطة منفردة قابلة للرفع اذا كانت غاية الدالة

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

موجودة.

مثال: النقطة $z = 0$ هي نقطة منفردة قابلة للرفع للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ، وذلك لان

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

موجودة.

النقاط المنفردة الاساسية Basic single points

النقطة المنفردة التي ليست قطباً ولا نقطة تفرع او قابلة للرفع تسمى نقطة منفردة اساسية.

مثال: الدالة

$$f(z) = \frac{1}{ez-2}$$

لها نقطة منفردة اساسية هي $z = 2$.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة احادية القيمة ولها نقاط منفردة تدعى بالأقطاب او نقاط منفردة قد تكون اساسية واحياناً غير اساسية، فإن ذلك يتم تحديده من خلال:

١- نقاط منفردة غير اساسية اذا كان

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n f(z)) = A \neq 0$$

٢- نقاط منفردة اساسية اذا كان

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n f(z)) = A = 0$$

تمرين: جد وحدد نوع النقاط المنفردة للدالة:

$$f(z) = \frac{z}{(z + 2i)^2(z - 2i)^2}$$

مسائل الفصل الثالث

١- باستخدام قواعد التفاضل ودوال القوى المعقدة، جد

$$f(z) = (z - 3)^{4z+3}$$

٢- باستخدام قواعد التفاضل، جد

$$f(z) = \{\tanh^{-1}(iz + 2)\}^{-1}$$

٣- باستخدام قواعد التفاضل، جد

$$f(z) = \cos^2(2z + 3i)$$

لديك الدوال التالية

$$١. u(x, y) = x^2 - y^2 - y$$

$$٢. u(x, y) = y^3 - 3xy^2$$

$$٣. u(x, y) = \sin x \cosh y$$

$$٤. u(x, y) = 2x - 2xy$$

$$٥. u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

حقق المطالب التالية:

(أ) اثبت ان الدالة $u(x, y)$ دالة توافقية

(ب) جد الدالة $v(x, y)$ التوافقية المترافقة.

(ت) جد الدالة التحليلية $f(z)$:

الفصل الرابع

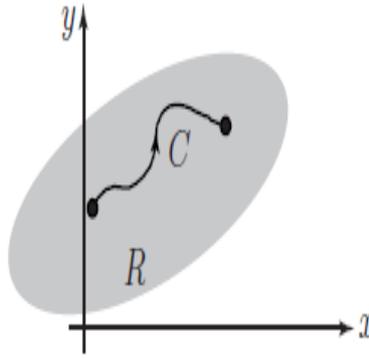
تكامل الدوال المعقدة ونظرية كوشي

التكامل المعقد Complex integral

لتكن الدالة $f(z)$ دالة مستمرة عند كل نقاط المنحني C محدود الطول (انظر الشكل (1))، فإن التكامل الخطي (في متغير واحد) غير المحدد للدالة المعقدة $f(z)$ على مسار المنحني C او التكامل الخطي المحدد للدالة المعقدة $f(z)$ من a الى b على المنحني C يعطى بالعلاقة:

$$\int_C f(z) dz \quad \text{OR} \quad \int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a) \quad (4 - 1a)$$

حيث F ناتج التكامل.



الشكل (1)

في مثل الحالة اعلاه، يقال ان الدالة قابلة للتكامل على المنحني C . لاحظ ان اذا كانت $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المنطقة R واذا كان C يقع في R ، فإن $f(z)$ تكون قابلة للتكامل على المنحني C .

مثال 1: حساب التكامل $\int_1^i z dz$ يكون:

$$\int_1^i z dz = \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_1^i = \frac{1}{2} \{(i)^2 - (1)^2\} = -1$$

مثال ٢: حساب التكامل $\int_1^i z^2 dz$ يكون:

$$\int_1^i z^2 dz = \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_1^i = -\frac{1}{3}(1+i)$$

مثال ٣: حساب التكامل $\int_1^i (z^2 + z) dz$ يكون:

$$\int_1^i (z^2 + z) dz = -\frac{4}{3} - \frac{i}{3}$$

لو كانت $f(z)$ دالة عقدية مستمرة ومعروفة في المنطقة R ، بحيث $z(t) = x(t) + iy(t)$ وان $a \leq t \leq b$ و C تقع كلياً في R وتكون $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ موجودة ومستمرة عند $a \leq t \leq b$. وبالتالي يكون التكامل:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) \frac{dz}{dt} dt \quad (4-1b)$$

مثال ٤: جد قيمة التكامل $\int_C z^2 dz$ على امتداد المسار C المعطى في $z(t) = t + it^2$ وان $0 \leq t \leq 1$.

الحل:

نعوض عن $z(t) = t + it^2$ و $dz = (1 + 2it)dt$ في التكامل

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it) dt$$

لنبسط الكمية تحت التكامل:

$$(t + it^2)^2 (1 + 2it) = (t^2 - 5t^4) + i(4t^3 - 2t^5)$$

وبالتالي:

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t^2 - 5t^4) dt + i \int_0^1 (4t^3 - 2t^5) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^5 \right]_0^1 + i \left[t^4 - \frac{2t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(i - 1)$$

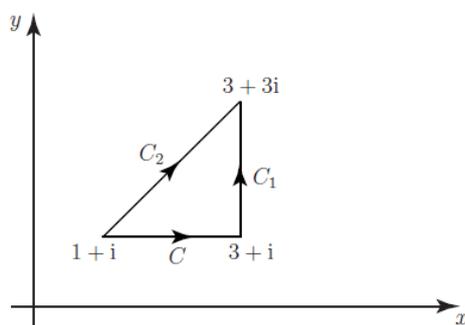
اما اذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$ ، فإن المعادلة (4-1a) ، يمكن التعبير عنها بدلالة التكاملات الخطية للدوال الحقيقية:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) \quad \Leftrightarrow, dz = dx + idy \quad (4-1c)$$

يمكن فصل التكامل في المعادلة (4-1c) إلى الأجزاء الحقيقية والخيالية كالتالي:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) \quad (4-2)$$

مثال ٥: اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ، جد التكامل المعقد $\int_C z dz$ للمسارات الموضحة في الشكل (٢):



الشكل (٢)

الحل:

بالنسبة للمسار C ، نظرًا لأن قيمة y ثابتة ($y = 1$) على طول المسار المحدد الموازي للمحور x ، فإن $z = x + 1i$ ، مما يعني أن $u = x$ و $v = 1$. أيضاً ، نظرًا لأن y ثابتة ، فإن تفاضل الثابت $dy = 0$. باستخدام (4-2):

$$\int_C z dz = \int_1^3 x dx + i \int_1^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 + i \left[\frac{x}{1} \right]_1^3 = 4 + 2i$$

بالنسبة للمسار C_1 ، نظرًا لأن قيمة x ثابتة ($x = 3$) على طول المسار المحدد الموازي للمحور y ، فإن $z = 3 + iy$ ، مما يعني أن $u = 3$ و $v = y$. أيضًا، نظرًا لأن x ثابتة، فإن تفاضل الثابت $dx = 0$. باستخدام (2-4):

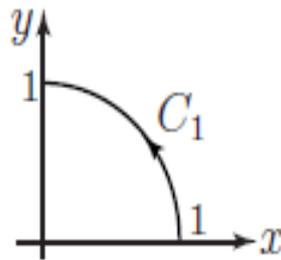
$$\int_{C_1} z dz = \int_1^3 -y dy + i \int_1^3 3 dy = \left[-\frac{y^2}{2} \right]_1^3 + i \left[\frac{3y}{1} \right]_1^3 = -4 + 6i$$

بالنسبة للمسار C_2 ، يكون $x = y$ ، فإن $z = x + ix$ وان $dz = dx + idx$ ، مما يعني أن $u = x$ و $v = x$. أيضًا باستخدام (2-4):

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_1^3 (x dx - x dx) + i \int_1^3 (x dx + x dx) = 2i \int_1^3 x dx = 8i$$

مثال 6: إذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ، جد التكامل $\int_{C_1} z^2 dz$ للحالات التالية:

الحالة الأولى: C_1 جزء من محيط الدائرة الوحدة ($r=1$) في الربع الأول (الشكل ادناه)، هو المسار الذي يتجه عكس اتجاه عقارب الساعة من النقطة $z = 1$ إلى النقطة $z = i$.



الحل: بدلالة الاحداثيات المتعامدة يمكن كتابة z^2 بالشكل التالي:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$dz = dx + idy$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

باستخدام (2 - 4):

$$\int_{z=1}^{z=i} z^2 dz = \int_{z=1}^{z=i} ((x^2 - y^2)dx - 2xydy) + i \int_{z=1}^{z=i} (2xydx + (x^2 - y^2)dy) \quad (4 - 3)$$

من الصعوبة حل هذه التكاملات لارتباط كل من x و y مع بعضها، بما ان C جزء من دائرة الوحدة فإن $z = e^{i\theta}$ وان $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي نعيد كتابة x و y بدلالة متغير واحد θ .

$$x = \cos(\theta) \quad , dx = -\sin(\theta)d\theta$$

$$y = \sin(\theta) \quad , dy = \cos(\theta)d\theta$$

يمكن ان نعبر عن $x^2 - y^2$ و $2xy$ بدلالة 2θ :

$$x^2 - y^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$$

و

$$2xy = 2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$$

الان، لنقطة مثل z تتحرك من $z = x = 1$ الى $z = y = i$ على طول المسار C ، فان قيمة الزاوية المعقدة θ تتغير من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} \int_{z=1}^{z=i} z^2 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(2\theta)\sin(\theta)d\theta - \sin(2\theta)\cos(\theta)d\theta) \\ &+ i \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(2\theta)\sin(\theta)d\theta + \cos(2\theta)\cos(\theta)d\theta) \end{aligned} \quad (4 - 4)$$

يمكن تبسيط التكاملات اعلاه باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$\cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin(3\theta)$$

$$\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos(3\theta)$$

وبالتالي المعادلة (4 - 4) تصبح:

$$\int_C z^2 dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3\theta) d\theta + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3\theta) d\theta \quad (4 - 5)$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cos(3\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + i \left[\frac{1}{3} \sin(3\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}(1 + i)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في المثال ٢.

الحالة الثانية: C_1 يمثل كل محيط دائرة: هنا حدود التكامل في المعادلة (4 - 5) هي من $\theta = 0$ الى $\theta = 2\pi$ ، وبالتالي فإن المعادلة (4 - 5) بعد تغيير حدود التكامل تصبح:

$$\int_C z^2 dz = - \int_0^{2\pi} \sin(3\theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \cos(3\theta) d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cos(3\theta) \right]_0^{2\pi} + i \left[\frac{1}{3} \sin(3\theta) \right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + i(0 - 0) = 0$$

التكامل حول المنحني المغلق Integration around the closed curve

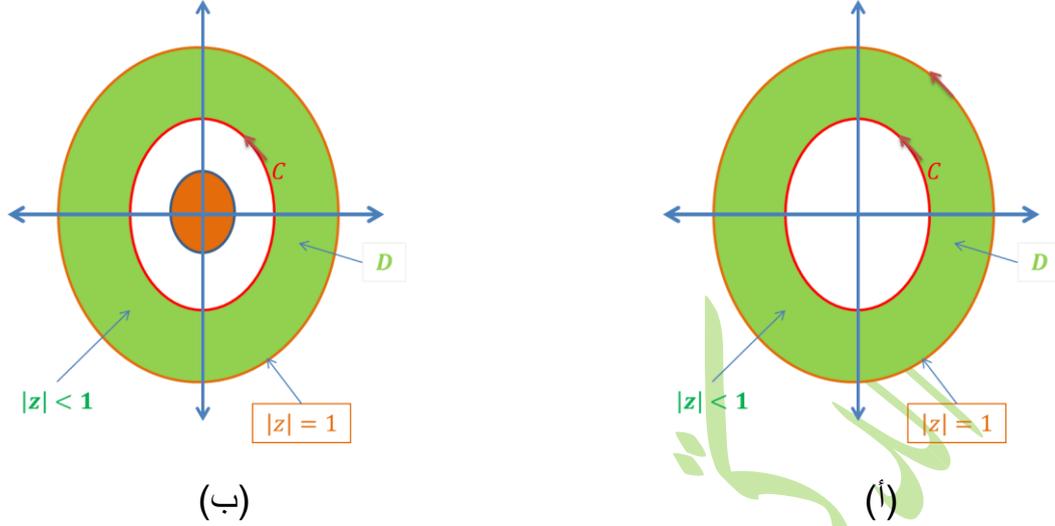
يعبر عن التكامل حول المنحني المغلق (الكنطور) C بالشكل التالي:

$$\oint_C f(z) dz \quad (4 - 10)$$

الكنطور: في التحليل المعقد، هو منحنى في المستوى المعقد. في التكامل الكنتوري، يوفر الكنتور تعريفاً دقيقاً للمنحنيات التي يمكن تحديد التكامل عليها بشكل مناسب. يتم تعريف المنحني في المستوى المعقد كدالة مستمرة عند الفترة المغلقة لخط حقيقي إلى المستوى المعقد: $C \rightarrow [a, b]: z$.

المناطق البسيطة والمعقدة الاتصال

يقال للمنطقة D انها منطقة اتصال اذا كان بالإمكان ايصال نقطتين في المنطقة D بمسار يقع كلياً فيها. ويقال للمنطقة D بانها بسيطة الاتصال اذا كان المنحني المغلق البسيط واقع كلياً في المنطقة D يحيط بنقاط تقع كلياً في المنطقة D ايضاً. تسمى المنطقة D منطقة معقدة الاتصال اذا لم تكن بسيطة الاتصال.



الشكل (٣)

نلاحظ ان في الشكل (أ٣)، تكون المنطقة D (الاخضر) منطقة اتصال بسيطة لان المنحني C يقع كلياً فيها ويحيط بنقاط تقع عليه او داخله تقع كلياً في المنطقة D . اما في الشكل (ب٣)، فإن المنطقة D تكون متعددة الاتصال لان المنحني C يقع كلياً في المنطقة D ولكنه يحيط بنقاط (الدائرة) تقع داخله لا تقع كلياً في المنطقة D .

نظرية كرين Green's theory

نفرض ان $P(x, y)$ ، $Q(x, y)$ ، $\frac{\partial Q}{\partial x}$ و $\frac{\partial P}{\partial y}$ مستمرة في المنطقة المغلقة R تشمل نقاط داخل وعلى كمنور مغلق بسيط C ، فإن صيغة كرين في بعدين تعطى بالعلاقة:

$$\oint (Pdx + Qdy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (4 - 11)$$

نظرية كوشي - نظرية كوشي - كورسات

نظرية كوشي: لتكن $f(z) = u + iv$ تحليلية، ولتكن $f(z)$ مستمرة لكل النقاط داخل او على المنحني C فإن:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (4 - 12)$$

هذه الصيغة تعرف بصيغة كوشي التكاملية. لأثبات صيغة كوشي التكاملية: لتكن R منطقة تشمل جميع نقاط داخل وعلى المنحني C ، يمكننا كتابة المعادلة (4 - 12) باستخدام المعادلة (4 - 2) بالصيغة التالية:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) = 0 \quad (4 - 13)$$

باستخدام صيغة كرين بالمقارنة لكل تكامل في المعادلة اعلاه

$$\oint_C f(z)dz = - \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (4 - 14)$$

من الفصل الثالث، عرفنا بأن تفاضل الدالة $f(z)$ باستخدام معادلات كوشي ريمان يمكن ايجاده:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي فإن (4 - 14) تصبح:

$$\oint_C f(z)dz = - \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (4 - 15)$$

لقد وجد لأول مرة من قبل كورسات، بان ليس من الضروري افتراض استمرارية $f'(z)$ وان مبرهنة كوشي تتحقق اذا افترض ان $f'(z)$ موجودة فقط عند جميع النقاط داخل او على C ولهذا تسمى المبرهنة كوشي-كورسات والتي سيتم ذكرها بدون برهان لها والتي فيها:

مبرهنة كوشي- كورسات: اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقاط داخل وعلى الكنتور المغلق C ، فإن:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (4 - 16)$$

اذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة معقدة الاتصال D ، فإنه لا يمكن ان نستنتج ان

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (4 - 17)$$

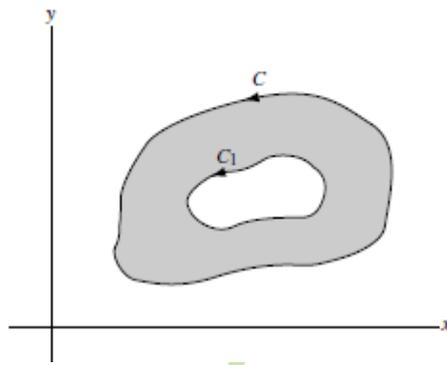
على كل كنتور مغلق بسيط C في D .

بعض نتائج نظرية كوشي:

نظرية ١: لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيين بسيطين مغلقين C و C_1 (حيث C_1 يقع في C كما في الشكل (أ٤)) وكذلك على هذين المنحنيين، فإن

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz \quad (4 - 18)$$

حيث تبين هذه النتيجة انه اذا اردنا ان نكامل $f(z)$ على المنحني C فإنه يمكن ان نكامل على المنحني C_1 بدلاً من C طالما ان $f(z)$ تحليلية في المنطقة بين المنحنيين C_1 و C

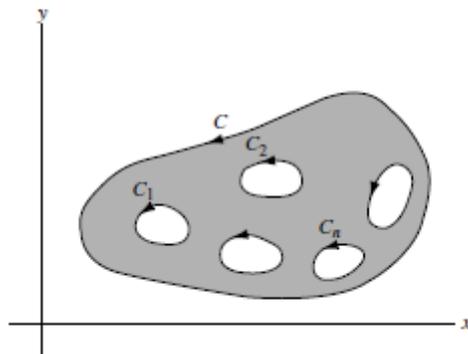


الشكل (أ٤)

النظرية ٢: لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيات بسيطة مغلقة غير متداخلة C و C_1 و C_2 الى و C_n (حيث تقع المنحنيات C و C_1 و C_2 الى و C_n في C كما في الشكل (ب٤)) وكذلك على هذه المنحنيات، فإن

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz + \dots + \dots \oint_{C_n} f(z) dz \quad (4 - 19)$$

تعتبر هذه نظرية تعميماً لنظرية ١.



الشكل (ب٤)

صيغة كوشي التكاملية Cauchy's integral formulas

لتكن D منطقة بسيطة الاتصال ولتكن نقطة ثابتة في D ، فإذا كانت دالة تحليلية في D فإن الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ لا يمكن ان تكون تحليلية عند z_0 . اي ان $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ لا يساوي صفراً بصورة عامة على المنحني C يشمل z_0 . وكما هو معروف من نظرية كوشي لمنطقة بسيطة الاتصال ان لهذا التكامل القيمة نفسها على جميع مسارات C حول z_0 . لتحديد قيمة هذا التكامل نأخذ الصيغ التكاملية:

صيغة كوشي التكاملية 1 Cauchy's integral formula 1

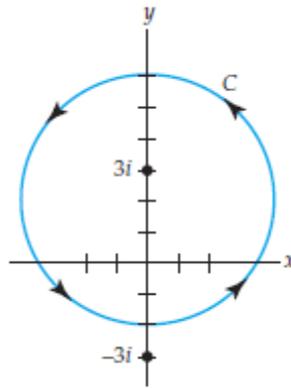
لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C ، مأخوذاً بالاتجاه الموجب، فإذا كانت z_0 نقطة داخل C ، فإن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad z_0 \in C \quad (4-20)$$

مثال ٧: طبقاً لنظرية كوشي التكاملية ١، جد

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$$

حيث C مأخوذ باتجاه الموجب كما مبين في الشكل ادناه، يمثل دائرة $|z-2i|=4$ بنصف قطر 4 وتم ازاحة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ على المحور y الى الاعلى بمقدار $2i$.



الحل: بتحليل المقام $z^2+9=(z-3i)(z+3i)$ ، نرى ان النقطة $z=3i$ فقط تقع داخل الكنتور C المتمثل $|z-2i|=4$. لذلك فإن

$$f(z) = \frac{z}{z+3i}$$

لدينا $z - z_0 = z - 3i$ ، وان $f(z)$ عند z_0 تتمثل بـ $f(z_0)$

$$f(z_0) = \frac{3i}{3i + 3i} = \frac{1}{2}$$

يمكن كتابة التكامل

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2 + 9} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{(z-3i)} dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية ١، فإن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z-3i} dz$$

بترتيب المعادلة اعلاه

$$2\pi i \frac{1}{2} = \oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z-3i} dz$$

وبالتالي فإن

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2 + 9} dz = \pi i$$

مثال ٨: باستخدام صيغة كوشي التكاملية، اثبت ان

$$\oint_C \frac{z}{(z^2 - 9)(z + i)} dz = -\frac{\pi}{5}$$

حيث C مأخوذ باتجاه الموجب كما مبين في الشكل ادناه، يمثل دائرة $|z| = 2$ بنصف قطر 2 ومركزها يقع عند $(0,0)$.

الحل: : بتحليل المقام $(z^2 - 9)(z + i) = (z - 3)(z + 3)(z + i)$ ، نرى ان النقطة $z = -i$ فقط تقع داخل الكنتور C المتمثل $|z| = 2$. لذلك فإن

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 9}$$

لدينا $z - z_0 = z + i$ ، وان $f(z)$ عند z_0 تتمثل بـ $f(z_0)$

$$f(z_0) = \frac{-i}{(-i)^2 - 9} = \frac{i}{10}$$

يمكن كتابة التكامل بالشكل

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2 - 9)(z + i)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2 - 9} \frac{1}{z + i} dz$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ١، فإن

$$2\pi i f(z_0) = \oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2 - 9} \frac{1}{z + i} dz$$

بترتيب المعادلة اعلاه

$$2\pi i \frac{i}{10} = \oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2 - 9} \frac{1}{z + i} dz$$

وبالتالي فإن

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2 - 9)(z + i)} dz = -\frac{\pi}{5}$$

مثال ٩: باستخدام صيغة كوشي التكاملية ١، جد

$$\oint_C \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz$$

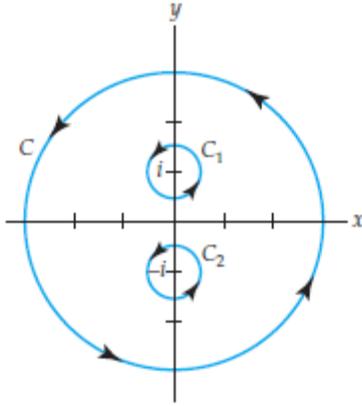
حيث ان C دائرة $|z| = 3$ بنصف قطر 3 مركزها عند $(0,0)$ ، مأخوذ باتجاه الموجب.

الحل: نبسط لكي نستخدم صيغة كوشي التكاملية ١. بتحليل المقام $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ ، نرى ان كل من $z = i$ و $z = -i$ تقع داخل C . لذلك بالنسبة لبعض $A, B \in \mathbb{C}$ لدينا ما يلي:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z^2 - i^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{A}{z - i} + \frac{B}{z + i} = \frac{A(z + i) + B(z - i)}{(z - i)(z + i)}$$

لذلك من $1 = A(z + i) + B(z - i)$ نجد، عند $z = i$ فإن $A = \frac{1}{2i}$ ، وعند $z = -i$ فإن $B = -\frac{1}{2i}$. لذلك فإن:

$$\frac{1}{(z^2 + 1)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right)$$



أن $f(z) = z^2 - 1$ في كلا التكاملين، وبالتالي باستخدام (19 - 4)

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{2i} \left(\oint_{C_1} \frac{z^2 - 1}{z - i} dz - \oint_{C_2} \frac{z^2 - 1}{z + i} dz \right)$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ١:

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{2i} (2\pi i f(z_0 = i) - 2\pi i f(z_0 = -i))$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{2i} (2\pi i (-2 + 2)) = 0$$

مثال ١٠: باستخدام صيغة كوشي التكاملية، جد

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z^2 + 1)} dz$$

حيث ان C دائرة $|z| = 2$ بنصف قطر 2 مركزها عند $(0,0)$ ، مأخوذ بالاتجاه الموجب.

الحل: نبسط لكي نستخدم صيغة كوشي التكاملية ١. بتحليل المقام $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ ، نرى ان كل من $z = i$ و $z = -i$ تقع داخل C . لذلك بالنسبة لبعض $A, B \in \mathbb{C}$ لدينا ما يلي:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z^2 - i^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{A}{z - i} + \frac{B}{z + i} = \frac{A(z + i) + B(z - i)}{(z - i)(z + i)}$$

لذلك من $1 = A(z + i) + B(z - i)$ نجد، عند $z = i$ فإن $A = \frac{1}{2i}$ ، وعند $z = -i$ فإن $B = -\frac{1}{2i}$. لذلك
فإن:

$$\frac{1}{(z^2 + 1)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

أن $f(z) = ze^z$ ، لذا بواسطة صيغة كوشي التكاملية:

$$\oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{2i} \left(\oint_{C_1} \frac{ze^z}{z-i} dz - \oint_{C_2} \frac{ze^z}{z+i} dz \right)$$

$$= \frac{1}{2i} (2\pi i f(z_0 = i) - 2\pi i f(z_0 = -i)) = \frac{1}{2i} (2\pi i (ie^i) - 2\pi i (-ie^{-i}))$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi (ie^i + ie^{-i}))$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^i + e^{-i}}{2} \right)$$

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z^2 + 1)} dz = 2\pi i \cos(1)$$

مثال: باستخدام صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات، جد

$$\oint_C \frac{z+1}{(z^4 + 2iz^3)} dz$$

حيث ان C دائرة $|z| = 1$ بنصف قطر 1 مركزها عند $(0,0)$ ، التكامل مأخوذ باتجاه الموجب.

الحل: من خلال فحص مقام الكمية تحت التكامل $(z^4 + 2iz^3) = z^3(z + 2i)$ ، نجد أنها تكون غير تحليلية عند $z = 0$ و $z = -2i$ وان فقط تقع في داخل الكنتور C ، لذلك:

$$\frac{z+1}{(z^4 + 2iz^3)} = \frac{z+1}{z^3(z+2i)} = \frac{z+1}{z^3}$$

حيث ان $z_0 = 0$ وان $n = 3 - 1 = 2$ وكذلك فإن $f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$ ، وان

$$\hat{f}(z) = \frac{2-4i}{(z+2i)^3} = \frac{2-4i}{z^3 + 6iz^2 - 10z - 8i}$$

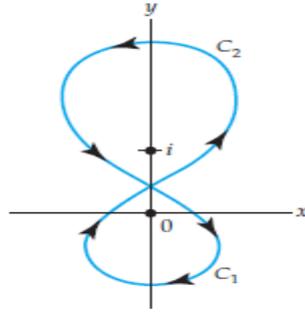
$$\dot{f}(z_0 = 0) = \frac{2i - 1}{4i}$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات، نجد

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z^4+2iz^3)} dz = \frac{2\pi i}{2!} \dot{f}(z_0=0) = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}$$

مثال: للمنحنى C على شكل رقم 8 المبين في الشكل ادناه وباستخدام صيغة كوشي التكاملية للتفاضلات، جد

$$\oint_C \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz$$



الحل: على الرغم من ان ليس كنتور بسيطاً، الذي هو مكون من كنتورين مغلقين بسيطين $C1$ و $C2$ كما موضح في الشكل اعلاه. ان اتجاه $C1$ يكون باتجاه عقرب الساعة (بعكس اتجاه عقارب الساعة) او بالاتجاه **السالب**.

$$\oint_C \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = - \oint_{C1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz + \oint_{C2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = -I1 + I2$$

لحساب I1: هنا لدينا $z_0 = 0$ و $n = 0$

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{(z-i)^2} = \frac{z^3 + 3}{z^2 - 2iz - 1}$$

لا وجود للمشتقة لان $n = 0$ لذلك كأنما نستخدم صيغة كوشي التكاملية،

$$f(z_0 = 0) = -3$$

$$I1 = \oint_{C1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = 2\pi i f(z_0 = 0) = -6\pi i$$

لحساب I2: هنا لدينا $z_0 = i$ و $n = 1$ ،

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{z}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{2z^3 - 3}{z^2}$$

$$\hat{f}(z_0 = i) = 3 + 2i$$

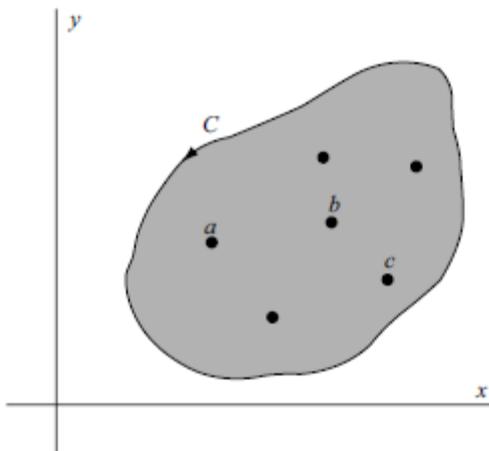
$$I2 = \oint_{C2} \frac{z^3 + 3}{(z - i)^2} dz = 2\pi i \hat{f}(z_0 = i) = -4\pi + 6\pi i$$

$$\oint_C \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2} dz = -(-6\pi i) - 4\pi + 6\pi i = -4\pi + 12\pi i$$

نظرية المتبقي وحساب التكاملات المحددة بطريقة نظرية الدوال المعقدة

نظرية المتبقي

نفرض أن الدالة $f(z)$ دالة احادية القيمة وتحليلية داخل أو على المنحني المغلق البسيط C ما عدا في عدد محدود من النقاط $z = a$ ، $z = b$ ، و $z = c$ ، والتي لها المتبقيات المعطاة بـ $R(z = a)$ و $R(z = b)$ و $R(z = c)$ ، كما في الشكل (٥):



الشكل (٥)

تنص نظرية المتبقي على

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R(z = a) + R(z = b) + R(z = c)] \quad (4 - 22)$$

لذلك فإن التكامل $f(z)$ حوال المنحني C يكون مساوي الى حاصل ضرب $2\pi i$ من المرات لمجموع المتبقيات عند جميع النقاط المنفردة a, b, c على الترتيب والتي تقع بأكملها داخل C . الشكل (٦) يوضح الدوائر C_1, C_2 و C_3 التي مركزها عند النقاط المنفردة a, b, c على الترتيب والتي تقع بأكملها داخل C ، من النظرية ٢ التي تمثلها

$$(4 - 19)$$

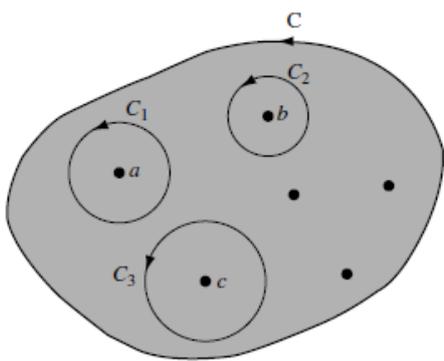
$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \dots \quad (4 - 23)$$

من المعادلتين (4 - 22) و (4 - 23)، نجد ان:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi iR(z = a)$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi iR(z = b)$$

$$\oint_{C_3} f(z)dz = 2\pi iR(z = c)$$



الشكل (٦)

لنقطة منفردة مثل $z = a$ ، لكي نحسب متبقي الدالة $f(z)$ الذي يمثله $R(z = a)$ من العلاقة التالية:

$$R(z = a) = \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{1}{(n - 1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [(z - a)^n f(z)] \right\} \quad (4 - 24)$$

حيث n تمثل رتبة النقطة المنفردة او رتبة القطب. لحالة القطب البسيط ($n = 1$)، فإن العلاقة (24 - 4) تصبح:

$$R(z = a) = \lim_{z \rightarrow a} \{(z - a)f(z)\} \quad (4 - 25)$$

مثال ١٣: احسب التكامل التالي حسب نظرية المتبقي

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz \quad C: |z| = 3$$

الحل: ان الدالة

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$$

لها قطب مزدوج $n = 2$ عند $z = 0$ واخر بسيط $n = 1$ عند النقاط $z = -1 + i$ و $z = -1 - i$ بالنسبة للقطب المزدوج $n = 2$ عند $z = 0$ من المعادلة (24 - 4) وباستخدام تفاضل قسمة دالتين، يكون

$$R(z = 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^2 \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right] \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{zt}}{(z^2 + 2z + 2)} \right] \right\} = \frac{t - 1}{2}$$

بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند النقاط $z = -1 + i$ و $z = -1 - i$ ، من المعادلة (25 - 4)، يكون

$$R(z = -1 + i) = \lim_{z \rightarrow -1 + i} \left\{ (z - (-1 + i)) \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$R(z = -1 - i) = \lim_{z \rightarrow -1 - i} \left\{ (z - (-1 - i)) \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

من المعادلة (22 - 4)

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz = 2\pi i \left[\frac{t - 1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} + \frac{e^{(-1-i)t}}{4} \right] = 2\pi i \left(\frac{t - 1}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \cos(t) \right)$$

مثال ١٤: طبقا لنظرية المتبقي، جد التكامل التالي:

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz \quad , C: |z| = 3$$

بتحليل المقام $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ ، نرى ان كل من $z = i$ و $z = -i$ تقع داخل C .

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z^2 - i^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)}$$

يوجد نقطتان منفردتان (قطبان بسيطان) $z = i$ و $z = -i$. بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند النقط $z = i$ و $z = -i$ ، من المعادلة (25 - 4)، يكون

$$R(z = i) = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} \right\} = \frac{1}{2i}$$

$$R(z = -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \left\{ (z + i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} \right\} = \frac{-1}{2i}$$

من المعادلة (22 - 4)

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{-2i} \right] = 0$$

حساب التكاملات المحددة بطريقة المتبقي

ان حساب التكاملات المحددة بطريقة المتبقي للدالة $f(z)$ داخل وعلى حدود المنحني المغلق البسيط C وهناك بعض الحالات العامة مثل هذه التكاملات:

النوع الاول: تكاملات دوال النسبية لـ $\sin \theta$, $\cos \theta$ من النوع

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (4 - 26)$$

حيث ان $R(\sin \theta, \cos \theta)$ دالة نسبية حقيقية لـ $\sin \theta, \cos \theta$ وتكون منتهية في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، لنفرض ان $z = e^{i\theta}$ فيكون

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (4 - 26a)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (4 - 26b)$$

وبهذا يكون المكامل دالة نسبية z مثل $f(z)$ وبالإضافة الى ذلك

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta$$

وبهذا يمكن اعادة كتابة المعادلة (26 - 4) بالشكل التالي:

$$I = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz} \quad (4 - 27)$$

حيث ان C هو دائرة الوحدة $|z| = 1$ (عندما تتغير θ من 0 الى 2π فإن z يدور دورة واحدة على الدائرة $|z| = 1$).

مثال: طبقا لنظرية المتبقي، جد

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin \theta}$$

الحل:

$$\frac{5}{4} + \sin \theta = \frac{5}{4} + \frac{z^2 - 1}{2iz} = \frac{2z^2 + 5iz - 2}{4iz}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin \theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2z^2 + 5iz - 2}{4iz}} = \oint_C \frac{4dz}{2z^2 + 5iz - 2} \\ &= \oint_C \frac{4dz}{(z + 2i)(2z + i)} = \oint_C \frac{4dz}{2(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin \theta} = \oint_C \frac{2dz}{(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)}$$

حيث C دائرة $|z| = 1$. ولهذا تقع النقطة المنفردة الوحيدة $z = -\frac{i}{2}$ داخل C وهي قطب بسيط. بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند $z = -\frac{i}{2}$ ، من المعادلة (25 - 4)، يكون

$$R\left(z = -\frac{i}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{2}} \left\{ \left(z + \frac{i}{2}\right) \frac{2}{(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)} \right\} = \frac{4}{3i}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin \theta} = 2i\pi R\left(z = -\frac{i}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

مثال: طبقا لنظرية المتبقي، جد

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta}$$

الحل:

$$3 - 2 \cos \theta + \sin \theta = 3 - 2 \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) + \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) = \frac{2iz}{z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) + \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)}$$

$$I = \oint_C \frac{2dz}{z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i}$$

نستخدم طريقة الدستور بالنسبة للمقام $z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i$ لاستخراج النقاط المنفردة

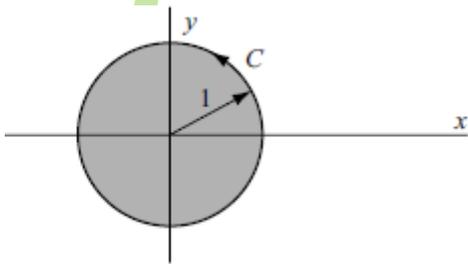
$$z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1 - 2i)(-1 - 2i)}}{2(1 - 2i)} = \frac{-6i \pm 4i}{2(1 - 2i)} = 2 - i, \frac{2 - i}{5}$$

النقطة $\frac{2-i}{5}$ تقع فقط داخل C وهي تمثل قطب بسيط حيث C هي دائرة وحدة التي نصف قطرها 1 ومركزها $(0,0)$

، بالنسبة للقرب البسيط $n = 1$ عند $z = \frac{2-i}{5}$ ، من المعادلة $(4 - 25)$ ، يكون

$$R \left(z = \frac{2-i}{5} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \left\{ \left(z - \frac{2-i}{5} \right) \frac{2}{z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i} \right\} = \frac{1}{2i}$$

$$I = \oint_C \frac{2dz}{z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i} = 2i\pi R \left(z = \frac{2-i}{5} \right) = \pi$$



تمارين

باستخدام صيغة كوشي التكاملية ١، جد

$$1) \oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz \quad , C: |z - 1| = 1$$

$$2) \oint_C \frac{z^2 + 1}{z(2z - 1)} dz \quad , C: |z| = 1$$

$$3) \oint_C \frac{\cos z}{(z^2 - 6z + 5)} dz \quad , C: |z| = 4$$

$$4) \oint_C \frac{1}{z^2 + 4} dz, C: |z - i| = 2$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات، جد

$$5) \oint_C \frac{z + 1}{(z^4 + 4z^3)} dz, C: |z| = 1$$

$$6) \oint_C \frac{e^z}{z^3} dz, C: |z| = 1$$

$$7) \oint_C \frac{z + 1}{z(z - 1)(z - 1)^3} dz, C: |z| = 1$$

$$8) \oint_C \frac{z^2 + 1}{(z - 1)^3} dz, C: |z - 1| = 1$$

تمارين

طبقا لنظرية المتبقي، جد التكامل التالي:

$$1) I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$$

$$2) I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3 \sin \theta)^2}$$

$$2) I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}$$

خواص التكاملات

إذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دالتين قابلتين للتكامل على C فإن:

$$a) \int_C \{f(z) + g(z)\} dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

$$b) \int_C Af(z) dz = A \int_C f(z) dz \quad , A: \text{constant}$$

$$c) \int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$$

$$d) \int_a^b f(z) dz = \int_a^m f(z) dz + \int_m^b f(z) dz$$

تمارين

١) جد قيمة التكامل $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2) dx + (3x - y) dy$ للحالات التالية:

١- عندما $x = 2t$ و $y = t^3 + 3$.

٢- لحالة خطين مستقيمين، الأول من النقطة $(0,3)$ و $(2,3)$ والثاني $(2,3)$ الى $(2,4)$.

٣- لحالة الخط المستقيم $(0,3)$ الى $(2,4)$.

ب) جد قيمة التكامل $\int_C \bar{z} dz$ من $z = 0$ الى $z = 4 + 2i$ على المنحني C المعطى بالحالات التالية:

١- $z = t^2 + it$

٢- من $z = 0$ الى $z = 2i$ ومن $z = 2i$ الى $z = 4 + 2i$.

ج) اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ، جد التكامل $\int_{C_1} z^2 dz$ حيث ان C_1 هو خط مستقيم يصل نقطة الاصل O بنقطة $P(2,1)$ في المستوي المعقد.

تمارين

طبقا لنظرية المتبقي، جد التكاملات التالية:

1) $\oint_C \frac{1}{z^2 + 4} dz$, $C: |z + 1| = 3$

2) $\oint_C \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)} dz$, $C: |z + 1| = 3$

3) $\oint_C \frac{e^{\pi z/4}}{z^2 + 4} dz$, $C: |z + 1| = 3$

تكاملات خاصة مع حذف ثابت التكامل

1. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{dz}{z} = \ln z$
3. $\int e^z dz = e^z$
4. $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$
5. $\int \sin z dz = -\cos z$
6. $\int \cos z dz = \sin z$
7. $\int \tan z dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$
8. $\int \cot z dz = \ln \sin z$
9. $\int \sec z dz = \ln(\sec z + \tan z)$
 $= \ln \tan(z/2 + \pi/4)$
10. $\int \csc z dz = \ln(\csc z - \cot z)$
 $= \ln \tan(z/2)$
11. $\int \sec^2 z dz = \tan z$
12. $\int \csc^2 z dz = -\cot z$
13. $\int \sec z \tan z dz = \sec z$
14. $\int \csc z \cot z dz = -\csc z$
15. $\int \sinh z dz = \cosh z$
16. $\int \cosh z dz = \sinh z$
17. $\int \tanh z dz = \ln \cosh z$
18. $\int \coth z dz = \ln \sinh z$
19. $\int \operatorname{sech} z dz = \tan^{-1}(\sinh z)$
20. $\int \operatorname{csch} z dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$
21. $\int \operatorname{sech}^2 z dz = \tanh z$
22. $\int \operatorname{csch}^2 z dz = -\coth z$
23. $\int \operatorname{sech} z \tanh z dz = -\operatorname{sech} z$
24. $\int \operatorname{csch} z \coth z dz = -\operatorname{csch} z$
25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$
26. $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a} \quad \text{or} \quad -\frac{1}{a} \cot^{-1} \frac{z}{a}$
27. $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{z-a}{z+a} \right)$
28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1} \frac{z}{a} \quad \text{or} \quad -\cos^{-1} \frac{z}{a}$
29. $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}} \right)$
30. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{z} \quad \text{or} \quad \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{z}{a}$
31. $\int \sqrt{z^2 \pm a^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{z^2 \pm a^2}$
 $\pm \frac{a^2}{2} \ln(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$
32. $\int \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{z}{a}$
33. $\int e^{ax} \sin bz dz = \frac{e^{ax}(a \sin bz - b \cos bz)}{a^2 + b^2}$
34. $\int e^{ax} \cos bz dz = \frac{e^{ax}(a \cos bz + b \sin bz)}{a^2 + b^2}$