متسلسلات القوى Power series

ناقشنا في الفصل الاول المتسلسلات التي تكون حدودها ثابتة. ان المتسلسلات الاكثر فائدة هي المتسلسلات التي تكون حدودها دالة لـ x حيث ان هناك العديد من هذا النوع من المتسلسلات. في هذا الفصل سوف نتطرق الى المتسلسلات التي يكون حدها النوني عبارة عن كمية ثابتة مضروبة مع x^n او $(x-a)^n$، حيث ان a كمية ثابتة. هذه المتسلسلات تدعى متسلسلات القوى، لان حدودها مضروبات قوى x^n او $(x-a)^n$.

تعريف: متسلسلات القوى $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ حول $x = a$، تاخذ الصيغة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

حيث ان a تمثل مركز المتسلسلة، C_n ثوابت. حول $x = 0$ متسلسلات القوى تاخذ الصيغة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

هدفنا الاول هو لدراسة اي قيمة من قيم x متسلسلة القوى المتقاربة.

تقارب متسلسلات القوى Convergence of power series

في العموم، يمكننا ان نحدد الفترة التي تتقارب فيها متسلسلات القوى باستخدام اختبار النسبة والجذر النوني المطلق. حيث تسمى مجموعة قيم x التي تكون عندها متسلسلة متقاربة بفترة التقارب، ويسمى نصف طول فترة التقارب بنصف قطر تقارب المتسلسلة ويرمز له بالرمز R. واليك مجموعة من الامثلة:

مثال: جد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)$.

الحل: يمكن كتابة متسلسلة القوى بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}\right) = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$$

باستخدام اختبار النسبة المطلق:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right|\right)$$

اعداد: د. موسى كاظم شامر و د. ماجد عبد الله ناطق قسم الفيزياء- كلية التربية للعلوم الصرفة –جامعة البصرة

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n^2x}{(n+1)^2}\right|\right) = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = |x|\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^2 = |x|$$

تكون متسلسلة القوى متقاربة $|x| < 1$ والتي تكافئ $-1 < x < 1$ ومتباعدة $|x| > 1$ ويفشل عندما $|x| = 1$ اي عند $x = 1$ و $x = -1$. للنناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} +$$

وهي متسلسلة p وهي متقاربة وذلك لكون $p > 1$.

الحالة الثانية: عندما $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n^2} +$$

وهي متسلسلة متناوبة متقاربة (حققت الشروط الثلاثة).

لذلك فأن متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)$ متقاربة ضمن الفترة خلال الفترة $-1 \le x \le 1$ ونصف قطر التقارب $R = 1$.

مثال: جد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-2)^n}{3^n}\right)$.

الحل: يمكن كتابة متسلسلة القوى بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-2)^n}{3^n}\right) = \frac{x-2}{3} + \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(x-2)^3}{3^3} + \cdots + \frac{(x-2)^n}{3^n} +$$

باستخدام اختبار الجذر النوني المطلق:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left(\frac{x-2}{3}\right)^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x-2}{3}\right|\right) = \left|\frac{x-2}{3}\right|$$

تتقارب المتسلسلة عندما $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1$ والتي تكافئ $-1 \le x < 5$ وتتباعد $\left|\frac{x-2}{3}\right| > 1$ ويفشل الاختبار عند $\left|\frac{x-2}{3}\right| = 1$ اي عند $x = 5$ و $x = -1$. للنناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $x = 5$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{3^n}\right) = 1 + 1 + 1 + \cdots + \frac{3^n}{3^n} +$$

وهي متسلسلة متباعدة.

الحالة الثانية: عندما $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-3)^n}{3^n}\right) = -1 + 1 - 1 + \cdots + \frac{(-3)^n}{3^n} +$$

وهي متسلسلة متباعدة، لذلك فأن متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-2)^n}{3^n}\right)$ متقاربة ضمن الفترة خلال الفترة $-1 < x < 5$.

مثال: جد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)$.

الحل: باستخدام اختبار النسبة المطلق:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|\right)$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x}{n+1}\right|\right) = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 < 1$$

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ متقاربة لكل x.

مثال: جد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n n!)$.

الحل: باستخدام اختبار النسبة المطلق:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x^{n+1}(n+1)!}{x^n n!}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}(|x(n+1)|) = |x|\lim_{n\to\infty}((n+1)) = \infty$$

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n n!)$ متقاربة فقط عند $x = 0$ ومتباعدة لباقي قيم x .

مثال: جد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$.

الحل:

باستخدام اختبار النسبة المطلق:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{xn}{n+1}\right|\right)=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=|x|$$

تكون متسلسلة القوى متقاربة $|x|<1$ والتي تكافئ $(-1<x<1)$ ومتباعدة $|x|>1$ ويفشل عندما $|x|=1$ اي عند $x=1$ و $x=-1$. للنناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $x=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+$$

وهي متسلسلة متناوبة متقاربة تحقق الشروط الثلاثة.

الحالة الثانية: عندما $x=-1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\left(\frac{-1}{n}\right)\right)=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{-1}{n}\right)+$$

وهي متسلسلة متناوبة متباعدة (لم تحقق الاول والثاني).

لذلك فأن متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n}\frac{x^n}{n}\right)$ متقاربة ضمن الفترة خلال الفترة $-1<x\leq 1$.

مثال: جد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-x)^n}{2^n}\right)$.

الحل: يمكن كتابة متسلسلة القوى بالشكل التالي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-x)^n}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^n}{2^n}\right)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{2^n}+$$

باستخدام اختبار النسبة المطلق:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)=\left|\frac{x}{2}\right|$$

تكون متسلسلة القوى متقاربة $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ والتي تكافئ $(-2 < x < 2)$ ومتباعدة $\left|\frac{x}{2}\right| > 1$ ويفشل عندما $\left|\frac{x}{2}\right| = 1$ اي عند $x = 2$ و $x = -2$. للنناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $x = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^n}{2^n}\right) = 1 - 1 + 1 - 1 \dots + \frac{(-1)^n 2^n}{2^n} +$$

وهي متسلسلة متباعدة.

الحالة الثانية: عندما $x = -2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^n}{2^n}\right) = 1 + 1 + 1 + 1 \dots + \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n} +$$

وهي متسلسلة متباعدة.

لذلك فأن متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-x)^n}{2^n}\right)$ متقاربة ضمن الفترة خلال الفترة $-2 < x < 2$.

مثال: حدد قيم x التي تتقارب فيها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right)$.

الحل: يمكن كتابة متسلسلة القوى بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} +$$

باستخدام اختبار النسبة المطلق:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|\right) = |x| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = |x|$$

تكون متسلسلة القوى متقاربة $|x| < 1$ والتي تكافئ $(-1 < x < 1)$ ومتباعدة $|x| > 1$ ويفشل عندما $|x| = 1$ اي عند $x = 1$ و $x = -1$. للنناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} +$$

وهي متسلسلة متناوبة متقاربة تحقق الشروط الثلاثة.

الحالة الثانية: عندما $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots + (-1)^{n+1} \left(\frac{-1}{n} \right) +$$

وهي متسلسلة متناوبة متباعدة لعدم تحقق الشرط الاول.

لذلك فأن متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \right)$ متقاربة ضمن الفترة خلال الفترة $-1 < x \leq 1$.

تمثيل الدوال كمتسلسلات قوى Repersentation functions as a power series

يمكن استخدام متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لتعريف الدالة $f(x)$ التي مجالها فترة تقارب متسلسلة القوى. اي ان لكل x في فترة تقارب المتسلسلة يمكن كتابة $f(x)$ كما يأتي:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

والصيغة السابقة تمكننا من ايجاد القيمة التقريبية للدالة $f(x)$ عند النقطة c كما يلي:

$$f(c) \approx a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n + \cdots$$

إحدى التقنيات المفيدة للحصول على سلسلة القوى لدالة ما، هي ربط الدالة بمجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1-r}$$

كما سيتم توضيحه في الامثلة التالية:

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

الحل: بالمقارنة مع المتسلسلة الهندسية المتقاربة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = 1$ و $r = x$ وبالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 +$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $|x| < 1$ او ما يكافئ $-1 < x < 1$.

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{2}{1+2x}$.

الحل: إذا أعدنا كتابة الدالة $f(x)$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$f(x) = \frac{2}{1-(-2x)}$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = 2$ و $r = -2x$ وبالتالي:

$$f(x) = \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n+1} x^n$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $|-2x| < 1$، او $|x| < \frac{1}{2}$ او ما يكافئ $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$..

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2+4}$.

الحل: إذا أعدنا كتابة الدالة $f(x)$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{(x-2)^2}{4}+1} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)}$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = \frac{1}{4}$ و $r = \left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)$ وبالتالي

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}(-1)^n \left(\frac{x-2}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^{2n}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $\left|-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right| < 1$.

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{2x}{2-x}$.

الحل: إذا أعدنا كتابة الدالة $f(x)$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$f(x) = \frac{2x}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} =$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = 1$ و $r = \frac{x}{2}$ وبالتالي

$$f(x) = \frac{2x}{2-x} = \frac{2x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$.

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

الحل: إذا أعدنا كتابة الدالة $f(x)$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} =$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = \frac{1}{2}$ و $r = \frac{x}{2}$ وبالتالي

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \cdots$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$.

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$.

الحل: إذا أعدنا كتابة الدالة $f(x)$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$f(x) = \frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)} =$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = \frac{1}{4}$ و $r = -\frac{x^2}{4}$ وبالتالي

$$f(x) = \frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $\left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1 \to \frac{x^2}{4} < 1 \to x^2 < 4 \to -2 < x < 2$

مثال: جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{6x}{5x^2-4x-1}$.

الحل: نستخدم تجزئة الكسور

$$\frac{6x}{5x^2-4x-1} = \frac{6x}{(5x+1)(x-1)} = \frac{A}{(5x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(5x+1)}{(5x+1)(x-1)}$$

$$6x = A(x-1) + B(5x+1)$$

عند $x = -\frac{1}{5}$

$$6\left(-\frac{1}{5}\right) = A\left(\left(-\frac{1}{5}\right)-1\right) \to\to\to A = 1$$

عند $x = 1$

$$6x = +B(5+1) \to\to\to B = 1$$

$$\frac{6x}{5x^2-4x-1}=\frac{1}{(5x+1)}+\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{1+5x}-\frac{1}{1-x}$$

بالنسبة لـ $\frac{1}{1+5x}$، إذا أعدنا كتابته لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$\frac{1}{1-(-5x)}$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{1-r}$$

فأن $a=1$ و $r=-5x$ وبالتالي

$$=\frac{1}{1+5x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-5x)^n=1-5x+(-5x)^2+(-5x)^3+\cdots+$$

بالنسبة لـ $\frac{1}{1-x}$ ، بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{1-r}$$

فأن $a=1$ و $r=x$ وبالتالي

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+$$

وبالتالي تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x)=\frac{6x}{5x^2-4x-1}$

$$f(x)=\frac{6x}{5x^2-4x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-5x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}((-5)^n-1)x^n$$

تفاضل متسلسلات القوى

بما ان متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ تمثل دالة مجالها فترة تقارب المتسلسلة فمن الطبيعي ان تكون المتسلسلة قابلة للتفاضل في فترة تقاربها وعلاوة على ذلك المشتقة يمكن ايجادها من متسلسلات القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (حد بحد) بطريقة مماثلة مشتقة متعددة الحدود.

نظرية: اذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة القوى ونصف قطر تقاربها R>0 ، فأن $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ لها نفس قطر التقارب R>0

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < R$$

ملاحظة: على الرغم من ان النظرية اعلاه تنص على ان نصف قطر تقارب متسلسلة القوى يساوي نصف قطر تقارب مشتقتها فان هذا يتضمن تساوي فترتي تقارب المتسلسلتين.كذلك النظرية نفسها تنص على ان متسلسلة القوى المتقاربة التي نصف قطر تقاربها يختلف عن الصفر، قابلة للتفاضل مرة واحدة، ولكن المشتقة هي متسلسلة قوى يمكن تفاضلها وهذا يعني ان المتسلسلة الاصلية يمكن تفاضلها مرتين، وبتكرار العملية نستنتج ان متسلسلة القوى التي نصف قطر تقاربها $R > 0$ لها مشتقات من كل الرتب في الفترة $(-R, R)$ وقيم المشتقات عند 0 لها علاقة بالاعداد $a_0, a_1, a_2, \dots$ كما يتضح من النظرية التالية.

نظرية: اذا كان نصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو $R > 0$ واذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حيث ان $x \in (-R, R)$، فأن الدالة f لها مشتقات من كل الرتب في فترة التقارب و $f^{(n)}(0) = n!\, a_0$ لكل $n \geq 0$ وبناء على ذلك

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad where\ \ x \in (-R, R)$$

مثال: اذا كان لدينا الدالة

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

جد $f'(x)$ و $f''(x)$.

الحل:نجد $f'(x)$ اولاً حد بحد

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + n x^{n-1} + \cdots$$

نجد $f''(x)$ ثانياً حد بحد

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$

مثال: بأستخدام تفاضل متسلسلة القوى، جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{4}{(2-x)^2}$.

الحل: ان $f(x) = \frac{4}{(2-x)^2}$ تمثل مشتقة الدالة $g(x) = \frac{2x}{2-x}$. إذا أعدنا كتابة الدالة $g(x)$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$g(x) = \frac{2x}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} =$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = 1$ و $r = \frac{x}{2}$ وبالتالي

$$g(x) = \frac{2x}{2-x} = \frac{2x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$$

تكون المتسلسلة عندما $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ او ما يكافئ $-2 < x < 2$. للحصول على تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x)$، نفاضل المتسلسلة:

$$f(x) = \acute{g}(x) = \frac{4}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^n}$$

والتي تتقارب ايضاً عند $-2 < x < 2$.

مثال: بأستخدام تفاضل متسلسلة القوى، جد تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

الحل: ان $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ تمثل مشتقة الدالة $g(x) = \frac{1}{1-x}$. بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن $a = 1$ و $r = x$ وبالتالي

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

تكون المتسلسلة عندما $|x| < 1$ او ما يكافئ $-1 < x < 1$. للحصول على تمثيل متسلسلة القوى للدالة $f(x)$، نفاضل المتسلسلة:

$$f(x) = \acute{g}(x) = \frac{2}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{n-1}$$

والتي تتقارب ايضاً عند $-1 < x < 1$.

تكامل متسلسلات القوى

اذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى ونصف قطر تقاربها $R > 0$ حيث ان $x \in (-R < R)$، فأن:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

مثال: جد تمثيل التكامل غير المحدد $\int \frac{x}{1+x^3} dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل: بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{x}{1+x^3}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{x}{1+x^3} = x.\frac{1}{1-(-x^3)} = x\sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+1}$$

$$\int \frac{x}{1+x^3} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+1} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

تمرين: جد تمثيل التكامل الغير محدد $\int \frac{dx}{1+x^2}$ كمتسلسلة قوى.

مثال: جد تمثيل التكامل غير محدد $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-2}{2} = \int \frac{1}{(x-2)^2+4} dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل: إذا أعدنا كتابة $\frac{1}{(x-2)^2+4}$ لتطابق الشكل $\frac{a}{1-r}$ نحصل

$$\frac{1}{(x-2)^2+4}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{(x-2)^2}{4}+1}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)}$$

بالمقارنة مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{(x-2)^2+4}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^{2n}$$

وبالتالي فأن التكامل يكون

$$\int\frac{1}{(x-2)^2+4}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^{2n}\,dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\frac{(x-2)^{2n+1}}{2n+1}$$

مثال: جد تمثيل التكامل غير محدد $\tan^{-1}x=\int\frac{1}{1+x^2}dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل: بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{1}{1+x^2}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=$$

$$\tan^{-1}x=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=C(=0)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

مثال: جد التكامل المحدد $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل: بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{1}{1+x^4}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

مثال: جد تمثيل التكامل غير المحدد $ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل: بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{1}{1+x}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = C(=0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

مثال: جد تمثيل التكامل غير المحدد $\left(-ln(5-x)\right) = \int \frac{1}{5-x} dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل: بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{1}{5-x}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5\left(1-\left(-\frac{x}{5}\right)\right)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{5^{n+1}}$$

$$-ln(5-x) = \int \frac{1}{5-x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{5^{n+1}}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}\frac{x^n}{n}$$

مثال: جد تمثيل التكامل غير محدد $\int \frac{\tan^{-1}x}{x}dx$ كمتسلسلة قوى.

الحل:

$$\tan^{-1}x = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{1}{1+x^2}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} =$$

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx = C_1(=0) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\tan^{-1}x}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$\int\frac{\tan^{-1}x}{x}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}dx=C_2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

مثال: جد تمثيل التكامل غير المحدد $\int\frac{ln(1+x)}{x}$ كمتسلسلة قوى.

الحل:

$$ln(1+x)=\int\frac{1}{1+x}dx$$

بمقارنة الكمية تحت التكامل $\frac{1}{1+x}$ مع

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$$

فأن

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$ln(1+x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=C_1(=0)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{ln(1+x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$$

$$\int\frac{ln(1+x)}{x}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}dx=C_2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

تمرين: جد تمثيل التكامل غير المحدد $\int x^7 ln(1+x)$ كمتسلسلة قوى.