

الفصل الاول

د. بهجت علي سعيد ٢٠١٩-٢٠٢٠

بعض المفاهيم الاساسية و اسس الميكانيك التقليدي (٨ ساعات)

١. نظم الاحداثيات Coordinates Systems

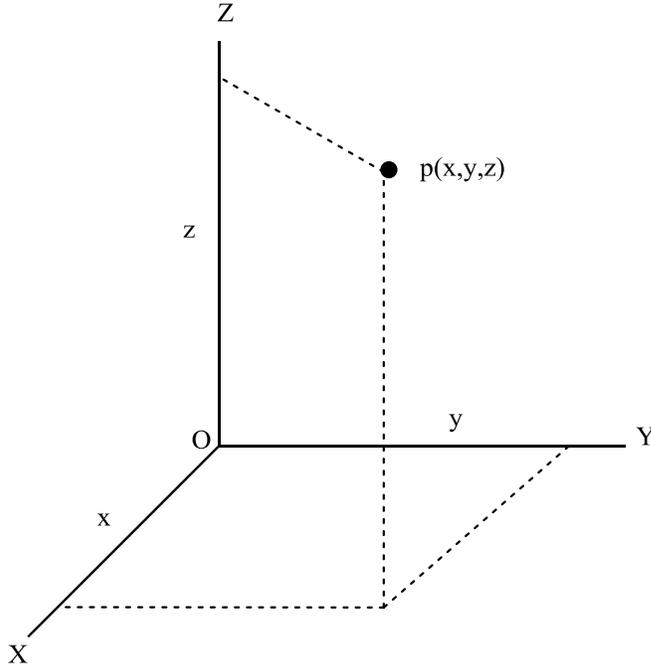
الاحداثيات: تعبير يصف نقطة أو منحنى أو سطح في الفضاء. وهي تستخدم لتبسيط المعادلات الرياضية التي تصف مسألة معينة و ان اختيارها يعتمد على طبيعة تلك المسألة. و لا تعتمد القيمة النهائية بعد حل المسألة على طبيعة الاحداثيات المستخدمة.

ان اهم النظم الاحداثية المستخدمة هي اربعة انواع:

- أ. الاحداثيات الديكارتية Cartesian Coordinates
- ب. الاحداثيات الكروية القطبية Spherical Polar Coordinates
- ت. الاحداثيات الاسطوانية Cylindrical Coordinates
- ث. الاحداثيات الاهليلجية متحدة البؤرة Confocal Ellipsoidal Coordinate

أ. الاحداثيات الديكارتية

يتم من خلالها وصف نقطة مثل p بواسطة ثلاثة مسافات تقع بأتجاه ثلاث محاور متعامدة هي X و Y و Z . و يتم التعبير عن النقطة المعرفة بالصيغة $p(x,y,z)$ حيث تمثل كل من X و Y و Z كل من x و y و z ابعاد النقطة p عن مركز الاحداثيات o باتجاه المحاور X و Y و Z على التوالي.



ب. الاحداثيات الكروية القطبية
 p بواسطة مسافة هي r و زاويتين هما θ و ϕ . و يعبر في هذه الحالة عن النقطة المعرفة
 بالصيغة $p(r, \theta, \phi)$.

و تعرف القيم r, θ, ϕ كما يلي:

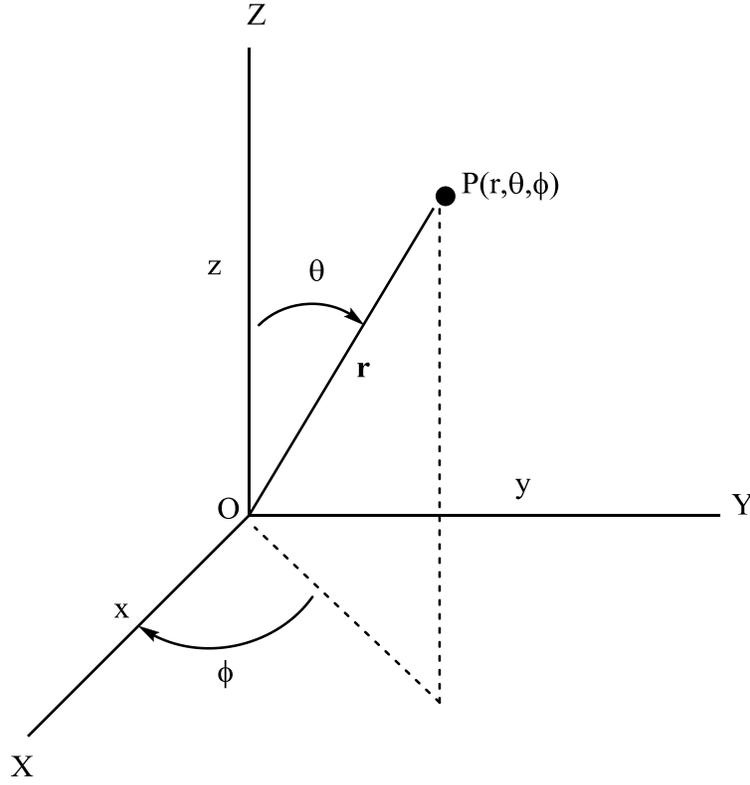
r : تمثل طول المستقيم OP المرسوم من نقطة الاصل O الى النقطة P .

θ : تلفظ ثيتا و تدعى الزاوية القطبية و هي الزاوية المحصورة بين الاحداثي Z و المستقيم OP .

ϕ : تلفظ فاي و تدعى الزاوية السمتية و هي الزاوية المحصورة بين المحور X و مسقط
 المستقيم OP على المستوي xy .

ديهمت علي سعيد ٢٠١١-

٢٠١٢



و ترتبط الاحداثيات الديكارتية بالاحداثيات الكروية القطبية بالعلاقات التالية:

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

د. بهجت علي سعيد

٢. الاعداد المعقدة Complex Numbers

أ. العدد المعقد: هو العدد الذي يحتوي على $\sqrt{-1}$ (يرمز له بالرمز i). ويرمز للعدد المعقد بالرمز C و هو يتكون من جزأين و هما الجزء الحقيقي و الذي يمكن ان يأخذ اية قيمة ما عدا $\sqrt{-1}$ و الجزء الخيالي و الذي يحتوي على $\sqrt{-1}$.

$$C = A + \sqrt{-1} B \quad \text{or} \quad C = A + i B$$

A: is the real part

B: is the imaginary part

و لكي يكون C عددا معقدا فإن B يجب ان لا تساوي صفرا.

$$\text{e.g. } 2.1 + 3i \quad \text{or} \quad 2.1 + 3\sqrt{-1}$$

$$\text{where } A = 2.1 \quad \text{and} \quad B = 3i \quad \text{or} \quad 3\sqrt{-1}$$

$$\text{e.g. } 5i \quad \text{or} \quad 5\sqrt{-1}$$

$$\text{where } A = 0 \quad \text{and} \quad B = 5\sqrt{-1}$$

ب. المرافق التركيبي Complex conjugate

لكل عدد معقد مرافق تركيبي يرمز له بالرمز C^* و هو ينتج من تعويض كل $\sqrt{-1}$ او i بواسطة $-\sqrt{-1}$ او $-i$

$$C = A + iB \quad \text{complex number}$$

$$C^* = A - iB \quad \text{complex conjugate}$$

ان حاصل ضرب العدد المعقد في مرافقه التركيبي هو عدد حقيقي موجب.

$$CC^* = \text{positive real number}$$

$$\text{e.g. } CC^* = (A + iB)(A - iB)$$

$$= A^2 - AiB + AiB - (iB)^2$$

ديهجت علي سعيد

$$= A^2 + B^2 \text{ positive real number}$$

٣. العامل أو المؤثر **Operator**: هو رمز يشير الى عملية رياضية تجرى على الدالة التي تكتب بعده.

$$\text{e.g. } +, d/dx, 5 \text{ in } 5fx, \sqrt{\quad}$$

$$d/dx(x^2 + 1) = 2x$$

ان d/dx هو عامل تفاضل و يرمز له بالرمز \hat{P} و يلفظ p-hat.

انواع المؤثرات:

١. المؤثر الخطي (linear operator) و هو المستخدم في ميكانيك الكم و هو يحقق العلاقات التالية:

$$\text{a) } d/dx(f + g) = df/dx + dg/dx$$

$$\text{b) } d/dx af = a d/dx f$$

حيث ان كل من f و g دوال و ان a هو ثابت.

٢. المؤثر غير الخطي (nonlinear operator)

لا يحقق شروط المؤثر الخطي

$$\sqrt{(f + g)} \neq \sqrt{f} + \sqrt{g}$$

ان من العوامل المعروفة في ميكانيك الكم عامل لابلاس و الذي يرمز له بـ ∇^2 و هو عامل تفاضل جزئي ويعبر عنه بالاحداثيات الديكارتية كما يلي:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

و يعبر عنه بالاحداثيات الكروية القطبية بالتعبير التالي:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

د. بهجت علي سعيد

ترتيب العوامل

ان قيمة المسألة في بعض العوامل تعتمد على ترتيب هذه العوامل. و ان هناك نوعان من العوامل في هذه الحالة:

١. العوامل المتبادلة Commuted operators

و هي العوامل التي لا يؤثر ترتيبها في المعادلة على القيمة النهائية للمسألة

نفرض وجود المؤثرين Q و P واللذان يؤثران على الدالة $f(x,y)$

$$\text{Let } P = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial}{\partial y}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

لمعرفة تأثير ترتيب العوامل على القيمة النهائية للمسألة في هذه الحالة نحل المسألة بالترتيب PQ ثم نحلها بالترتيب QP للعوامل.

$$\text{a) } PQ f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + 2xy) = 2$$

$$\text{b) } QP f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + 2xy) = 2$$

$$PQ f(x) = QP f(x)$$

$$PQ f(x) - QP f(x) = 0$$

$$PQ - QP = 0$$

P commute with Q

ان العاملين في هذه الحالة متبادلان لان نتيجة حل المعادلتين واحدة رغم تغير ترتيب العاملين.

٢. العوامل غير المتبادلة Commuted operators

و هي العوامل التي يؤثر ترتيبها في المعادلة على القيمة النهائية للمسألة

نفرض العاملين $P = d/dx$ و $Q = x$ و الدالة $f(x) = x^2 + 1$

$$\text{a) } PQ f(x) = d/dx x(x^2 + 1) = 3x^2 + 1$$

$$b) \text{QP} f(x) = x \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = 2x^2$$

$$\text{PQ} f(x) \neq \text{QP} f(x)$$

د. بهجت علي سعيد

P does not commute with Q

$$\text{PQ} f(x) - \text{QP} f(x) \neq 0$$

$$(\text{PQ} - \text{QP}) f(x) \neq 0$$

$$\text{PQ} - \text{QP} \equiv \text{commutator}$$

٣. معادلة القيمة الذاتية Eigen Value Equation

في ميكانيك الكم تمتلك بعض الكميات الفيزيائية قيما محددة تدعى بالقيم المسموحة او القيم الذاتية كالطاقة او الزخم.

ان المسألة الرياضية التي تستخدم لحساب القيم الذاتية لكمية معينة تدعى مسألة القيمة الذاتية و هي تصاغ بشكل معادلة تدعى معادلة القيمة الذاتية و هي معادلة تفاضلية تحقق العلاقة التالية:

$$Pf = af$$

حيث ان

f هي الدالة الذاتية للعامل P

a هي القيمة الذاتية للعامل P

P عامل يمثل كمية فيزيائية كالطاقة و الزخم

الدوال المنحلة Degenerate Functions

يمكن لمجموعة من الدوال الذاتية ان تمتلك نفس القيمة الذاتية، مثلا:

$$Pf_1 = af_1$$

$$Pf_2 = af_2$$

$$Pf_3 = af_3$$

ان f_1 و f_2 و f_3 هي دوال مختلفة لكنها تمتلك نفس القيمة الذاتية a

ديبهجت علي سعيد ٢٠١١-

٢٠١٢

مثال ذلك الاوربتالات p_x و p_y و p_z

١- يقال عن الدوال f_1 و f_2 و f_3 انها دوال منحلة

٢- ان عدد الدوال الذاتية التي تمتلك نفس القيمة الذاتية يدعى درجة الانحلالية . أن درجة الانحلالية في الحالة السابقة هي ٣ .

الدالة الذاتية

أ. في بعض الحالات اذا اثر عامل على دالة ما فهو يؤدي الى انتاج دالة جديدة مختلفة

$$d/dx \sin x = \cos x$$

$$d/dx \cos x = -\sin x$$

ان الدوال $\sin x$ و $\cos x$ ليست من الدوال الذاتية للمؤثر d/dx

ب. في حالات اخرى عندما يؤثر عامل على دالة ما يكون النتج نفس الدالة مضروبة بثابت . أن مثل هذه الدالة تدعى الدالة الذاتية.

$$d/dx e^{ax} = a e^{ax}$$

ان الدالة e^{ax} هي دالة ذاتية للعامل d/dx .

$$d/dx e^{ax^2} = 2ax e^{ax^2}$$

أن الدالة e^{ax^2} ليست ذاتية للعامل d/dx لانها اعطت بعد الحل دالة جديدة هي xe^{ax^2} مضروبة بالثابت $2a$.

د. بهجت علي سعيد ٢٠١٩-٢٠٢٠

الميكانيك التقليدي

١. قانون نيوتن في الحركة

يعبر عن حركة الجسيم في الميكانيك التقليدي بواسطة قانون نيوتن للحركة و الذي يمكن ان يكتب بالصيغة

$$F = ma$$

حيث ان m هي كتلة الجسيم و a هو تعجيله و F هي القوة المؤثرة في الجسيم و هي يمكن ان تتخذ مكونات باتجاه الاحداثيات الديكارتية.

ان التعجيل a هو مشتقة السرعة بالنسبة للزمن

$$a = dv/dt$$

اما السرعة فهي مشتقة الازاحة بالنسبة للزمن

$$v = dx/dt = \dot{x}$$

و لذلك فان التعجيل هو المشتقة الثانية للازاحة بالنسبة للزمن

$$a = d^2x/dt^2$$

ان وضع النقطة (دوت) على المتغير يعني انه المشتقة الاولى للزمن اما وضع نقطتين فيعني انه المشتقة الثانية للزمن. و بذلك يمكن التعبير عن التعجيل بالصيغ

$$a = dv/dt = d\dot{x}/dt = \ddot{x}$$

الاحداثيات العامة Generalized Coordinations

لقد وجد انه في العديد من المسائل يكون من غير الملائم استخدام الاحداثيات التقليدية (التي تتضمن المحاور المتعامدة). فمثلا في مسألة حركة الكواكب يكون من الممكن التعبير بسهولة عن القوى المصاحبة للحركات بدلالة الاحداثيات القطبية الا انها تصبح غاية في التعقيد عند استخدام

الاحداثيات الديكارتية. و لذلك من الضروري وضع معادلات حركة لا تعتمد على نوع النظام الاحداثي الذي تظهر به المسألة كمعادلات لاكرانج و هاملتون.

د. بهجت علي سعيد ٢٠١٩-

٢٠٢٠

درجة الحرية للنظام: عدد المتغيرات اللازمة لتحديد موقع النظام.

يرمز للاحداثيات العامة بالرمز q_i و يرمز للسرعة العامة بالرمز \dot{q} .

النظم الاحتفاضي Conservative system: هو النظام الذي لا تتغير طاقته الكلية مع الزمن.

$$E = T + V$$

٢. معادلة لاكرانج (La Grang Eq.)

و تدعى ايضا بصيغة لاكرانج لمعادلات الحركة. و هي معادلة عامة لانها لا تعتمد على نوع الاحداثيات المستخدمة.

تتضمن معادلة لاكرانج دالة لاكرانج التي يرمز لها بالرمز L .

$$L(q, \dot{q}, t)$$

و هي دالة لكل من الاحداثيات العامة و السرعة العامة و الزمن بالنسبة للنظام الاحتفاضي بينما هي دالة لكل من الاحداثيات العامة و السرعة العامة فقط بالنسبة للنظام اللااحتفاضي.

ان صيغتها العامة هي

$$L = T - V \quad (1)$$

حيث ان T : الطاقة الحركية و هي دالة للاحداثيات و السرعة.

V : الطاقة الكامنة و هي دالة للاحداثيات و الزمن.

ان صيغة دالة لاكرانج للنظام اللااحتفاضي هي

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, t) \quad (2)$$

و ان صيغتها للنظام الاحتفاضي هي

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i) \quad (3)$$

في هذا النظام V و L لا تعتمدان على الزمن.

ديهمت علي سعيد ٢٠١١-٢٠١٢

ب . معادلة لاكرانج (معادلة الحركة بصيغة لاكرانج)

تعتمد المعادلة على الاحداثيات العامة و السرعة العامة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q}$$

٣ . معادلة هاملتون The Hamiltonian Eq.

هي معادلة عامة لانها لا تعتمد على نوع الاحداثيات. و هي تتضمن دالة هاملتون التي تمثل الطاقة الكلية للنظام:

$$H = T + V = E_T$$

تعتمد هذه المعادلة على كل من الزخوم العامة و السرعة العامة.

ان الزخم هو حاصل ضرب السرعة في كتلة الجسم المتحرك و يمكن التعبير عنه بدلالة السرعة العامة:

$$p = mv = m\dot{q}$$

أ . دالة هاملتون

$$H = \sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - L$$

$$H = (T_{(q,\dot{q})} - V_{(q)})$$

$$\sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i -$$

ب . معادلات هاملتون (معادلات الحركة بصيغة هاملتون)

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (3)$$

د . بهجت علي سعيد ٢٠١١-٢٠١٢

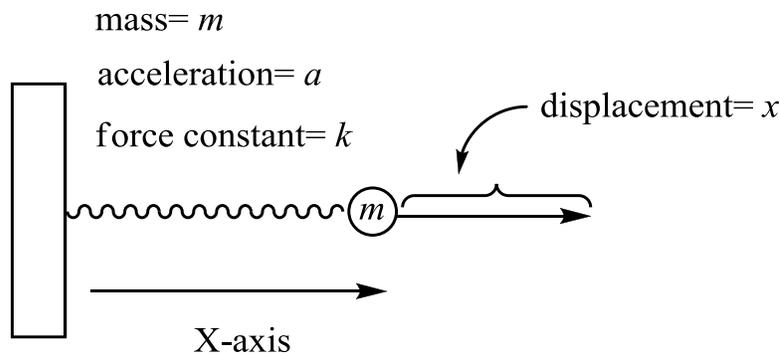
$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i \quad (5)$$

امثلة:

١ . تطبيق معادلة لاكرانج

تؤدي معادلة لاكرانج الى نفس النتائج التي تؤدي اليها معادلة نيوتن و يمكن اثبات ذلك من خلال حالة حركة جسم مرتبط بنابض حلزوني مثبت من احد طرفيه . ان القوة المرافقة لحركة الجسم الناتجة عن سحبه باتجاه المحور X تعاكسها قوة مساوية لها بالمقدار (القوة المعيدة) تتناسب مع الازاحة التي يقطعها الجسم باتجاه المحور X .



أن قوة سحب الجسم تحسب من قانون نيوتن

$$F = ma \quad (1)$$

حيث ان F هي قوة و m هي كتلة الجسم و a تعجيل الجسم.

اما القوة المعيدة فانها تحسب من العلاقة

$$F = -kx \quad (2)$$

حيث ان x الازاحة التي قطعها الجسم باتجاه المحور X و ان k هو ثابت قوة النابض.
لما كانت القوتان متساويتان فانه يمكن كتابة المعادلة التالية

$$ma = -kx \quad (3)$$

د. بهجت علي سعيد ٢٠١١-٢٠١٢

or

$$m\ddot{x} = -kx \quad (4)$$

يمكن كتابة المعادلة ٤ بدلالة الاحداثيات العامة

$$m\ddot{q} = -kq \quad (5)$$

Where $q = x$ and $\dot{q} = v = \dot{x}$ and so $\ddot{q} = \ddot{x}$

ان دالة لاكرانج للنظام الاحتفازي هي

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (6)$$

نعوض عن الاحداثيات العامة بالاحداثيات الديكارتية في دالة لاكرانج

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - V(x) \quad (7)$$

Where

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{or} \quad T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} mv^2 \quad (8)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (9)$$

نعوض المعادلتين ٨ و ٩ في ما يساويهما المعادلة ٧

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (10)$$

نعوض المعادلة ١٠ (دالة لاكرانج بدلالة الاحداثيات الديكارتية) في معادلة لاكرانج. ان معادلة لاكرانج بالاحداثيات الديكارتية هي:

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial(T-V)}{\partial x} \quad (11)$$

دز بهجت علي سعيد ٢٠١١-٢٠١٢

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) \quad (12)$$

د. بهجت علي سعيد ٢٠١١-٢٠١٢

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x} - 0) = 0 - kx \quad (13)$$

$$m\ddot{x} = -kx \quad (14)$$

or

$$m\ddot{x} = -kx \quad (15)$$

٢. تطبيق معادلة هاملتون

ان دالة هاملتون في الانظمة الاحتفاظية مساوية للطاقة الكلية للنظام و يمكن اثبات ذلك كما يلي:

$$H = \sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - L \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i \quad (2)$$

نعوض المعادلة ٢ في المعادلة ١

$$H = \sum_{i=1}^{3N} p_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (3)$$

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} - (T-V) \quad (4)$$

Since;

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5)$$

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V \quad (6)$$

د. بهجت علي سعيد ٢٠١١-

٢٠١٢

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \quad (8)$$

$$\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i^2 = 2T \quad (9)$$

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i m \dot{q}_i - T + V \quad (10)$$

$$H = 2T - T + V \quad (11)$$

$$H = T + V = E_T \quad (12)$$

اسباب ظهور ميكانيك الكم (اسباب فشل الميكانيك التقليدي)

لقد اجريت في نهايات القرن التاسع عشر و بدايات القرن العشرين سلسلة من التجارب التي ادت الى نتائج لم يتمكن الميكانيك التقليدي من ايجاد التفسير الصحيح لها و منها:

١. اشعاع الجسم الاسود Black Body Radiation

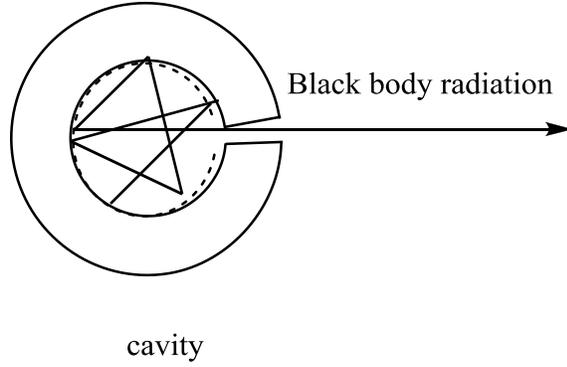
عند تسخين اي جسم فانه يبعث اشعاعا كهرومغناطسيا و ان طبيعة الاشعاع تعتمد على درجة حرارة الجسم المشع.

أن جميع الاجسام تمتص و تبعث الاشعاع و ان خصائصها كأجسام ماصة او باعثة للاشعاع تختلف الى حد كبير الا انها تمتلك نفس الطيف عند نفس درجة الحرارة. و هناك ما يدعى بالاجسام الممتصة المثالية و تدعى الاجسام السوداء.

أن الجسم الاسود: هو جسم مثالي يمتص و يبعث جميع الترددات (أو الاطوال الموجية) بصورة متساوية. و لذلك و حسب هذا التصور فإن اشعاع الجسم الاسود هو الاشعاع الذي ينبعث من الجسم الذي يبعث و يمتص جميع الترددات بصورة متساوية.

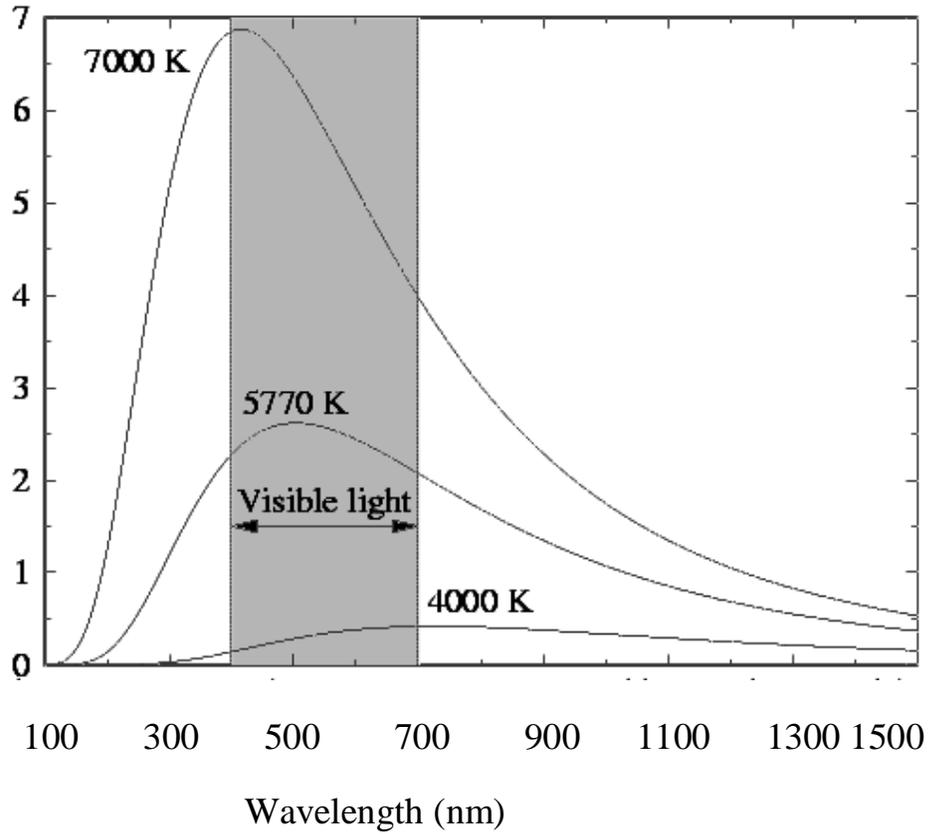
و في الحقيقة لا توجد اجسام سوداء مثالية فاغلب المواد تمتص و تبعث جميع الترددات ضمن مدى محدود من الترددات فقط.

ان افضل تمثيل للجسم الاسود هو فجوة ضمن حاوية ذات جدران عازلة و مطلية من الداخل باللون الاسود. يتضمن جدار الحاوية ثقبا دقيقا وان الجدار الداخلي لها يكون خشنا و ذلك لكي ينعكس الاشعاع الداخل من الثقب الاف المرات داخل الفجوة الى ان يتم امتصاصه بصورة شبه تامة داخل الفجوة. ان هذا يمثل امتصاصا تاما للاشعاع من قبل الفجوة.



عند تسخين الحاوية ينبعث الاشعاع من خلال الفتحة و هو يمثل عمليا اشعاع الجسم الاسود و تتم دراسة شدة الاشعاع المنبعث من الفجوة كدالة للطول الموجي أو التردد عند درجات حرارية مختلفة. لقد بينت التجارب ان هذا الاشعاع يمتلك طيفا مستمرا.

الملاحظات التجريبية المرتبطة بتجربة اشعاع الجسم الاسود:



الشكل يمثل منحني توزيع طاقة الاشعاع للجسم الاسود

١. عند رسم كثافة طاقة الأشعاع المنبعث كدالة للتردد (أو الطول الموجي) ينتج منحنى يتميز بقيمة (λ_{\max}) تمثل التردد أو الطول الموجي الذي تحصل عنده أكبر كمية من الانبعاث (تقابل أكبر شدة للأشعاع).

ان الشكل المنحني يعني ان الطاقة المنبعثة من الجسم تمتلك شدة واطئة عند الترددات العالية و الترددات الواطئة بينما تمتلك شدة اعلى في المنطقة التي تقع في الوسط.

٢. عند رفع درجة حرارة الحاوية:

أ. تزداد قمة المنحنى نحو ترددات اعلى اي نحو طول موجي اقصر. و ان حاصل ضرب الطول الموجي الذي يقابل اعلى شدة للأشعاع مع درجة الحرارة يساوي ثابت و ذلك حسب العلاقة التالية التي تدعى قانون فين للازاحة:

$$\lambda_{\max} T = \text{constant} = 2.8979 \times 10^{-3} \text{ mK} \quad (1)$$

ب. تزداد المساحة تحت المنحنى و التي تمثل الطاقة الكلية للأشعاع (شدة الأشعاع) ضمن مدى من الترددات. أن الشدة المحسوبة تتناسب طرديا مع الاس الرابع لدرجة حرارة الجسم و ان الشدة و درجة الحرارة ترتبطان بعلاقة تدعى قانون ستيفان – بولتزمان:

$$I = \sigma T^4$$

حيث ان σ هو ثابت يدعى ثابت ستيفان – بولتزمان و تبلغ قيمته $5.6703 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$

و ان I و T هما شدة الأشعاع و درجة الحرارة بوحدة الكلفن على التوالي.

لقد كانت هناك حاجة للاجابة عن الملاحظات التالية:

لماذا تتخذ العلاقة شكل المنحني و لماذا تزداد قمة الانبعاث نحو اطوال موجية اقصر عند رفع درجة الحرارة و لماذا تزداد هذه الشدة مع ارتفاع درجة الحرارة؟

اضافة للحاجة الى وضع معادلة لتفسير المنحنى لها القدرة على حساب شدة الأشعاع عند مختلف الاطوال الموجية.

تفسير الظاهرة:

١. **التفسير حسب الميكانيك التقليدي:** ان اهم المحاولات التي اعتمدت على الميكانيك التقليدي لتفسير ظاهرة اشعاع الجسم الاسود هي محاولة رايلي و جينز اللذان وضعا صيغة رياضية لحساب كثافة طاقة الأشعاع المنبعث ضمن مدى محدد من الترددات سميت معادلة رايلي-جينز.

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu \quad (2)$$

حيث ان $\rho(\nu, T)$ هي كثافة طاقة الاشعاع ضمن مدى الترددات $d\nu$

و ان k هو ثابت بولتزمان و يساوي 1.38×10^{-23} J/K

لقد استند رايلي و جينز لصياغة معادلتها على الفرض التالي:

ان اشعاع الجسم يكون صادرا عن المهتزات التوافقية التي يحتويها الجسم و ان هذه المهتزات تمتلك طاقة مقدارها kT و هي تبعث الاشعاع بشكل مستمر كما انها تمتلك مدى واسع من الترددات ينتشر ضمن الاشعاع الكهرومغناطيسي.

ان جوهر الفرض هو ان المهتزات (وبالتالي الجسم الاسود) تبعث الاشعاع بشكل مستمر.

ان المعادلة ٢ تعطي نتائج مقبولة عند الاطوال الموجية الكبيرة اي عند الجانب الايمن من منحنى الطاقة لكن نتائجها تصبح خاطئة عند الاتجاه نحو الاطوال الموجية الاقصر بحيث ان القيم المحسوبة تتجه الى المالا نهاية عند المنطقة فوق البنفسجية بدلا من الاتجاه نحو الصفر كما تدل النتائج التجريبية.

لقد سميت هذه الحالة اي اتجاه القيم المحسوبة لطاقة الاشعاع المنبعث بمعادلة رايلي-جينز و التي تستند الى الميكانيك التقليدي نحو المالا نهاية بالكارثة فوق البنفسجية. و قد مثلت فشلا للميكانيك التقليدي في التعامل مع الظواهر التي تحدث على المستوى المايكروني.

٢. التفسير حسب فرضية الكم (تفسير ماكس بلانك):

تم التفسير الصحيح من قبل العالم ماكس بلانك في عام ١٩٠٠

لقد افترض بلانك ان الاشعاع المنبعث يصدر عن مهتزات في الجسم و لكنها لا تبعث الطاقة باي قيمة كما افترض كل من رايلي و جينز و انما:

أ . ان الذرات في الجسم الاسود تنصرف كمهتزات كهرومغناطيسية تبعث الاشعاع بتردد هو ν .

ب . ان المهتزات يمكنها فقط ان تمتلك طاقات مكتمات يمكن حسابها من المعادلة:

$$E_n = nh\nu \quad (3)$$

حيث n هو عدد صحيح يمكن ان يساوي ١، ٢، ٣، و يدعى عدد الكم.

ان قيم الطاقة التي تبعثها المهتزات تكون بشكل كميات محددة تدعى كمات (quanta) مفردتها كم (quantum) و ان هذه الكمات تمتلك طاقة مقدارها $h\nu$ حيث ان h هو ثابت يدعى ثابت بلانك و ν هو التردد الاساسي للمهتز. ان الكم يمثل اصغر قيمة من الطاقة عند تردد معين.

لقد مثلت المعادلة ٣ بداية فيزياء الكم و الذي يفترض ان طاقات مختلف الاجسام يمكنها فقط ان تملك قيما محددة تعتمد على عدد الكم n .

لقد وضع بلانك معادلة تجريبية (empirical) لتفسير منحى توزيع طاقة الاشعاع سميت قانون بلانك (Blank distribution):

١ . المعادلة بدلالة التردد

$$\rho(v,T) dv = 8\pi hv^3/c^3 (e^{hv/kT} - 1)^{-1} dv \quad (4)$$

٢ . المعادلة بدلالة الطول الموجي

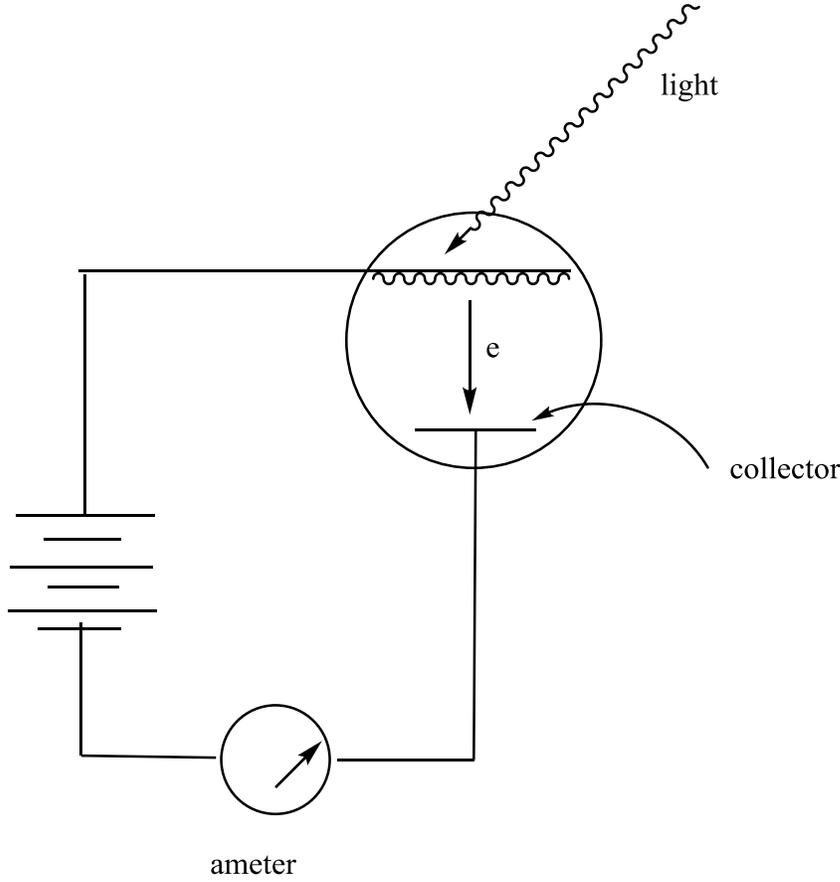
$$(\lambda, T) d\lambda = 8\pi hc/\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)^{-1} d\lambda \quad (5)$$

ان المعادلة تعطي نتائج مطابقة للقيم التجريبية. و هذا يعني ان فكرة ماكس بلانك في تكمية الطاقة صحيحة.

٣ . ظاهرة التأثير الكهروضوئي Photoelectric Effect

ازدواجية مادة – موجة للاشعاع

عند سقوط حزمة من اشعاع كهرومغناطيسي ذات تردد معين على سطح فلز تنبعث الالكترونات من سطحه (تسمى الالكترونات الضوئية) و ذلك لان هذه الالكترونات سوف تمتص الطاقة من حزمة الاشعاع و تكتسب طاقة حركية كافية للتغلب على قوى الربط التي تربطها بالفلز و تغادر سطحه.



ان الطاقة الحركية القصوى للالكترونات المنبعث يمكن حسابها من العلاقة التالية

$$K_{\max} = eV_s \quad (1)$$

حيث ان V هو جهد الايقاف و e شحنة الالكترون.

الملاحظات التجريبية:

١. ان شدة الضوء الساقط ليس لها تأثير على الطاقة الحركية للالكترونات المنبعثة.
٢. لا تنبعث الالكترونات الا اذا كان تردد الضوء الساقط على الفلز اكبر من قيمة معينة تدعى تردد العتبة (Threshold frequency).
٣. لا يوجد وقت مهم عمليا بين سقوط الضوء و تحرر الالكترونات فالوقت اللازم لذلك هو أقل من 10^{-10} ثانية.

التفسير حسب النظرية الموجية (الميكانيك التقليدي):

حسب النظرية الموجية التقليدية فإن طاقة الاشعاع تحملها موجة الاشعاع و ان هذه الطاقة تتناسب مع شدتها و ليس ترددها و عند اصطدام الموجة بالسطح فان الالكترتون يقوم بامتصاص الطاقة من الموجة حتى تصبح طاقته اكبر من طاقة الربط و يتحرر من السطح. ان اقل طاقة لازمة لتحرير الالكترتون من السطح تدعى دالة الشغل للفلز (ϕ) و عادة تكون بحدود بضعة الكترتون فولتات.

ينتج عن هذا التصور التقليدي للظاهرة ثلاثة استنتاجات رئيسية

- ١ . ان شدة الاشعاع يجب ان تتناسب طرديا مع الطاقة الحركية القصوى للالكترتون المنبعث.
- ٢ . يمكن للتأثير الكهروضوئي ان يحصل عند سقوط اي ضوء بغض النظر عن تردده.
- ٣ . يجب ان تكون هناك فترة تأخير بين سقوط الضوء و تحرر الالكترتون يكتسب خلالها الالكترتون الطاقة الكافية لتحريره.

ان هذه الاستنتاجات مخالفة تماما للنتائج التجريبية و بهذا فشلت النظرية الموجية التقليدية في تفسير الظاهرة.

التفسير حسب فرضية الكم (تفسير اينشتاين)

استند اينشتاين في تفسيره لظاهرة التأثير الكهروضوئي الى نظرية ماكس بلانك الكمية. فقد افترض ان طاقة الاشعاع لا تتوزع بصورة مستمرة على جبهة الموجة الكهرومغناطيسية كما تقترض النظرية الموجية التقليدية و انما تكون محددة بشكل كميات صغيرة. سميت هذه الكميات الصغيرة من طاقة الضوء بالفوتونات. فالضوء هو ليس موجة فقط بل سيل من الجسيمات التي تمتلك كل منها طاقة محددة. ان طاقة الفوتون تعتمد على تردده حسب المعادلة

$$E_n = nh\nu \quad (2)$$

و حسب هذه الفرضية يتحرر الالكترتون الضوئي كنتيجة لتفاعله مع فوتون مفرد بدلا عن تفاعله مع الموجة ككل و ان طاقة الفوتون تنتقل بشكل تام و اني الى الالكترتون. فاذا كانت طاقة الفوتون كافية للتغلب على دالة الشغل للفلز فان الالكترتون سوف يتحرر اما اذا كانت طاقة الفوتون اقل من دالة الشغل للفلز لا يحدث التأثير الكهروضوئي.

ان قوة جذب الفلز للالكترتون تدعى حاجز الطاقة الكامنة كما تدعى ايضا دالة الشغل للفلز Φ أو ω .

حساب الطاقة الحركية للالكترتون المنبعث:

$$1/2mv^2 = h\nu - h\nu_0 \quad (3)$$

$$h\nu_0 = \omega$$

$$= hv - \omega \quad (4)$$

حيث ان ν و ν_0 و ω هي تردد الضوء الساقط و تردد العتبة (قيمة ثابتة لكل فلز) و دالة الشغل للفلز على التوالي.

و عند تسليط فرق جهد على اللوح الجامع

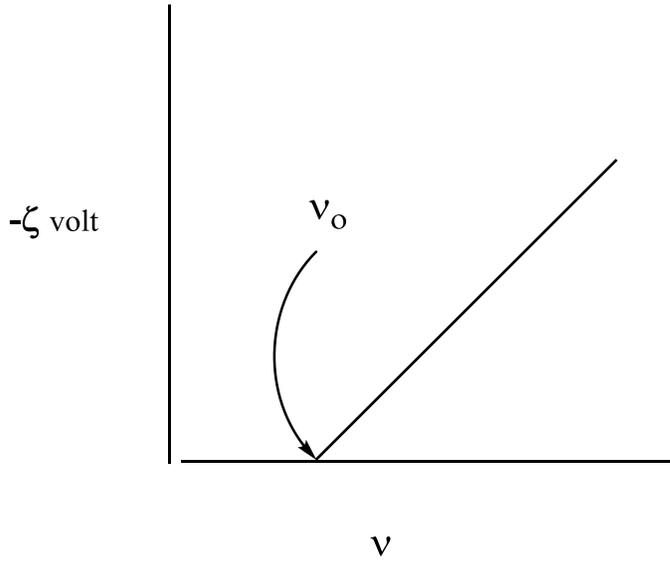
$$1/2mv^2 = hv - h\nu_0 = -\zeta e$$

حيث ان ζ و e هما فرق الجهد و شحنة الالكترون على التوالي.

و عند رسم علاقة بين ζ - و ν ينتج خط مستقيم:

١. ميله يساوي h/e

٢. قطعه يساوي $h\nu_0/e$



لقد استند اينشتاين الى فكرة بلانك في تفسير الظاهرة.

- لقد افترض بلانك ان الطاقة لا تمتص و تنبعث بشكل مستمر بل بشكل كميات محددة تدعى كمات، الا انه مع ذلك اعتبر الاشعاع موجة مستمرة.
- لقد افترض اينشتاين ان الاشعاع نفسه مكمي و كل كمية منه تدعى فوتون و ان طاقتها تساوي $h\nu$ و ان الفوتون يمثل اقل كمية ممكنة من الضوء عند طول موجي او تردد معين.

فالأشعاع عبارة عن سيل من الجسيمات المكلمات لكل منها طاقة تتناسب مع تردده و بذلك فان الاشعاع (ومن ضمنه الضوء) يمتلك خاصية مادة – موجة و هذه الظاهرة تدعى ازدواجية مادة – موجة.

الاطياف الذرية

الطيف الخطي لذرة الهيدروجين

عند تعريض غاز الهيدروجين الذي تحت ضغط مخلخل الى فرق جهد كهربائي عالي (٥٠٠٠ فولت) فانه سوف يبعث ضوء ذو لون احمر-ارجواني. و عند تحليل هذا الضوء يلاحظ انه مكون من اربع خطوط رئيسة تقع في المنطقة المرئية من الطيف الكهرومغناطيسي تدعى بالطيف الخطي للهيدروجين. و اضافة الى هذه الخطوط تظهر خطوط اخرى في مناطق اخرى من الطيف التي لا يمكن رؤيتها بالعين المجردة و هي المنطقتين فوق البنفسجية و تحت الحمراء.

$H\alpha =$ ان الاطوال الموجية لخطوط انبعاث الهيدروجين في المنطقة المرئية هي

$$6562.8 \text{ \AA} = 656.28 \text{ nm (red)}$$

$$H\beta = 4961.3 \text{ \AA} = 496.13 \text{ nm (green)}$$

$$H\gamma = 4340.5 \text{ \AA} = 434.05 \text{ nm (blue)}$$

$$H\delta = 4101.7 \text{ \AA} = 410.17 \text{ nm (violet)}$$

وفي عام ١٨٨٥ اكتشف بالمر علاقة تجريبية يمكن من خلالها تقدير الاطوال الموجية لهذه الخطوط و بشكل مضبوط و تدعى بصيغة بالمر

$$\lambda(\text{cm}) = 3645.6 \times 10^{-8} \left(\frac{n^2}{n^2 - 2^2} \right) \dots\dots(1)$$

حيث ان n هو عدد صحيح اكبر من ٢ . و باستخدام هذه الصيغة استطاع بالمر التنبؤ بوجود خط طيفي خامس و حساب طوله الموجي و هو يقع بين المنطقتين المرئية و فوق البنفسجية.

و ضافة الى ذلك استطاعت هذه المعادلة التنبؤ بوجود خطوط اخرى في الطيف الذري للهيدروجين تقع في المنطقتين فوق البنفسجية و تحت الحمراء.

و لما كانت الخطوط الطيفية تظهر عند التحليل بشكل مجاميع فقد سميت كل مجموعة سلسلة.

يتضمن الطيف الذري للهيدروجين مجموعة سلاسل طيفية هي:

Lyman series: n^2/n^2-1^2 , where $n= 2, 3, \dots$ (UV)

Balmer series: n^2/n^2-2^2 , where $n= 3, 4, \dots$ (Vis.)

Paschen series: n^2/n^2-3^2 , where $n= 4, 5, \dots$ (IR)

Brackett series: n^2/n^2-4^2 , where $n= 5, 6, \dots$ (IR)

Pfund series: n^2/n^2-5^2 , where $n= 6, 7, \dots$ (IR)

و تكتب صيغة بالمر عادة بدلالة مقلوب الطول الموجي

$$1/\lambda = R(1/2^2 - 1/n^2)$$

حيث ان R هو ثابت رايدبرك و قيمته $109677,76$ سم^{-١} اما $1/\lambda$ فيدعى العدد الموجي و يرمز له بالرمز ν و وحدته هي سم^{-١}.

كما انها تكتب بصيغة اكثر عمومية هي

$$\nu = 1/\lambda = R (1/n_1^2 - 1/n_2^2)$$

حيث ان $n_1 = 1$ و $n_2 = 2, 3, 4, \dots$

اضافة الى هذه الصيغة ظهرت صيغ اخرى تخص عناصر اخرى غير الهيدروجين وجميعها تشترك بنفس الثابت R.

و على الرغم من تمكن هذه الصيغ من حساب الاطوال الموجية الصحيحة لخطوط الطيف الذري الا انه لم يتم التمكن من تفسيرها بدلالة النظرية الكهرومغناطيسية التقليدية.

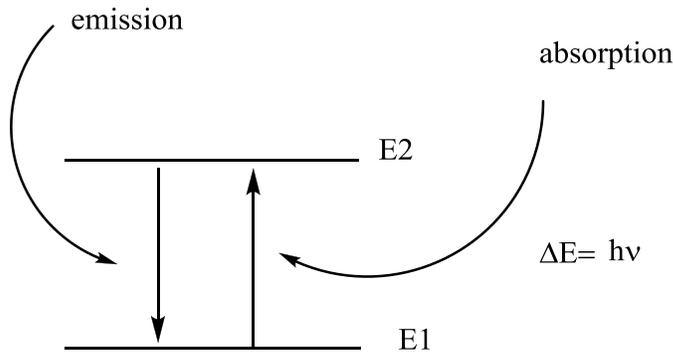
نموذج رذرفورد-بور لذرة الهيدروجين و تفسير الاطياف الذرية

لقد اقترح رذرفورد ان الذرة مكونة من نواة موجبة الشحنة وان شحنتها هي Ze (حيث ان e هي شحنة الالكترون و Z العدد الذري) و هي تمثل معظم كتلة الذرة و تقع في مركزها. و ان النواة تكون محاطة بالالكترونات التي تدور حولها. و ان هناك قوة طاردة لامركزية للحركة المدارية للاكترونات كافية لموازنة قوة الجذب بين النواة الموجبة و الالكترونات السالبة.

لقد كان هذا النموذج للذرة خاطئا لانه و طبقا لقوانين الديناميك الكهربائي فان الالكترون خلال حركته سيفقد و بشكل مستمر طاقة بشكل اشعاع و بالتالي فان قوة الجذب بينه و بين الذرة سوف تتغلب على القوة الطاردة. و نتيجة لذلك فان الالكترون سوف يسلك مدارا حلزونيا ثم يسقط في النواة خلال 10^{-12} ثانية و تتلاشى الذرة. و ان كان هذا صحيحا فيجب ان تكون الاطياف الناتجة عن الذرات مستمرة و هذا مخالف للواقع حيث ان الذرة مستقرة في الظروف الاعتيادية و ان الاطياف الذرية خطية و ليست مستمرة.

و لتصحيح نموذج رذرفورد الذري اقترح العالم نيلز بور (1913) مجموعة من الفرضيات و هي

1. ان الالكترون يدور في مدارات مسموحة لا يدور في غيرها تدعى الحالات المستقرة او المدارات.
2. لا يمكن للاكترون ان يبعث او يمتص الطاقة (او الاشعاع الكهرومغناطيسي) عندما يكون في احد المدارات المسموحة.
3. عند انتقال الالكترون من حالة مستقرة الى اخرى تنبعث الطاقة من الذرة بشكل فوتون من الاشعاع الكهرومغناطيسي طاقته تساوي فرق الطاقة بين الحالتين اللتين حصل بينهما الانتقال:

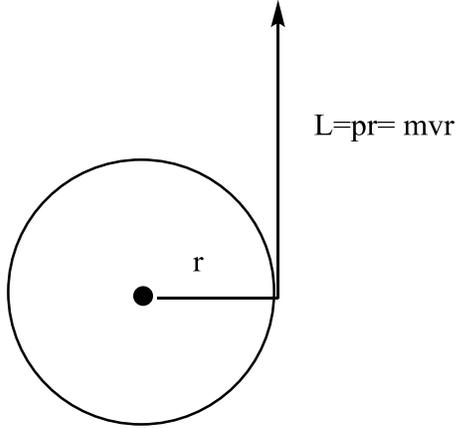


Energy levels

$$\Delta E = hv = E_2 - E_1 \quad \text{energy emission}$$

$$\Delta E = hv = E_1 - E_2 \quad \text{energy absorption}$$

٤. ان الزخم الزاوي للالكترون (L) يكون مكمى فهو يمتلك قيما محددة في كل مدار.



$$L = mvr = nh/2\pi$$

حيث ان n هو عدد صحيح (عدد الكم) و h هو ثابت بلانك و m كتلة الالكترون.

حساب نصف قطر الالكترون

لقد وضع بور من خلال هذا النموذج معادلة لحساب نصف قطر المدار الذي يدور فيه الالكترون:

ان القوى التي يتعرض لها الالكترون في الذرة هي

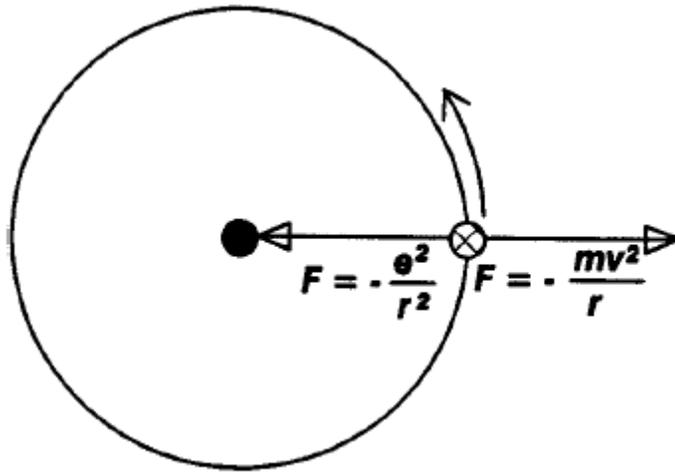
١. قوة التجاذب الكهروستاتيكي بين النواة و الالكترون

$$F = -e^2/r^2$$

٢. القوة الطاردة اللامركزية و الناتجة عن حركة الالكترون

$$F = -mv^2/r$$

و لكي يبقى الالكترون في مداره فيجب ان تكون هاتين القوتين متساويتين:



$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{mr}}$$

since

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

$$v = \frac{nh}{2\pi mr}$$

$$\sqrt{\frac{e^2}{mr}} = \frac{nh}{2\pi mr}$$

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2}$$

تبين العلاقة ان نصف قطر الاوربيتال يزداد مع زيادة n^2 (لان m و h و e هي ثوابت) و بالتالي فان الاوربتال الذي يكون عدد كمي ٢ مثلا يكون نصف قطره اربع اضعاف الاوربتال الذي عدد كمي يساوي ١.

و لما كان $h/2\pi = \hbar$ فان المعادلة اعلاه يمكن كتابتها بالصيغة التالية

$$R_n = n^2 \hbar^2 / m e^2$$

و بالنسبة لذرة الهيدروجين

$$n = 1,$$

$$r_1 = \hbar^2 / m e^2 = 0.529 \text{ \AA} = a_0$$

و يدعى نصف قطر بور و هو يمثل قطر المدار الاول لذرة الهيدروجين.

حساب طاقة الالكترين

ان الطاقة الكلية هي مجموع الطاقة الكامنة (الكهروستاتيكية) و الطاقة الحركية للالكترين

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{r}$$

Since

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

Or

$$mv^2 = \frac{e^2}{r}$$

Multiplying both sides of the above equation by $\frac{1}{2}$ gives

$$\frac{1}{2}mv^2 = e^2/2r$$

ان الطرف الايسر من المعادلة يمثل الطاقة الحركية

$$E = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$$

Since

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2}$$

$$E = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{e^2}{2(n^2 h^2 / 4\pi^2 m e^2)} = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}$$

يلاحظ من المعادلة اعلاه ان طاقة الالكترون تعتمد على قيمة عدد الكم n و هي تنخفض مع ازدياد n^2 . و عندما تكون قيمة عدد الكم مالانهاية او $n = \infty$ اي عندما ينفصل الالكترون عن النواة او يحصل التاين فان الطاقة الكلية للالكترون تساوي صفرا.

و يمكن كتابة تعبير الطاقة بالصيغة التالية

$$E = -\frac{1}{n^2} \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}$$

و التي من خلالها يمكن حساب طاقة الكلية للاوربتال و لمختلف اعداد الكم. ان مقدار الطاقة لبعض المستويات هو

$$n = 1, E = -21.7 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$n = 2, E = -5.43 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$n = 3, E = -2.41 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

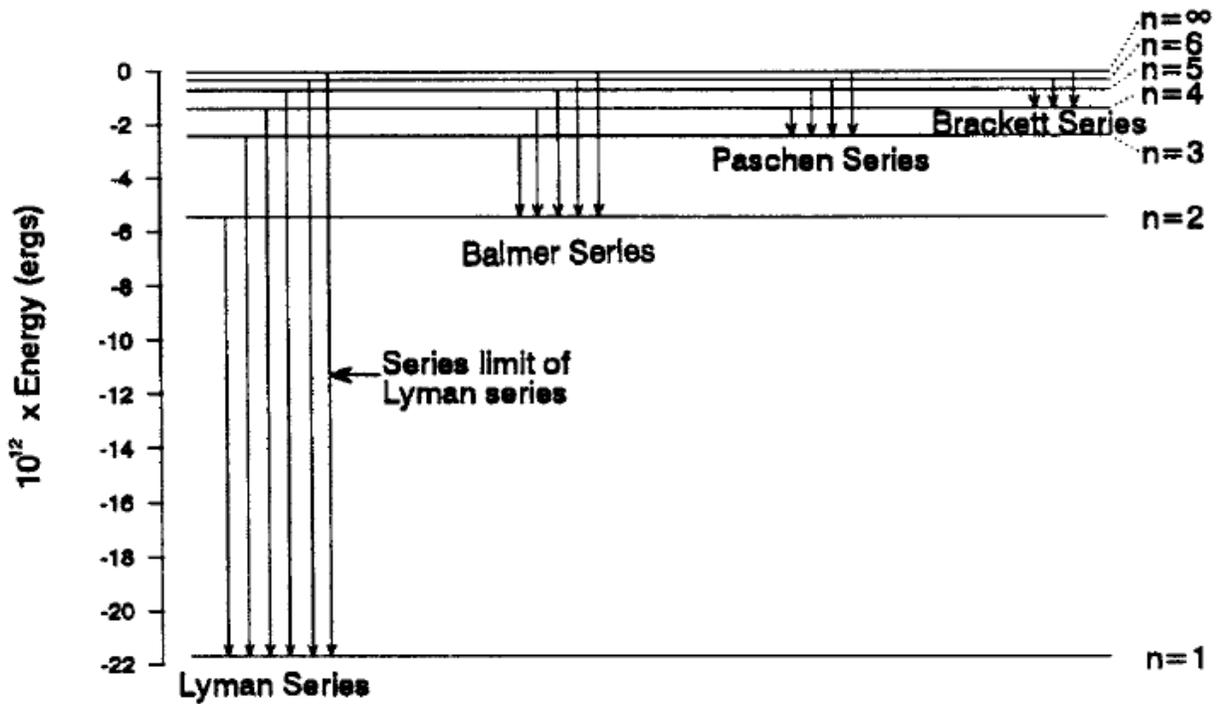
$$n = 4, E = -1.36 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$n = 5, E = -0.87 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$n = 6, E = -0.63 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$n = \infty, E = 0.$$

ان كل قيمة من هذه القيم يمثل مستوى طاقة للالكترون و عند رسم الطاقات كدالة لاعداد الكم نحصل على مخطط مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين.



يلاحظ من المخطط ان مستويات الطاقة تقترب من بعضها مع زيادة عدد الكم. و لاجل تحريك الالكترون من مستوى اوطأ الى مستوى اعلى يجب تزويده بالطاقة لان كل من الالكتروت و النوواة يجذب بعضهما البعض بقوة كهروستاتيكية شديدة.

جهد التأين

ان الازاحة التامة للالكترون من الذرة يتطلب طاقة تدعى طاقة التأين أو جهد التأين و هي تمثل الطاقة اللازمة لازاحة الالكترون نحو مدار يكون فيه $n = \infty$.

مثال: احسب جهد التأين لذرة الهيدروجين

نحسب طاقة الالكترون في المدار الاوطا و هو المدار $n = 1$ و طاقته في المدار $n = \infty$ ثم نحسب الفرق بينهما

$$\Delta E = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-21.7 \times 10^{-12} \text{ erg}) = 21.7 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

حساب الطول الموجي لخطوط الطيف

يتم ذلك من خلال حساب فرق الطاقة بين المستويين اللذين حصل بينهما الانتقال ثم استخدام العلاقة

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

مثال: احسب الطول الموجي لخط الانبعاث الناتج من انتقال الالكترون من المستوى $n=3$ الى المستوى $n=2$

$$\Delta E_{3,2} = E_3 - E_2 = -2.41 \times 10^{-12} \text{ erg} - (-5.43 \times 10^{-12} \text{ erg}) = 3.02 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{hc}{E} \\
&= \frac{(6.63 \times 10^{-27} \text{ erg s}) \times (3.00 \times 10^{10} \text{ cm/s})}{3.02 \times 10^{-12} \text{ erg}} \\
&= 6.59 \times 10^{-5} \text{ cm},
\end{aligned}$$

ان القيمة هي ٦٥٩ نانومتر و هي مطابقة للخط الطيفي $H\alpha$ في طيف ذرة الهيدروجين. و عند حساب فرق الطاقة بين $n=2$ و $n=4$ نحصل على طول موجي مقداره ٣٦٦ نانومتر و هو يطابق خطا طيفيا اخر في سلسلة بالمر و هكذا. ان هذا يعني ان خطوط الطيف لسلسلة بالمر تناظر الضوء المنبعث نتيجة لانتقال الالكترون من الحالات التي يكون فيها عدد الكم يساوي ٣، ٤، ٥... الى الحالة التي يكون فيها عدد الكم يساوي ٢.

و بنفس الاسلوب يمكن حساب طاقات الخطوط المنبعثة نتيجة لانتقال الالكترون من المدارات التي يكون فيها عدد الكم يساوي ٢، ٣، ٤، ٥... الى الاوربتال الذي عدده الكمي ١. ان هذه الطاقات تقع ضمن المنطقة فوق البنفسجية و تعود الى سلسلة ليمان و هكذا مع بقية السلاسل.