

نظرية الاحتمال ترجع بداياتها إلى أوائل القرن السابع عشر كنتيجة لدراسة بعض العاب الحظ المختلفة ولكن لم يوضع لها مسلمات إلا في العشرينات والثلاثينات من القرن العشرين ، وتعتبر نظرية الاحتمال الآن من الفروع الهامة في علم الرياضيات ، ولقد اتسع نطاق تطبيقها ليشمل العديد من العلوم الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية والسياسية بل ويمكننا القول أن الاحتمالات موجودة معنا كل يوم ، فمثلاً توقعات الطقس في نشرات الأحوال الجوية في الأخبار التي على مسامعنا يومياً تعتمد أساساً على الاحتمالات ، واستطلاع رأى الجمهور في شأن ما يعتمد أساساً على الاحتمالات ، وشركات التأمين تعتمد أساساً على الاحتمالات في دراسة العمر المتوقع أو المخاطر المحتمل حدوثها للأشياء التي يتم التأمين عليها بل وأكثر من ذلك فإن كل منا يطلق لخياله العنوان في تقدير احتمال نجاحه أو فشله في أمر ما من أمور الحياة سواء المتعلقة بالدراسة أو العمل أو ما شابه ذلك .

يعتبر العالم بليز بسكال *Blaise Pascal* أحد العلماء الأوائل الذين اهتموا

بحساب الاحتمال و كان قد اتفق مع العالم بيير دي فارما *Pierre de Fermat* سنة 1654 على أن العشوائية يمكن أن تكون دراسة علمية و انطلاقاً من ذلك الوقت توسيع البحث العلمي في هذا الميدان .

لهذا تجدر بنا الإشارة إلى أهم قواعد وأسس نظرية الاحتمالات التي تساعدنا على استيعاب معلوماتنا التي ذكرناها في الفقرات السابقة وتنمي فكرنا و نحن نقوم بتجارب و ملاحظات في مختلف الميادين التي قد تقع تحت ظروف متشابهة أو مختلفة ولما كانت نظرية الاحتمالات هي العلم الذي يدرس الظواهر العشوائية و يقوم بتحليلها إلى نتائج كما هو الحال في الإحصاء فإننا يجب التذكير أولاً وقبل كل شيء بمفهوم التجربة .

فالتجربة هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس فمثلاً إذا القينا في الهواء قطعة نقود غير مزيفة فإننا نحصل على نتيجتين هما الصورة أو الكتابة و نرمز لهما بـ H, T و نطلق على مجموعة النتائج الممكنة خلال تجربة ما (فضاء

الأحداث الابتدائية) و نرمز له بـ Ω أو $\{\cdot\}$

♦ الحدث الابتدائي العشوائي

هو كل مجموعة جزئية من فضاء الأحداث الابتدائية و نرمز له بأحرف مثل:

. A, B, C, \dots ,

قبل إعطاء التعريف العام للاحتمال نذكر أن العمليات الشهيرة في نظرية المجموعات مثل الاتحاد، التقاطع، الفرق، المتممة، ... الخ تصلح أيضا في دراستنا لنظرية الاحتمال فقط بدلًا من أن نقول مجموعة نقول حدث .

تقاطع حدثين $A \cap B$ هو حدث يقع إذا وقع الحدثان $A \wedge B$ معا .

الفرق بين حدثين $A - B$ هو حدث يقع إذا وقع A ولم يقع B .

الحدثان المتنافيان هما اللذان لا يمكن وقوعهما معا و نكتب $A \cap B = \emptyset$.

متمم الحدث هو حدث يحوي سائر الأحداث الابتدائية من Ω الغير محتواة في

الحدث A و نرمز له ب A' أو \bar{A} .

♦ التعريف العام للاحتمال

إذا كان لدينا A حدثا من Ω فان احتمال وقوع الحدث A الذي نرمز له بـ

$p(A)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

أن m هو عدد الإمكانيات الملائمة لوقوع الحدث A و n عدد الإمكانيات الكلية للتجربة .

نذكر أدناه بعض الخواص المهمة:

$$P(\emptyset) = 0 \quad - 1$$

في الواقع لدينا :

$$\Omega = S \cup \emptyset$$

$$\boxed{ \begin{aligned} p(\Sigma) &= p(S) + p(\Phi) \\ \Rightarrow p(\Phi) &= 0 \end{aligned} }$$

من أجل أي حدث

$$\boxed{P(A^c) = 1 - p(A)}$$

$$A^c \cup A = S$$

$$P(A^c) + P(A) = P(S)$$

$$\therefore P(S) = 1$$

$$p(A^c) + P(A) = 1$$

$$P(A^c) = 1 - p(A)$$

حيث A^c هو المتمم A وهذا لأنه لدينا :

$$\boxed{A \cap A^c = \emptyset \quad \wedge \quad A \cup A^c = \Sigma}$$

$$\boxed{ \begin{aligned} p(A \cup A^c) &= p(\Sigma) \\ &= 1 \\ &= p(A) + P(A^c) \\ \Rightarrow P(A^c) &= 1 - P(A) \end{aligned} }$$

إذا كان $A \subseteq B$ فعندئذ :

$$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)}$$

فعندئذ :

$$\boxed{P(A) \leq P(B)}$$

و هذا اعتمادا على الخاصية السابقة و كون احتمال أي حدث اكبر أو يساوي الصفر

بعارة أخرى لدينا :

$$\boxed{ \begin{aligned} P(B - A) &= P(B) - P(A) \geq 0 \\ \Rightarrow P(B) &\geq P(A) \end{aligned} }$$

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

و هذا راجع لكون :

$$\begin{aligned}\Phi &\subseteq A \subseteq \Sigma \\ \Rightarrow P(\Phi) &\leq P(A) \leq P(\Sigma) \\ \Rightarrow 0 &\leq P(A) \leq 1\end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

في الواقع لدينا :

$$\begin{aligned}A \cup B &= A \cup (B - A \cap B) \\ \Rightarrow P(A \cup B) &= P(A) + P(B - A \cap B)\end{aligned}$$

وهذا لأن الحدين $A \wedge (B - A \cap B)$ هما متنافيان فحسب .

العلم أن $A \cap B \subseteq B$ ينتج لدينا ما يلي :

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B - A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

♦ قاعدة الضرب في الاحتمالات (قانون الاحتمال المركب)

ليكن $A \wedge B$ حدثين من الفضاء الاحتمالي (Σ) بحيث :

$$P(A) \geq 0 \wedge P(B) \geq 0$$

عندئذ :

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B/A) \\ &= P(B)P(A/B)\end{aligned}$$

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي لدينا:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= P(B)P(A/B) \dots\dots(1) \\ P(B/A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ \Rightarrow P(A \cap B) &= P(A)P(B/A) \dots\dots(2) \end{aligned}$$

ملاحظة

لقد عرفنا الحدفين المستقلين على أنهما الحدفين الذين يحققان العلاقة التالية :

$$P(A/B) = P(A)$$

أي أن وقوع الحدث A ليس له علاقة بوقوع الحدث B و هذا يكفي قولنا أن

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)}$$

قواعد المجموعات The Rules of Sets

Commutative law: $A \cup B = B \cup A,$
 $A \cap B = B \cap A,$

Associative law: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$

Distributive law: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

Idempotency law: $A \cup A = A,$
 $A \cap A = A.$

- *De Morgan's Rules* state that

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{and} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Theorem: independence and the complementary event. If A, B are statistically independent such that $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ then A, B^c are also statistically independent such that $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$.

Proof. Consider

$$A = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

The final expression denotes the union of disjoint sets, so there is

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

Since, by assumption, there is $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, it follows that

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\{1 - P(B)\} = P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Theorem: