الفصل السادس

متعددات الحدود Polynomials

كثيرات الحدود هي تعبيرات رياضية تستخدم بشكل متكرر لحل المشكلات والنمذجة في مجالات العلوم والهندسة. في كثير من الحالات، تكون المعادلة التي تتم كتابتها أثناء عملية حل مشكلة متعددة الحدود، ويكون حل هذه المسائل بمساواة بمتعددة الحدود الى الصفر لإيجاد جذورها.

متعددات الحدود تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث ان $a_0, a_1, a_{n-1}, \dots . a_n$ هي معاملات حقيقية تمثل اعداد حقيقية، و n تمثل درجة متعددات الحدود ويكون عدد صحيح موجب. كما نلاحظ في الأمثلة أدناه

$f(x) = 5x^5 + 6x^2 + 7x + 3$	polynomial of degree 5.
$f(x) = 2x^2 - 4x + 10$	polynomial of degree 2.
$f(x) = 11x - 5$	polynomial of degree 1.

إذا كانت الدالة تساوي قيمة عددية $f(x) = 19$ فإن متعدد الحدود يكون من الدرجة صفر. في MATLAB، يتم تمثيل كثيرات الحدود بواسطة متجه صف تكون فيه العناصر هي المعاملات ل x $(a_0, a_1, a_{n-1}, \dots . a_n)$ يجب أن يشمل المتجه جميع المعاملات، بما في ذلك المعاملات التي تساوي 0. على سبيل المثال:

Polynomial	**MATLAB representation**
$8x + 5$	p = [8 5]
$2x^2 - 4x + 10$	d = [2 –4 10]
$6x^2 - 150$, MATLAB form: $6x^2 + 0x - 150$	h = [6 0 –150]
$5x^5 + 6x^2 - 7x$, MATLAB form: $5x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 7x + 0$	c = [5 0 0 6 –7 0]

1- قيمة متعددات الحدود Value of a Polynomial

يتم حساب قيمة متعدد الحدود من خلال الدالة polyval التي تكون بالصيغة التالية:

```
polyval(p,x)
```

p is a vector with the coefficients of the polynomial.

x is a number, or a variable that has an assigned value, or a computable expression.

يمكن أن يكون x أيضًا متجهاً أو مصفوفة. في مثل هذه الحالة يتم حساب متعدد الحدود لكل عنصر (عنصر بعنصر) والإجابة هي متجه أو مصفوفة، مع القيم المقابلة لمتعدد الحدود.

مثال/ دالة متعددة الحدود لدالة

$$f(x) = x^5 - 12.1x^4 + 40.59x^3 - 17.015x^2 - 71.95x + 35.88$$

أ) أحسب $f(x)$

ب) ارسم متعدد الحدود للفترة $-1.5 \le x \le 6.7$

الحل/

أ) معاملات متعددة الحدود يتم تعريفها بالمتجه p

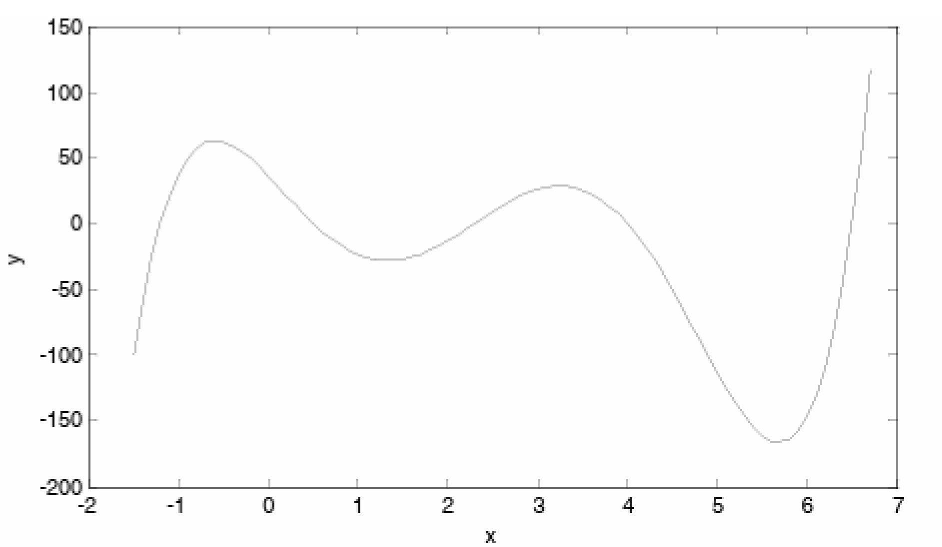
```
>> p = [1 -12.1 40.59 -17.015 -71.95 35.88];
>> polyval(p,9)
ans =
  7.2611e+003
```

ب)

```
>> x=-1.5:0.1:6.7;
>> y=polyval(p,x);
>> plot(x,y)
```

Calculating the value of the polynomial for each element of the vector x.

ناتج تنفيذ الرسم



2- جذور متعدد الحدود Roots of a Polynomial

جذور متعدد الحدود هي قيم جذر المتغير ك x الذي يجعل قيمة متعدد الحدود فيها صفراً. ويتم حساب الجذر كما في الدالة أدناه:

```
r = roots(p)
```

r is a column vector with the roots of the polynomial.

p is a row vector with the coefficients of the polynomial.

مثال/

إن جذور متعددة الحدود لدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3$ هي قيم الجذر x للعلاقة $x^2 - 2x - 3 = 0$ وهي x=-1 و x=3 وان جذور متعددة الحدود يكون كالتالي:

```
>> p= 1 -12.1 40.59 -17.015 -71.95 35.88];
>> r=roots(p)
r =
    6.5000
    4.0000
    2.3000
   -1.2000
    0.5000
```

When the roots are known, the polynomial can actually be written as:

$f(x) = (x+1.2)(x-0.5)(x-2.3)(x-4)(x-6.5)$

ولإيجاد جذور متعددة الحدود لدالة $f(x) = 4x^2 + 10x - 8$

```
>> roots([4 10 -8])
ans =
   -3.1375
    0.6375
```

في حالة ان تكون جذور متعددة الحدود معروفة، يمكن استخدام الأمر poly لتحديد معاملات متعددة الحدود. كما في الصيغة التالية:

```
p = poly(r)
```

p is a row vector with the coefficients of the polynomial.

r is a vector (row or column) with the roots of the polynomial.

نفس المثال السابق لدالة $f(x) = x^5 - 12.1x^4 + 40.59x^3 - 17.015x^2 - 71.95x + 35.88$ على فرض معرفة جذورها فنسجد باستخدام poly معاملاتها

```
>> r=6.5 4 2.3 -1.2 0.5];
>> p=poly(r)
p =
    1.0000   -12.1000    40.5900   -17.0150   -71.9500    35.8800
```

3- العمليات الحسابية على متعددات الحدود

Addition, Multiplication, and Division of Polynomials

يمكن جمع (أو طرح) متعددات الحدود عن طريق جمع او (طرح) متجهات معاملات متعددي الحدود. في حال عدم تساوي طول أحد متجهات معاملات الحدود مع المتجه الاخر فيجب إضافة أصفارلمتجه المعاملات الأقصر في الطول وهذه العملية تدعى الحشو padding

مثال/ جمع معاملات متعدد الحدود لدالتين $f1(x) = 3x^6 + 15x^5 - 10x^3 - 3x^2 + 15x - 40$

$f2(x) = 3x^3 - 12x - 6$

```
>> p1=[3 15 0 -10 -3 15 -40];
>> p2=[3 0 -2 -6];
>> p=p1+[0 0 0 p2]
p =
     3    15     0    -7    -3    13   -46
```

Three 0s are added in front of p2, since the order of p1 is 6 and the order of p2 is 3.

في حالة الضرب ليس من الضروري أن تكون متعددات الحدود من نفس الطول وبالأمكان ضرب ثلاثة أو أكثر من متعددات الحدود وتتم عملية الضرب باستخدام الدالة conv كما في الصيغة التالية:

```
c = conv(a,b)
```

c is a vector of the coefficients of the polynomial that is the product of the multiplication.

a and b are the vectors of the coefficients of the polynomials that are being multiplied.

نتخذ المثال السابق ذو الدالتين $f1(x)$ و $f2(x)$ كمثال لعملية الضرب وكالتالي:

```
>> pm=conv(p1,p2)
pm =
     9    45    -6   -78   -99    65   -54   -12   -10   240
```

أي الناتج يعني

$$9x^9 + 45x^8 - 6x^7 - 78x^6 - 99x^5 + 65x^4 - 54x^3 - 12x^2 - 10x + 240$$

يتم استخدام الدالة الجاهزة deconv في حالة قسمة متعدد حدود على الآخر كما في الصيغة التالية:

```
[q,r] = deconv(u,v)
```

q is a vector with the coefficients of the quotient polynomial.
r is a vector with the coefficients of the remainder polynomial.

u is a vector with the coefficients of the numerator polynomial.
v is a vector with the coefficients of the denominator polynomial.

على سبيل المثال قسمة متعددة الحدود الدالة $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$ على متعدد الحدود $x + 3$

```
>> u=[2 9 7 -6];
>> v=[1 3];
>> [a b]=deconv(u,v)
a =
     2     3    -2
b =
     0     0     0     0
```

The answer is: $2x^2 + 3x - 2$.

Remainder is zero.

و قسمة متعددة الحدود الدالة $2x^6 - 13x^5 + 75x^3 + 2x^2 - 60$ على متعدد الحدود $x^2 - 5$

```
>> w=[2 -13 0 75 2 0 -60];
>> z=[1 0 -5];
>> [g h]=deconv(w,z)
g =
    2   -13    10    10    52
h =
    0     0     0     0     0    50    200
```

The quotient is: $2x^4 - 13x^3 + 10x^2 + 10x + 52$.

The remainder is: $50x + 200$.

اي الناتج هو:

$$2x^4 - 13x^3 + 10x^2 + 10x + 52 + \frac{50x + 200}{x^2 - 5}$$

4- مشتقات متعددات الحدود Derivatives of Polynomials

يمكن استخدام polyder الدالة الجاهزة لحساب مشتق كثيرة حدود واحدة، أو حاصل ضرب متعددتي حدود، أو حاصل قسمة متعددتي حدود، كما هو موضح في الأوامر الثلاثة التالية:

`k = polyder(p)`	Derivative of a single polynomial. `p` is a vector with the coefficients of the polynomial. `k` is a vector with the coefficients of the polynomial that is the derivative.
`k = polyder(a,b)`	Derivative of a product of two polynomials. `a` and `b` are vectors with the coefficients of the polynomials that are multiplied. `k` is a vector with the coefficients of the polynomial that is the derivative of the product.
`[n d] = polyder(u,v)`	Derivative of a quotient of two polynomials. `u` and `v` are vectors with the coefficients of the numerator and denominator polynomials. `n` and `d` are vectors with the coefficients of the numerator and denominator polynomials in the quotient that is the derivative.

* والفرق الوحيد بين الأمرين الأخيرين هو عدد متغيرات الإخراج. في حال عدد متغيرات الاخراج اثنين عندئذ يقوم MATLAB بحساب مشتقة حاصل قسمة كثيرات الحدود. اما في حالة متغير إخراج واحد فأنه يجد مشتقة حاصل ضربهما.

مثال/ لتكن الدالتين $f1(x) = 3x^2 - 2x + 4$ و الدالة $f2(x) = x^2 + 5$ جد مشتقة

$$3x^2 - 2x + 4\,,\ (3x^2 - 2x + 4)(x^2 + 5)\,,\ \text{and}\ \frac{3x^2 - 2x + 4}{x^2 + 5}$$

```
>> f1= 3 -2 4];
>> f2=[1 0 5];
```

Creating the vectors of coefficients of f_1 and f_2.

```
>> k=polyder(f1)
k =
     6    -2
```

The derivative of f_1 is: $6x - 2$.

```
>> d=polyder(f1,f2)
d =
    12    -6    38   -10
```

The derivative of $f_1 * f_2$ is: $12x^3 - 6x^2 + 38x - 10$.

```
>> [n d]=polyder(f1,f2)
n =
     2    22   -10
d =
     1     0    10     0    25
```

The derivative of $\frac{3x^2 - 2x + 4}{x^2 + 5}$ is: $\frac{2x^2 + 22x - 10}{x^4 + 10x^2 + 25}$.

5- CURVE FITTING

تحليل الإنحدار هي عملية ملائمة دالة لمجموعة من نقاط البيانات. يمكن بعد ذلك استخدام الدالة كنموذج رياضي للبيانات. نظراً لوجود العديد من أنواع الدوال (الخطية، ومتعددة الحدود، واللوغارتيمية، والأسية، وما إلى ذلك)، فقد يكون تركيب المنحنى عملية معقدة لذا نحتاج إلى تحديد معاملات الدالة. في حالات أخرى، حيث لا يُعرف أي شيء عن البيانات، من الممكن إنشاء أنواع مختلفة من المخططات التي توفر معلومات حول الأشكال المحتملة للدوال التي قد تناسب البيانات بشكل جيد.

* تحليل الانحدار لمتعددة حدود ;Curve Fitting with Polynomials

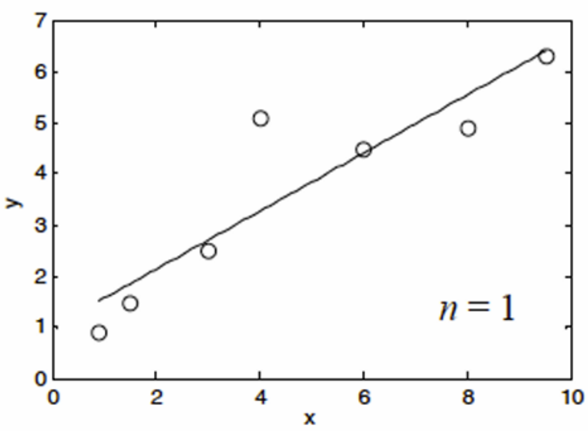
تحليل الإنحدار او المنحنى المناسب لمتعددة الحدود Curve Fitting يتم في برنامج الماتلاب بالدالة الجاهزة **polyfit** والتي تستخدم طريقة التربيع. وتكتب بالصيغة التالية:

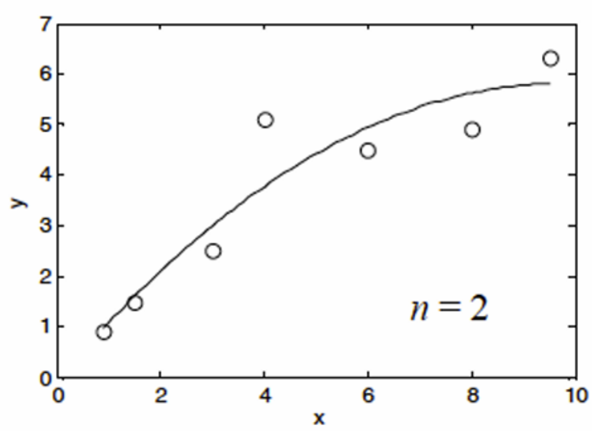
```
p = polyfit(x,y,n)
```

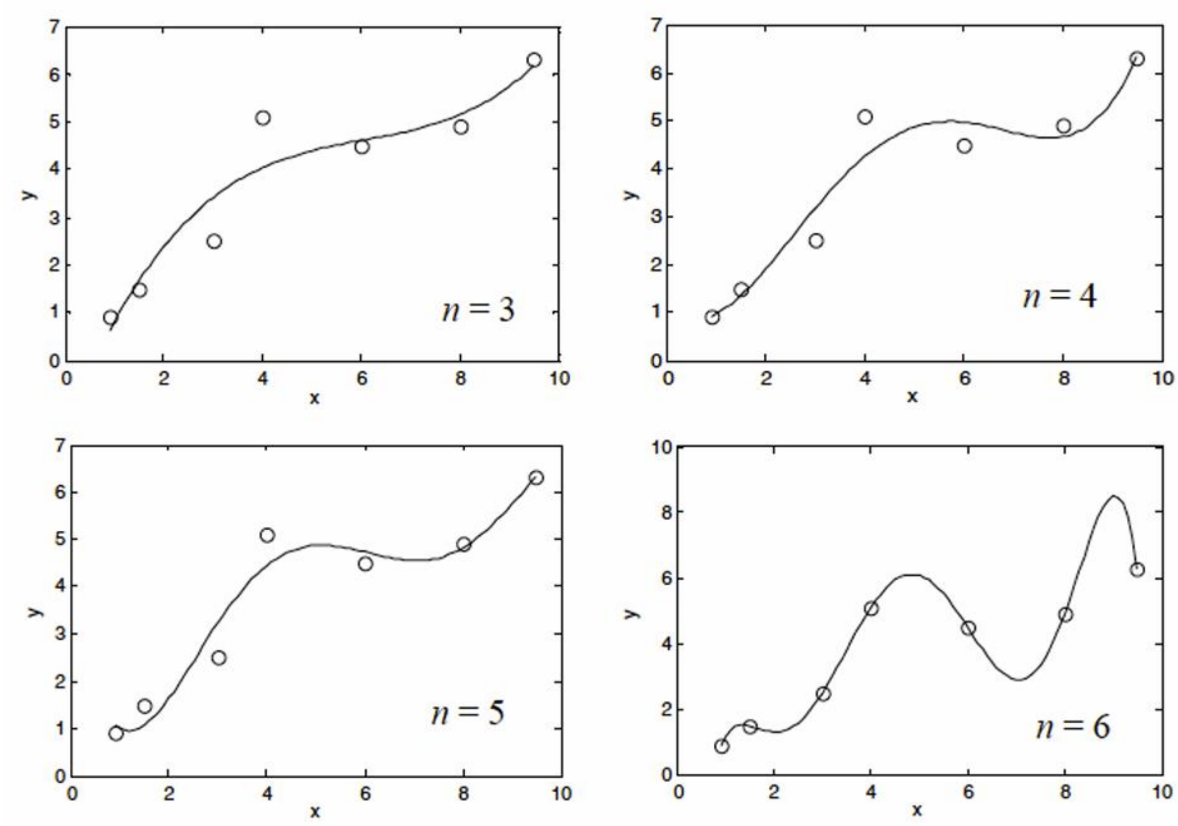
p is the vector of the coefficients of the polynomial that fits the data.

x is a vector with the horizontal coordinates of the data points (independent variable).
y is a vector with the vertical coordinates of the data points (dependent variable).
n is the degree of the polynomial.

n يحدد نوع متعددة الحدود، n=1 يمثل متعدد الحدود خط مستقيم، n=2 يمثل متعدد الحدود قطع مكافئ وهكذا كما مبين في الأشكال أدناه:







البرنامج التالي لتوليد إحدى الأشكال اعلاه عندما n=3

`x=[0.9 1.5 3 4 6 8 9.5];` `y=[0.9 1.5 2.5 5.1 4.5 4.9 6.3];`	Create vectors x and y with the coordinates of the data points.
`p=polyfit(x,y,3)`	Create a vector p using the polyfit function.
`xp=0.9:0.1:9.5;`	Create a vector xp to be used for plotting the polynomial.
`yp=polyval(p,xp)`	Create a vector yp with values of the polynomial at each xp.
`plot(x,y,'o',xp,yp)`	A plot of the seven points and the polynomial.
`xlabel('x'); ylabel('y')`	

الدالة polyval لإنشاء متجه yp لقيم متعددة الحدود لكل عنصر من عناصر xp. عند تنفيذ ملف البرنامج النصي اعلاه، يتم عرض المتجه p في نافذة الأومر وكالتالي:

```
p =
    0.0220   -0.4005    2.6138   -1.4158
```

وهذا يعني ان متعددة الحدود من الدرجة الثالثة وهي كالتالي:

$$0.022x^3 - 0.4005x^2 + 2.6138x - 1.4158$$

لاحظ صيغ المعادلات ادناه وتكتب صيغ الدوال ادناه باستخدام الدالة الجاهزة polyfit وان ناتج الدالة الجاهزة هو معاملات متعددة الحدود p والتي تمثل متجه بعنصرين يمثل العنصر الاول p(1) قيمة m والعنصر الثاني p(2) قيمة b.

Function		**`polyfit` function form**
power	$y = bx^m$	`p=polyfit(log(x),log(y),1)`
exponential	$y = be^{mx}$ or	`p=polyfit(x,log(y),1)` or
	$y = b10^{mx}$	`p=polyfit(x,log10(y),1)`
logarithmic	$y = m\ln(x) + b$ or	`p=polyfit(log(x),y,1)` or
	$y = m\log(x) + b$	`p=polyfit(log10(x),y,1)`
reciprocal	$y = \dfrac{1}{mx+b}$	`p=polyfit(x,1./y,1)`

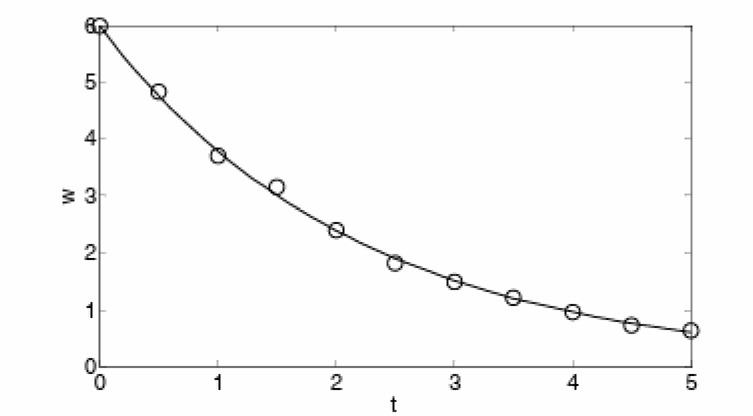
***x* axis**	***y* axis**	**Function**
linear	linear	linear $y = mx + b$
logarithmic	logarithmic	power $y = bx^m$
linear	logarithmic	exponential $y = be^{mx}$ or $y = b10^{mx}$
logarithmic	linear	logarithmic $y = m\ln(x) + b$ or $y = m\log(x) + b$
linear	linear (plot $1/y$)	reciprocal $y = \dfrac{1}{mx+b}$

مثال آخر

```
t=0:0.5:5;                          Create vectors t and w with the coordinates of the data points.
w=[6 4.83 3.7 3.15 2.41 1.83 1.49 1.21 0.96 0.73 0.64];
p=polyfit(t,log(w),1);              Use the polyfit function with t and log(w).
m=p(1)
b=exp(p(2))                         Determine the coefficient b.
tm=0:0.1:5;                         Create a vector tm to be used for plotting the polynomial.
wm=b*exp(m*tm);                     Calculate the function value at each element of tm.
plot(t,w,'o',tm,wm)                 Plot the data points and the function.
```

ناتج التنفيذ في نافذة الأمر

```
m =
   -0.4580
b =
    5.9889
```



INTERPOLATION -6

Interpolation هو تقدير القيم بين نقاط البيانات. يحتوي MATLAB على وظائف Interpolationالتي تعتمد على كثيرات الحدود، الموضحة في هذا القسم، في Interpolation أحادي البعد، تحتوي كل نقطة على متغير مستقل واحد (x) ومتغير تابع واحد (y) في Interpolation ثنائي الأبعاد، تحتوي كل نقطة على متغيرين مستقلين (x و y) ومتغير تابع واحد (z). يتم حساب Interpolation احادي البعد كما في الصيغة أدناه:

```
yi = interp1(x,y,xi,'method')
```

yi is the interpolated value.

x is a vector with the horizontal coordinates of the input data points (independent variable).
y is a vector with the vertical coordinates of the input data points (dependent variable).
xi is the horizontal coordinate of the interpolation point (independent variable).

Method of interpolation, typed as a string (optional).

- المتجه x يجب ان يكون مرتباً (اما تصاعدي او تنازلي)
- يمكن أن يكون xi عدديًا (Interpolation لنقطة واحدة) أو متجهًا (Interpolation لعديد من النقاط)، yi عبارة عن عدد او متجهة.
- يمكن لـ MATLAB إجراء Interpolation باستخدام إحدى الطرق العديدة التي يمكن تحديدها. وتشمل هذه الأساليب:

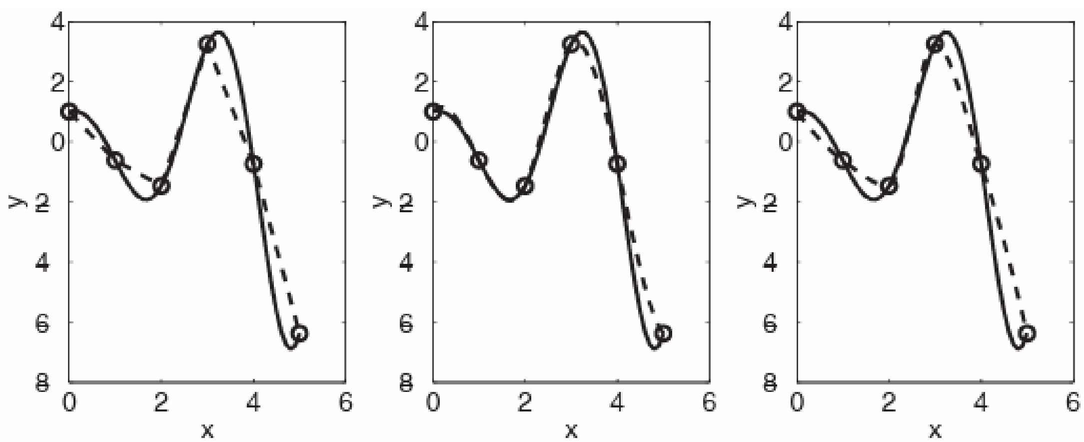
'nearest'	returns the value of the data point that is nearest to the interpolated point.
'linear'	uses linear spline interpolation.
'spline'	uses cubic spline interpolation.
'pchip'	uses piecewise cubic Hermite interpolation, also called 'cubic'

- عند استخدام الطريقتين nearest و linear يجب أن تكون قيمة (قيم) xi ضمن مجال x. إذا تم استخدام أساليب "spline" أو "pchip"، فيمكن أن يكون لـ xi قيم خارج نطاق x وتقوم الدالة interp1 بتنفيذ الاستقراء extrapolation.
- يمكن أن تعطي طريقة "spline " أخطاء كبيرة إذا كانت نقاط بيانات الإدخال غير منتظمة بحيث تكون بعض النقاط أقرب إلى بعضها البعض من غيرها.
- في حال لم يتم تحديد طريقة فإن نوع الاسلوب يكون linear

مثال

```
x=0:1.0:5;                      Create vectors x and y with coordinates of the data points.
y=[1.0 -0.6242 -1.4707 3.2406 -0.7366 -6.3717];
xi=0:0.1:5;                     Create vector xi with points for interpolation.
yilin=interp1(x,y,xi,'linear'); Calculate y points from linear interpolation.
yispl=interp1(x,y,xi,'spline'); Calculate y points from spline interpolation.
yipch=interp1(x,y,xi,'pchip');  Calculate y points from pchip interpolation.
yfun=1.5.^xi.*cos(2*xi);        Calculate y points from the function.
subplot(1,3,1)
plot(x,y,'o',xi,yfun,xi,yilin,'--');
subplot(1,3,2)
plot(x,y,'o',xi,yfun,xi,yispl,'--');
subplot(1,3,3)
plot(x,y,'o',xi,yfun,xi,yipch,'--');
```

ناتج التنفيذ:



يتم تمييز نقاط البيانات بدوائر، ويتم رسم منحنيات interpolation بخطوط متقطعة، وتظهر الدالة بخط متصل. يوضح الشكل الأيسر interpolation نوع linear ، والوسط هو نوع spline ، والشكل الموجود على اليمين يوضح interpolation نوع pchip.