الفصل الثاني

علاقات أينشتاين
The Einstein Relations

1-2 مقدمة Introduction

ذكرنا سابقاً أن العلم اينشتين في عام 1917 وضع الاساس النظري لعمل الليزر من خلال دراسة تفاعل الطاقة الكهرومغناطيسية Electromagnetic Energy مع المادة Matter و ذلك من خلال العمليات الإنتقالية الثلاثة التالية:

1. عملية امتصاص Absorption process
2. الانبعاث التلقائي Spontaneous Emission
3. الانبعاث المحفز Stimulated Emission

افترض اينشتاين أن الذرات المكونة للمادة موزعة على مستويين للطاقة هما E_0 , E_1 حيث أن مستوى الطاقة E_0 يعرف باسم **المستوى الأرضي Ground State** أما مستوى الطاقة E_1 **فيعرف بمستوى التهيج Excited State** . الانتقالات الثلاثة السابقة تحدث في المادة بين مستويي الطاقة عند أي درجة حرارة وهذا ما يعرف **بالاتزان الحراري Thermal Equilibrium** .

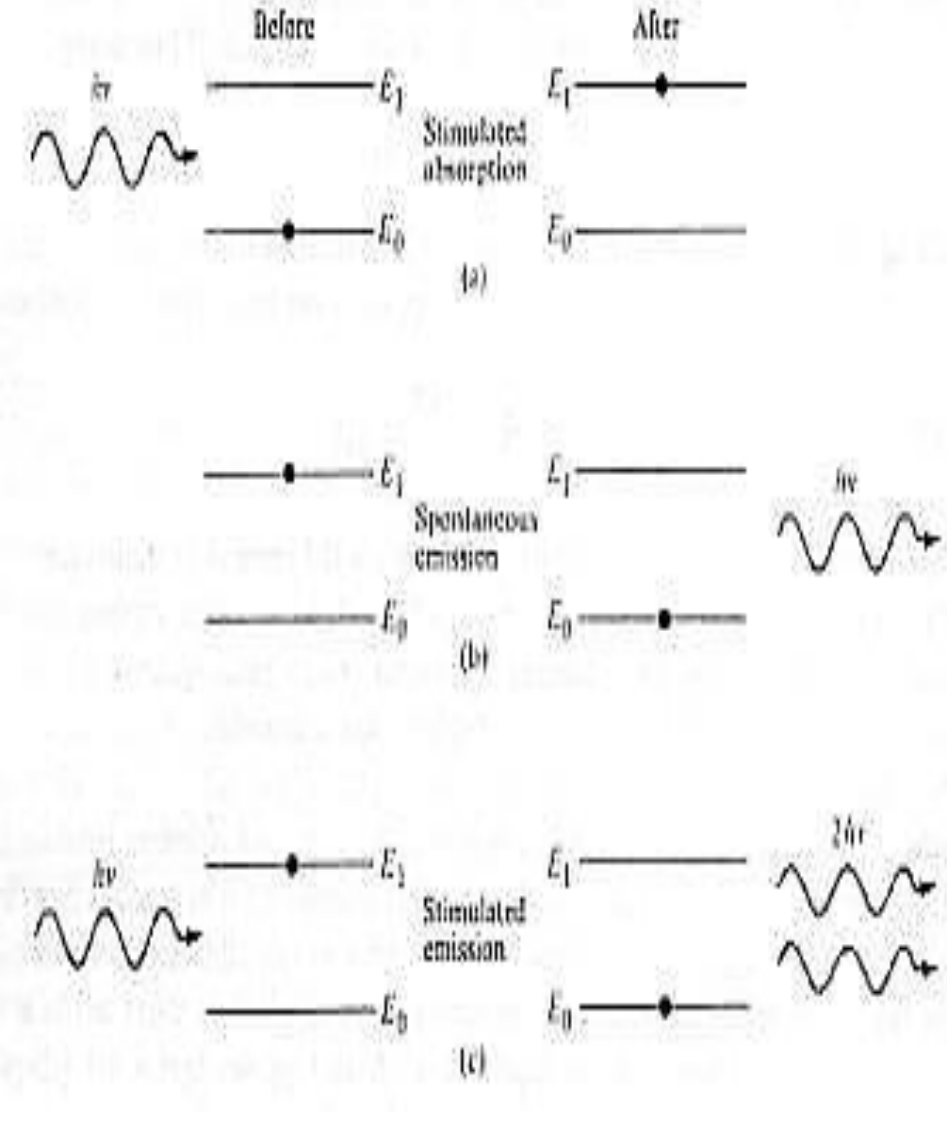
الشكل (11) يوضح مستويي الطاقة وتأثير كل عملية انتقال علي الذرة والاشعاع الكهرومغناطيسي.

ملاحظة: (تستخدم المصطلحات "الذرات المثارة"، "الحالات المتهيجة "، و "الإلكترونات المثارة" فلا يوجد فرق)

لاحظ أنه عندما يكون انبعاث الفوتونات قليل فإن الانبعاث يكون عشوائي وبزيادة معدل الفوتونات ننتقل إلى حالة الانبعاث المحفز.

تعرف المعاملات A_{21} و B_{12} و B_{21} **بمعاملات اينشتاين Einstein Coefficients** وهي التي تعطينا فكرة جيدة عن احتمالية حدوث انتقال بين مستويات الطاقة. وسنقوم بايجاد العلاقات التي تربط هذه المعاملات بعضها ببعض حيث أن الانتقالات الثلاثة تحصل في المادة بصورة مستمرة و بمعاملات ثابتة لكل منها عند ثبوت درجة الحرارة أي في حالة الاتزن الحراري. و بمعرفة معامل من المعاملات الثلاثة يمكن حساب المعاملات الأخرى.

Stimulated Absorption **تكون الذرة في المستوى الأول وتنتقل إلى المستوي الثاني بمعدل B_{12}**	
Spontaneous Emission **تكون الذرة في المستوى الثاني وتنتقل إلى المستوى الأول بمعدل A_{21}**	
Stimulated Emission **تكون الذرة في المستوى الثاني وتنتقل إلى المستوى الأول بمعدل B_{21}**	



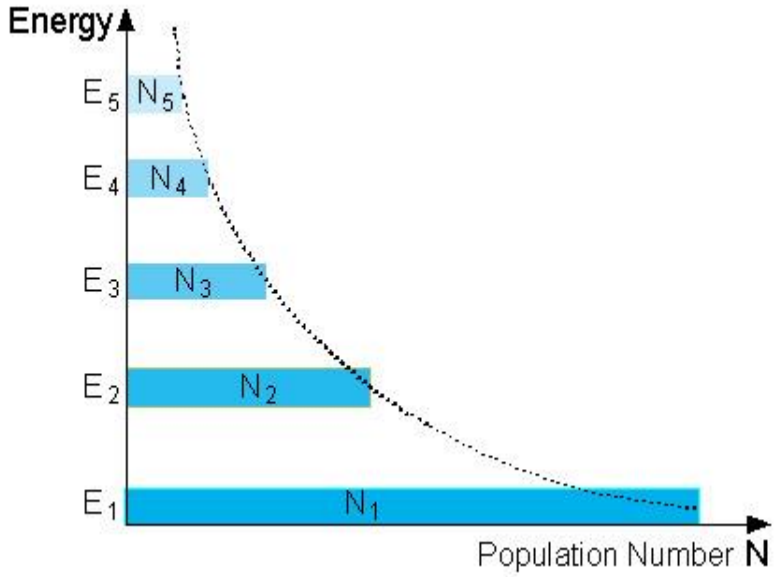
شكل (11): عمليات الأمتصاص و الأنبعاث التلقائي و الأنبعاث المحفز

2-2 التعداد عند الأتزان الحراري Population at Thermal Equilibrium

إن العلاقة بين تعداد الذرات في مستويات الطاقة عند الاتزان الحراري توصف **بمعادلة ماكسويل بولتزمان للتوزيع الاحصائي Maxwell-Boltzman Law.**

$$N_1 = \frac{g_1}{g_0} N_0 \; e^{-\frac{h\upsilon}{KT}}$$

حيث g_1 و g_0 هو انحلال المستويين الأرضي و المتهيج و N_0 هو تعداد المستوي الأرضي و h ثابت بلانك و ν التردد و K ثابت بولتزمان و T درجة الحرارة



أعداد التعداد عند "التعداد الطبيعي"

شكل (12): التوزيع الأحصائي لذرات المستويات حسب طاقاتها بالأعتماد على قانون ماكسويل بولتزمان

مثال:

أحسب نسبة التعداد (N_1، N_2) لمستويي الطاقة الاثنين E_2 و E_1 وعندما تكون المادة في درجة حرارة الغرفة (300K)، والفرق بين مستويات الطاقة هو 0.5 [eV] ما هو الطول الموجي (λ) للفوتون الذي سينبعث بالانتقال من E_2 إلى E_1؟

الحل :

عند تعويض المعلومات في معادلة فرق التعداد نحصل على:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B - T}\right) = exp\left[-\frac{(0.5\ eV) \times (1.6 \times 10^{-19})}{\left(1.38 \times 10^{-23}\frac{J}{K}\right) \times 300K}\right]$$

$$= 4 \times 10^{-9}$$

هذا يعني أنه عند درجة حرارة الغرفة , لكل 1,000,000,000 من الذرات في المستوى الأرضي (E_1) هناك 4 ذرات تكون في المستوى المتهيج (E_2) .

لحساب الطول الموجي :

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ J.sec) \times \left(3 \times 10^{8}\frac{m}{sec}\right)}{0.5\ eV \times \left(1.6 \times 10^{-19}\frac{J}{eV}\right)} = 2.48\ \mu m$$

الطول الموجي هو ضمن طيف تحت الحمراء القريب Near Infra-Red (NIR)

3-2 معادلات المعدل للامتصاص، الانبعاث التلقائي و الانبعاث المحفز

The Rate Equations for the Absorption, Spontaneous Emission and Stimulated Emission

سنقوم في هذه المرحلة بدراسة تأثير كل عملية من العمليات الانتقالية الثلاث على معدل تغير تعداد الذرات N_1 في مستوي الطاقة المثار E_1 وذلك في حالة الاتزان الحراري $\frac{dN_1}{dt}$، لذا سنفترض مجموعة من الذرات موزعة على مستويين للطاقة E_0 و E_1 .

1-3-2 الانبعاث التلقائي Spontaneous Emission

تعتمد عملية الانبعاث التلقائي على تعداد المستوى E_1 أي كلما ازداد N_1 كلما زادت عملية الانبعاث التلقائي، وكذلك يعتمد هذا الانتقال على المعامل A_{10} الذي يعبر عن احتمالية حدوث الانبعاث التلقائي. يكون معدل التغير في تعداد المستوى E_1 بالنسبة للزمن بالسالب لأنه كلما زاد معدل التغير كلما نقصت N_1 . ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 \qquad \text{..... (1)}$$

2-3-2 الامتصاص Stimulated Absorption

تعتمد عملية الامتصاص على تعداد المستوي E_0 أي كلما ازداد N_0 كلما زادت عملية الامتصاص ، وكذلك يعتمد هذا الانتقال على المعامل B_{01} الذي يعبر على احتمالية حدوث عملية الامتصاص . يكون معدل التغير في تعداد المستوى E_1 بالنسبة للزمن بالموجب لأن كلما زاد معدل التغير كلما زاد N_1 . وحيث أن عملية الامتصاص تحدث اذا توفر Photon ذو طاقة تساوي فرق الطاقة بين المستويين E_1 و E_0 أي أن

$$h\nu = (\Delta E) = E_2 - E_1$$

وللتعبير عن مدى تحقق المعادلة السابقة في عملية الامتصاص فإننا نعبر عنها **بكثافة الاشعاع بالدالة ρ** كمتغير في التردد Energy density of radiation والتي تعطي مدى احتمالية وجود فوتونات عند تردد ν

ويمكن التعبير تأثير عملية الامتصاص على تغير تعداد المستوى E_1 بالمعادلة التالية:

$$\frac{dN_1}{dt} = +B_{01}\,N_0\,\rho(\nu) \qquad \text{..... (2)}$$

3-3-2 الانبعاث المحفز Stimulated Emission

تعتمد عملية الانبعاث المحفز على تعداد المستوى E_1 أي كلما ازداد N_1 كلما زادت عملية الانبعاث المحفز ، وكذلك يعتمد هذا الانتقال على المعامل B_{10} الذي يعبر على احتمالية حدوث عملية الانبعاث المحفز. يكون معدل التغير في تعداد المستوى E_1 بالنسبة للزمن بالسالب لأن كلما زاد معدل التغير كلما

قل N_1. وحيث أن عملية الانبعاث المحفز تحدث اذا توفر الفوتون Photon ذو طاقة تساوي فرق الطاقة بين المستويين E_1 و E_0 أي أن

$$h\nu = (\Delta E) = E_2\text{-}E_1$$

وللتعبير عن مدى تحقق المعادلة السابقة في عملية الانبعاث الاستحثاثي فإننا نعبر عنها **بكثافة الاشعاع Energy density of radiation** بالدالة ρ كمتغير في التردد و التي تعطي مدى احتمالية وجود فوتونات عند التردد ν .

ويمكن التعبير عن تأثير عملية الانبعاث الاستحثاثي على تغير تعداد المستوى E_1 بالمعادلة التالية:

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{10}\,N_1\,\rho(\nu) \qquad \text{..... (3)}$$

المعادلات الثلاثة السابقة الذكر تمثل الحالات المختلفة التي يمكن من خلالها أن تفاعل الاشعاع الكهرومغناطيسي مع ذرات المادة. وفي حالة الاتزان الحراري عند درجة حرارة T فإن عدد الذرات N_1 في مستوى الطاقة E_1 يكون ثابت أي أن

$$N_1 = constant \quad , \quad \frac{dN_1}{dt} = zero$$

لذلك

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{01}\,N_0\,\rho(\nu) - B_{10}\,N_1\,\rho(\nu) = 0$$

عليه فأن

$$N_1[-A_{10} - B_{10}\,\rho(\nu)] + B_{01}\,N_0\,\rho(\nu) = 0$$

$$N_1[A_{10} + B_{10}\,\rho(\nu)] = B_{01}\,N_0\,\rho(\nu)$$

نحصل على

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{B_{01}\,\rho(\nu)}{A_{10} + B_{10}\,\rho(\nu)} \qquad \text{..... (4)}$$

وحيث أن المعادلات الثلاثة الأخيرة تم اشتقاقها تحت شرط الاتزان الحراري ولهذا فإن معادلة ماكسويل بولتزمان متحققة

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

وبمقارنة المعادلة (4) بالمعادلة (5) نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} = \frac{B_{01}\rho(\nu)}{A_{10} + B_{10}\rho(\nu)} \qquad \dots\dots\dots\dots (6)$$

عند درجات الحرارة العالية فإن كثافة الاشعاع تكون كبيرة وهنا يمكن اهمال تأثير عملية الانبعاث التلقائي حيث انها لا تتأثر بتغير درجة الحرارة.

عندما $KT >> h\nu$ فأن : $\frac{g_1}{g_0} = \frac{N_1}{N_0}$

و بذلك فأن

$$\frac{B_{01}}{B_{10}} = \frac{g_1}{g_0} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

من المعادلة (6) نحصل على

$$\frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} A_{10} + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} B_{10}\rho(\nu) = B_{01}\rho(\nu)$$

ألا أن $\frac{B_{01}}{B_{10}} = \frac{g_1}{g_0}$

$$\frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} A_{10} + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu}{KT}} B_{10}\rho(\nu) = \frac{g_1}{g_0} B_{10}\rho(\nu)$$

نحصل على

$$e^{-\frac{h\nu}{KT}}A_{10} = B_{10}\rho(\nu)\left[1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}}\right]$$

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{\rho(\nu)\left[1 - e^{-\frac{h\nu}{KT}}\right]}{e^{-\frac{h\nu}{KT}}}$$

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \rho(\nu)(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)$$

$$\rho(\nu) = \frac{A_{10}}{B_{10}}\frac{1}{(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

المعادلة (8) تدعى معادلة أينشتاين لأشعاع الجسم الأسود

أما معادلة بلانك لأشعاع الجسم الأسود فهي

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

و من مقارنة المعادلتين (8) و (9) نحصل على

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

وتسمى المعادلتين (7) و (10) بعلاقات أينشتاين. العلاقة الثانية تمكننا من تقييم نسبة معدل الانبعاث التلقائي إلى معدل الانبعاث المحفز لزوج معين من مستويات الطاقة. فمن العلاقتين (9) و (10) و لتقييم النسبة بين الانبعاث التلقائي والانبعاث المحفز مع فرض أن $R = (e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)$ فأن :

$$\rho(\nu) = \frac{A_{10}}{B_{10}} \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

النسبة الانبعاث التلقائي إلى الانبعاث المحفز يمكن أن يكتب بشكل

$$R = \frac{A_{10}}{B_{10}} \frac{1}{\rho(\nu)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

مثال :

أحسب نسبة الانبعاث التلقائي إلى الانبعاث المحفز لسلك التنغستن Tungsten Filament تعمل في درجة حرارة 2000 K أخذت متوسط تردد بحدود $5x10^{14}$Hz .

الحل :

$$R = (e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)$$

$$R = (e^{\frac{6.6\times10^{-34}\times5\times10^{14}}{1.38\times10^{-23}\times2000}} - 1)$$

تم اهمال كثافة الإشعاع

$$R = 1.5x10^{5}$$

وهذا يؤكد أنه في ظل حالة طبيعية من التوازن الحراري فأن الانبعاث المحفز مهملا.

مما سبق نستنتج أن عملية الأنبعاث المحفز Stimulated Emission تنافس عمليتي الأنبعاث التلقائي Spontaneous Emission و الأمتصاص Absorption و حتى تكبر شعاع ضوئي بواسطة الأنبعاث

المحفز, فإنه يجب أن نزيد معدل هذه العملية بالنسبة للعمليتين الاخرتيين. وحتى يتحقق ذلك فإنه يجب زيادة كثافة الاشعاع وتعداد المستوى E_1 وهذا مايعرف بأنقلاب التعداد Population Inversion.

4-2 أتساع خط الانبعاث line Broadening the of emission

يقسم اتساع الخط الطيفي لشعاع الليزر إلى نوعين و هما :

- **الاتساع المتجانس Homogenous Broadening** أو اتساع طبيعي Natural Broadening (مثل الاتساع الناتج عن اتساع التصادم Life time Broadening أو اتساع الضغط Pressure Broadening)
- **الاتساع الغير متجانس Non-homogeneous Broadening** (مثل Doppler Broadening)

و هذا ما سنتناوله خلال الفصل القادم.