2-1 : المصفوفات والمحددات

المصفوفة (Matrix) هي مجموعة من الكميات مرتبة على هيئة صفوف (rows) واعمدة (columns) وتعرف هذه الكميات بعناصر المصفوفة فلو اخذنا على سبيل المثال مصفوفة مؤلفة من m من الصفوف و n من الاعمدة فانها تكتب كالاتي

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{rc}) \qquad (1\text{-}24)$$

ان المصفوفة A هي مصفوفة مستطيلة من المرتبة n x m وعندما تكون m مساوية الى n $(m = n)$ نحصل على المصفوفة المربعة (Square matrix) من المرتبة n ولها n^2 من العناصر فمثلاً المصفوفة B الاتية :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}28)$$

تتألف من اربعة عناصر $(n=2)$ كالاتي

$$a_{11}=2;\ a_{12}=4;\ a_{21}=7;\ a_{22}=5$$

عند الاشارة الى عنصر ما في المصفوفة مثل a_{rc} فان الحرف r يدل على رقم الصف ويشير الحرف c الى رقم العمود فمثلاً العنصر a_{21} يقع في الصف الثاني وفي العمود الاول تدعى العناصر التي يكون فيها r مساوياً الى c $(r=c)$ بالعناصر القطرية (diagonal elemen) اما العناصر الاخرى فتدعى بالعناصر غير القطرية (off - diagonal elemen). ان حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة ما هي كمية مهمة تدعى بأثر المصفوفة (trace of a matriux) وتعرف كالاتي :

$$Tr(A) = \sum_{r=1}^{n} a_{rc} \qquad (1\text{-}2$$

اذا كانت المصفوفة تتألف من صف واحد و n من الاعمدة يقال عن المصفوفة انها مصفوفة صفية (row matrix) او متجهة صفية (row vector) وتكتب كالاتي

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \dots a_{1n}) \qquad (1\text{-}28$$

اذا كانت المصفوفة A تتألف من n من الصفوف وعمود واحد يقال عنها انها مصفوفة عمودية (Column matrix) وتكتب كالاتي

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{n1} \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}28)$$

يمكن جمع المصفوفات وضربها حسب قواعد معينة تكون عادة تعميماً لقواعد الجمع والضرب للاعداد البسيطة. يمكن اضافة مصفوفتين M و N وذلك باضافة عناصرها كالاتي

$$(M+N)_{rc} = M_{rc} + N_{rc}$$

فلو اخذنا على سبيل المثال المصفوفات الاتية

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}2$$

فأن حاصل جمع المصفوفتين هو $= M + N$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \quad (1\text{-}30)$$

يمكن ايضاً ضرب مصفوفتين حسب القاعدة الآتية

$$(MN)_{rc} = \sum_n M_{rn} N_{nc} \quad (1\text{-}31)$$

لذا فلو اردنا حساب حاصل الضرب

$$K = MN \quad (1\text{-}32)$$

اذ ان M و N هي المصفوفات التي عرفت سابقاً فاننا نحصل بعد تطبيق القاعدة (1-31) على حاصل الضرب K الآتي

$$K_{11} = M_{11}N_{11} + M_{12}N_{21} = 1\times5 + 2\times7 = 19$$
$$K_{12} = M_{11}N_{12} + M_{12}N_{22} = 1\times6 + 2\times8 = 22$$

وبصورة مماثلة يمكننا حساب العناصر الأخرى للمصفوفة K لنحصل على

$$K = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 42 & 50 \end{pmatrix} \quad (1\text{-}33)$$

يلاحظ هنا ان حاصل الضرب

$$J = NM = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \neq K \quad (1\text{-}4)$$

وهنا تجدر الاشارة الى ان تساوي مصفوفتين يعني بالضرورة تساوي عناصرها المتناظرة أي ان $J = K$ اذا تحقق لكافة العناصر ان $J_{rc} = K_{rc}$ وبذلك فان المصفوفات تكون غير متبادلة عند عملية الضرب. اذا كان $MN = NM$ يقال عن المصفوفة N انها تتبادل (Commute) مع المصفوفة M واذا كان $MN \neq NM$ فيقال أن المصفوفة N لاتتبادل مع المصفوفة M.

هنا لابد من الاشارة الى بعض الأنواع المهمة من المصفوفات والتي سنكتفي بتعريفها كالآتي :

فتكون كافة عناصرها غير القطرية مساوية للصفر.

يقال عن المصفوفة انها مصفوفة قطرية اذا كانت كافة عناصرها غير القطرية مساوية للصفر ومثال ذلك

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{rc} = m_r \delta_{rc} \tag{1-34}$$

اذ ان δ_{rc} هي ديلتا كرونيكر وتساوي واحداً عندما يكون $r = c$ وتساوي صفراً عندما يكون $r \neq c$. اما الكمية m_r فهي القيمة العددية للعنصر القطري في الصف r.

يمكن تعريف المصفوفة الواحدية (unit matrix) I على انها المصفوفة القطرية التي تكون قيم عناصرها القطرية كافة مساوية الى واحد، اي ان $I_{rc} = \delta_{rc}$.

كما يمكن تعريف الانواع التالية من المصفوفات المشتقة من المصفوفة M.

ان مقلوب المصفوفة (inverse matrix) ويكتب M^{-1} يعرف بالعلاقة الاتية

$$M\, M^{-1} = M^{-1} M = I \tag{1-35}$$

ان المصفوفة المنقولة (transpose matrix) وتكتب $\tilde{M}$ وتعرف كالاتي

$$(\tilde{M})_{rc} = M_{cr}$$

وهنا يشير الحرف c الى رقم الصف في حين يشير الحرف r الى رقم العمود فمثلاً

$$M = \begin{pmatrix} a & c+id \\ e+if & b \end{pmatrix} ; \tilde{M} = \begin{pmatrix} a & e+if \\ c+id & b \end{pmatrix} \tag{1-36}$$

اذ ان i هو $\sqrt{-1}$.

يمكن ايضاً تعريف المصفوفة المرادفة المركبة (Complex Conjugate matrix) وتكتب M^* وتعرف كالاتي

$$(M^*)_{rc} = M^*_{rc} \tag{1-37}$$

اذ يؤخذ المرادف المركب لكل عنصر من عناصر المصفوفة M لتحويلها الى المصفوفة M^* فلو أخذنا المثال السابق بالنسبة للمصفوفة M يمكننا تحويلها الى المصفوفة المرادفة المركبة M^* كالاتي

$$M^* = \begin{pmatrix} a & c-id \\ c-if & b \end{pmatrix} \qquad (1-38)$$

اذ ان d, c, b, a و f هي كميات حقيقية .

يمكن تعريف المصفوفة المحاذية (adjoint matrix) وتكتب M^+ وتساوي $\tilde{M}^*$ اذ ان

$$(M^+)_{rc} = (\tilde{M}^*)_{rc} = (M^*)_{cr} = M^*_{cr} \qquad (1-39)$$

وبذلك فان المصفوفة المحاذية M^+ للمصفوفة M السابق ذكرها هي

$$M^+ = \begin{pmatrix} a & c-if \\ c-id & b \end{pmatrix} \qquad (1-40)$$

يقال عن المصفوفة انها مصفوفة وحدية (unitary matrix) اذا تحقق ان

$$M^{-1} = M^+ \qquad (1-41)$$

اي اذا كان : $(M^{-1})_{rc} = M^*_{cr}$

ويقال عن المصفوفة انها مصفوفة هيرميتية (Hermitean matrix) اذا تحقق ان : $M^+ = M$

ليس للمصفوفات قيم محددة غير انه يرتبط عادة مع المصفوفة المربعة كمية رياضية اخرى تعرف بالمحددة (determinant) وللمحددة قيمة عددية واحدة قد تكون حقيقية او مركبة .

أن المحددة من المرتبة n هي مجموعة من العناصر عددها n^2 تكتب على هيئة جدول كما هو الحال مع المصفوفات ويشار الى عناصرها بالرمز a_{rc} ايضاً وتخضع المحددات الى عمليات رياضية مثل الجمع والضرب .. الخ حسب قواعد رياضية متفق عليها .

ان نشأة المحددات يرجع الى علاقتها بمسألة حل المعادلات الآنية الخطية لذا فان القواعد التي تخضع لها العمليات الرياضية للمحددات ترجع اصلاً الى متطلبات حل المعادلات الآنية . فلو فرضنا على سبيل المثال المعادلتين الآنيتين الآتيتين :

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1\text{-}42)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (1\text{-}43)$$

والتي تمثل تقاطع خطين مستقيمين فان ايجاد قيم x و y التي تحقق هذه المعادلات الآنية البسيطة يمكن ان يتم بسهولة بضرب المعادلة الاولى بالكمية b_2 وضرب المعادلة الثانية بالكمية b_1 وطرح المعادلة الثانية من الاولى لنحصل على

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad (1\text{-}44)$$

او

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (1\text{-}45)$$

بنفس الكيفية يمكن ايجاد المتغير y بضرب المعادلة الاولى بالكمية a_2 والمعادلة الثانية بالكمية a_1 وطرح المعادلة الثانية من الأولى لنحصل على

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1 \qquad (1\text{-}46)$$

او

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (1\text{-}47)$$

وبذلك يمكن ايجاد قيم x و y من العلاقات (1-45) و (1-47) اذا كانت الكمية $(a_1b_2 - a_2b_1)$ في المقام لاتساوي صفراً.

ان الكميات في البسط والمقام في المعادلات (1-45) و (1-47) يمكن كتابتها بصيغ رياضية تعرف بالمحددات بدلالة عناصرها فمثلاً الكمية في المقام يمكن ان تكتب كالاتي

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (1\text{-}48)$$

وبذلك حصلنا على قاعدة يمكن بواسطتها ايجاد قيمة محددة من المرتبة