الفصل السابع

Applications in Numerical Analysis تطبيقات التحليل العددي

تُستخدم الطرق العددية بشكل شائع لحل المشكلات الرياضية التي تتم صياغتها في العلوم والهندسة حيث يصعب أو يستحيل الحصول على حلول دقيقة. يحتوي MATLAB على مكتبة كبيرة من الوظائف لحل مجموعة واسعة من المشكلات الرياضية عددياً.

1- حل المعادلة اللاخطية بمتغير واحد SOLVING AN EQUATION WITH ONE VARIABLE

يتم كتابة المعادلات اللاخطية بمتغير واحد بالشكل f(x)=0 والحل لهذه المعادلة (الجذور) هو القيمة العددية للمتغير x الذي يحقق المعادلة والحل التام للمعادلة هو ايجاد قيمة x التي تجعل الدالة تساوي صفر. عموماً، تمتلك الدالة حل واحد صفري او عدد من الحلول. في برنامج MATLAB نستخدم fzero لإيجاد الحل الصفري لدالة وهي تعتبر دالة الدالة (اي تستقبل دالة اخرى لحلها) وتكتب بالصيغة أدناه:

```
x = fzero(function,x0)
```

Solution

The function to be solved.

A value of *x* close to where the function crosses the axis.

ثلاث طرق لكتابة هذه الدالة:

1- ادخال التعبير الرياضي لدالة كمتغير حرفي
2- من الممكن تعريف الدالة في ملف دالة واستخدامها كدالة ماسكة *Function Handl*
3- يمكن تعريف الدالة كدالة مجهولة *Anonymous Function*

كما في الامثلة ادناه:

```
>> x1=fzero('x*exp(-x)-0.2',0.7)
x1 =
    0.2592
>> F=@(x)x*exp(-x)-0.2
F =
    @(x)x*exp(-x)-0.2
>> fzero(F,2.8)
ans =
    2.5426
```

The function is entered as a string expression.

The first solution is 0.2592.

Creating an anonymous function.

Using the name of the anonymous function in fzero.

The second solution is 2.5426.

ملاحظات:

1- يجد الأمر fzero عن الحل الصفري لدالة فقط عندما تتقاطع الدالة مع المحور x. لا يجد الأمر القيمة الصفرية عند النقاط التي لا تتقاطع فيها الدالة مع المحور x.
2- يتم توظيف الاجابة NaN الى x عند عدم تحديد الحل الصفري.
3- يمكن توظيف قيمة الدالة عند النقطة x بالمتغيير fval كما في الصيغة التالية:

[x fval]=fzero(function, x0)

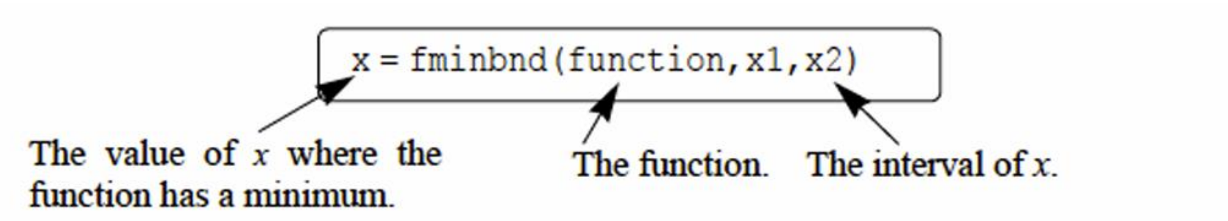
من الممكن ايضا عرض عدد مرات التكرار عند استخراج قيمة المتغير x وكالتالي:

x=fzero(function, x0, optimset('display','iter'))

4- عندما يمكن كتابة الدالة في صورة كثيرة الحدود، يمكن العثور على الحل أو الجذور باستخدام الأمر roots

2- ايجاد القيمة الصغرى والعظمى لدالة FINDING A MINIMUM OR A MAXIMUM OF A FUNCTION

يتم تحديد القيمة الصغرى في الماتلاب من خلال الامر التالي وضمن الفترة $x1 \leq x \leq x2$



- من الممكن ادخال الدالة كمتغير حرفي او كدالة ماسكة وممكن توظيف قيمة الدالة للمتغيير fval لاضافة قيمة الدالة للامر عند القيمة الصغرى بنفس طريقة الدالة fzero

[x fval]=fminbnd(function,x1,x2)

- يمكن أن تكون القيمة الصغرى للدالة خلال الفترة المعطاة عندما يكون ميل الدالة عند موقع القيمة الصغرى ويساوي صفر

```
>> [x fval]=fminbnd('x^3-12*x^2+40.25*x-36.5',3,8)
x =
    5.6073
fval =
  -11.8043
```

The local minimum is at $x = 5.6073$. The value of the function at this point is –11.8043.

```
>> [x fval]=fminbnd('x^3-12*x^2+40.25*x-36.5',0,8)
x =
     0
fval =
  -36.5000
```

The minimum is at $x = 0$. The value of the function at this point is –36.5.

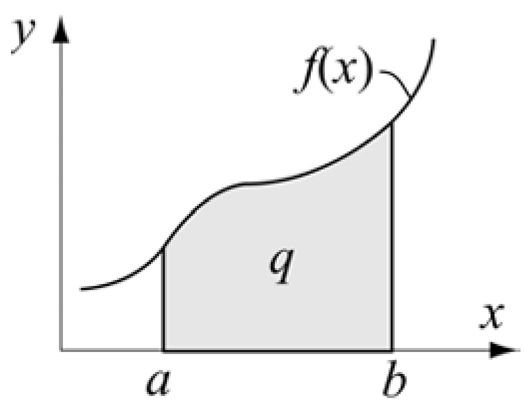
بنفس الامر يتم ايجاد القيمة العظمى وذلك بضرب الدالة ب (-1)

```
>> [x fval]=fminbnd('-x*exp(-x)+0.2',0,8)
x =
    1.0000
fval =
   -0.1679
```

The maximum is at $x = 1.0$. The value of the function at this point is 0.1679.

3- التكامل العددي NUMERICAL INTEGRATION

يمكن تعريف تكامل الدالة f(x) ذات الحدود من a الى b بالصيغة $q = \int_a^b f(x)dx$ وان قيمة التكامل q هي المساحة المحصورة بين الدالة f(x) وحدود التكامل a و b على المحور x



في برنامج MATLAB يتم حساب التكامل بأستخدام الدوال الجاهزة وتخضع لطريقة Simpson method و كالتالي:

الامر quad

يأخذ الصيغة التالية

```
q = quad(function,a,b)
```

The value of the integral. The function to be integrated. The integration limits.

*من الممكن كتابة الدالة في الامر اعلاه كتعبير حرفي او كدالة ماسكة

*يتم كتابة المتغير x لدالة f(x) بطريقة عنصر بعنصر

*يجب التأكد ان الدالة مستمرة لكل قيم بين a و b

*يتم اضافة متغير اختياري يدعى tol لتغير مقدار نسبة الخطأ الواردة باستخدام الامر quad التي تكون اقل من $1e^{-6}$

q = quad('function',a,b,tol)

مثال

```
>> quad('x.*exp(-x.^0.8)+0.2',0,8)
ans =
    3.1604
```

طريقة أخرى

```
function y=Chap9Sam2(x)
y=x.*exp(-x.^0.8)+0.2;
```

```
>> q=quad(@Chap9Sam2,0,8)
q =
    3.1604
```

الامر quadl

الصيغة:

```
q = quadl(function,a,b)
```

The value of the integral. The function to be integrated. The integration limits.

كل الملاحظات المذكورة للامر quad يخضع لها الامر quadl

الامر trapz

يتم استخدام الأمر trapz لحل الدالة عددياً والتي تكون بهيئة بيانات. صيغة الأمر كالتالي:

```
q = trapz(x,y)
```

حيث ان x و y متجهان لنقاط المحورين x و y ويجب ان يكون المتجهين بنفس الطول

4-المعادلات التفاضلية الأعتيادية ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS (ODE)

يتم استخدام برنامج MATLAB لحل المعادلات التفاضلية (ODE) حيث تحتوي على متغير مستقل وتابع ومشتقة المتغير التابع، وان المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى تمثل ب $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ حيث ان x يمثل المتغير المستقل و y يمثل المتغير التابع.

خطوات حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الدرجة الاولى:

اولاً: كتابة المعادلة بالنموذج القياسي كما في الصيغة:

$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ for $t_0 \le t \le t_f$ with $y=y_0$ and $t=t_0$

كما هو موضح أعلاه، هناك حاجة إلى ثلاث معلومات لحل ODE من الدرجة الأولى: معادلة تعطي تعبيراً عن مشتقة y بالنسبة إلى t، والفترة للمتغير المستقل، والقيمة الأبتدائية لـ y. الحل هو قيمة y كدالة لـ t ضمن الفترة $t_0 \le t \le t_f$. كما موضح في المثال التالي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^3 - 2y}{t} \quad \text{for } 1 \le t \le 3 \quad \text{with } y = 4.2 \text{ at } t = 1.$$

ثانياً: إنشاء دالة user-defined function او استخدام الدالة المجهولة anonymous function

مثال كدالة معرفة من قبل المستخدم

```
function dydt=ODEexp1(t,y)
dydt=(t^3-2*y)/t;
```

مثال كدالة مجهولة

```
>> ode1=@(t,y)(t^3-2*y)/t
ode1 =
    @(t,y)(t^3-2*y)/t
```

ثالثاً: اختيار طريقة الحل

يتم اختيار احدى الطرق العددية في برنامج MATLAB لحل المعادلة التفاضلية وهي دوال جاهزة في البرنامج كما مبين في الجدول أدناه:

ODE Solver Name	**Description**
ode45	For nonstiff problems, one-step solver, best to apply as a first try for most problems. Based on explicit Runge-Kutta method.
ode23	For nonstiff problems, one-step solver. Based on explicit Runge-Kutta method. Often quicker but less accurate than ode45.
ode113	For nonstiff problems, multistep solver.
ode15s	For stiff problems, multistep solver. Use if ode45 failed. Uses a variable order method.
ode23s	For stiff problems, one-step solver. Can solve some problems that ode15s cannot.
ode23t	For moderately stiff problems.
ode23tb	For stiff problems. Often more efficient than ode15s.

رابعاً: حل المعادلة التفاضلية ODE

يتم الحل النهائي ل ODE بالنموذج التالي:

```
[t,y] = solver_name(ODEfun,tspan,y0)
```

حيث ان:

solver_name يمثل اسم الطريقة العددية من الجدول اعلاه مثل ode45 و **ODEfun** يمثل حساب $\frac{dy}{dt}$ كما في الخطوة الثانية اعلاه وذلك لاعطاء قيم y و t حيث يتم تعريف الدالة كدالة معرفة او دالة مجهولة.

tspan يمثل متجه يتم إنشائه للمتغير المستقل t وهي ضمن الفترة $t_0 \le t \le t_f$ ، و **y0** هي القيمة الابتدائية للمتغير التابع y. و **[t,y]** يمثل المخرجات (حل المعادلة التفاضلية) وتكون بهيئة متجه عمودي.

كمثال نأخذ المثال السابق في الخطوتين اولاً وثانياً

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^3 - 2y}{t} \quad \text{for} \quad 1 \le t \le 3 \quad \text{with} \quad y = 4.2 \quad \text{at} \quad t = 1 .$$

```
function dydt=ODEexp1(t,y)
dydt=(t^3-2*y)/t;
```

ثم

```
>> [t y]=ode45(@ODEexp1,[1:0.5:3],4.2)
t =
    1.0000
    1.5000
    2.0000
    2.5000
    3.0000
y =
    4.2000
    2.4528
    2.6000
    3.7650
    5.8444
```

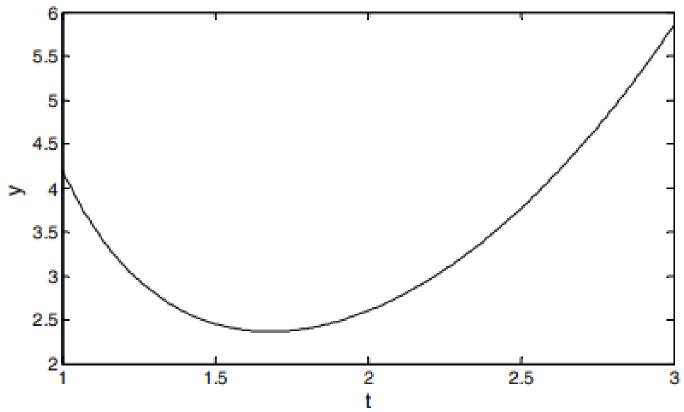
The initial value.

The vector tspan.

The handle of the user-defined function ODEexp1.

وبالأمكان رسم مخرجات المثال السابق

```
>> [t y]=ode45(@ODEexp1,[1:0.01:3],4.2);
>> plot(t,y)
>> xlabel('t'), ylabel('y')
```



وتدعى هذه الطريقة عددياً ب Runge-Kutta method.