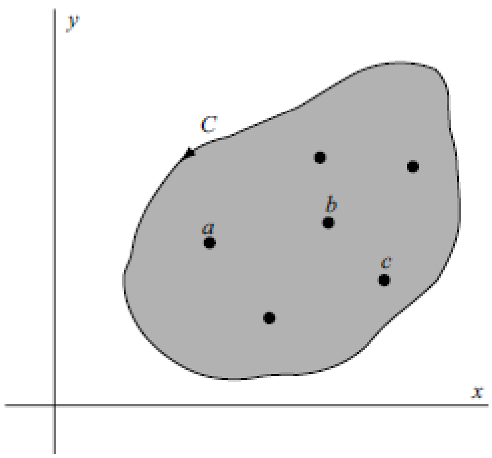
نظرية المتبقي وحساب التكاملات المحددة بطريقة نظرية الدوال المعقدة

نظرية المتبقي

نفرض أن الدالة $f(z)$ دالة احادية القيمة وتحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C ما عدا في عدد محدود من النقاط $z=a$ ، $z=b$ و $z=c$ ، والتي لها المتبقيات المعطاة بـ $R(z=a)$ و $R(z=b)$ و $R(z=c)$ ، كما في الشكل (٥):



الشكل (٥)

تنص نظرية المتبقي على

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R(z=a)+R(z=b)+R(z=c)] \qquad (4-18)$$

لذلك فأن التكامل $f(z)$ حوال المنحني C يكون مساوي الى حاصل ضرب $2\pi i$ من المرات لمجموع المتبقيات عند جميع النقاط المنفردة a, b, c على الترتيب والتي تقع بأكملها داخل C. الشكل(٦) يوضح الدوائر C_1، C_2 و C_3 التي مركزها عند النقاط المنفردة c, b, a على الترتيب والتي تقع بأكملها داخل C، من النظرية ٢ التي تمثلها $(4-15)$

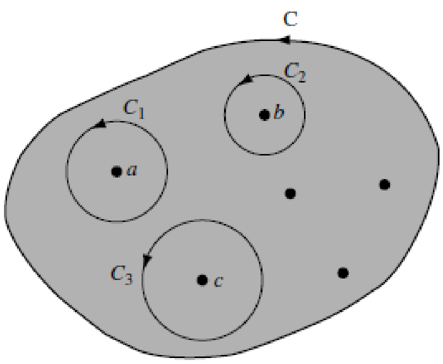
$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C1} f(z)dz + \oint_{C2} f(z)dz + \oint_{C3} f(z)dz + \cdots \qquad (4-19)$$

من المعادلتين $(4-18)$ و $(4-19)$، نجد ان:

$$\oint_{C1} f(z)dz = 2\pi i R(z=a)$$

$$\oint_{C2} f(z)dz = 2\pi i R(z=b)$$

$$\oint_{C3} f(z)dz = 2\pi i R(z=c)$$



الشكل(٦)

لنقطة منفردة مثل $z=a$ ، لكي نحسب متبقي الدالة $f(z)$ الذي يمثله $R(z=a)$ من العلاقة التالية:

$$R(z=a) = \lim_{z\to a}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\} \qquad (4-20)$$

حيث n تمثل رتبة النقطة المنفردة او رتبة القطب. لحالة القطب البسيط $(n=1)$، فأن العلاقة $(4-20)$ تصبح:

$$R(z=a) = \lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\} \qquad (4-21)$$

مثال١٣: احسب التكامل التالي حسب نظرية المتبقي

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz \qquad C: |z| = 3$$

الحل: ان الدالة

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$$

لها قطب مزدوج $n=2$ عند $z=0$ واخر بسيط $n=1$ عند النقاط $z=-1+i$ و $z=-1-i$

بالنسبة للقطب المزدوج $n=2$ عند $z=0$، من المعادلة $(4-20)$ وباستخدام تفاضل قسمة دالتين، يكون

$$R(z=0)=\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right]\right\}=\lim_{z\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)}\right]\right\}=\frac{t-1}{2}$$

بالنسبة للقطب البسيط $n=1$ عند النقاط $z=-1+i$ و $z=-1-i$ ، من المعادلة $(4-21)$، يكون

$$R(z=-1+i)=\lim_{z\to -1+i}\left\{(z-(-1+i))\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}=\frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$R(z=-1-i)=\lim_{z\to -1-i}\left\{(z-(-1-i))\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}=\frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

من المعادلة $(4-18)$

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz=2\pi i\left[\frac{t-1}{2}+\frac{e^{(-1+i)t}}{4}+\frac{e^{(-1-i)t}}{4}\right]=2\pi i[\frac{t-1}{2}+\frac{e^{-t}}{2}\cos(t)]$$

مثال١٤: طبقا لنظرية المتبقي، جد التكامل التالي:

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz \qquad ,C:|z|=3$$

بتحليل المقام $z^2+1=(z-i)(z+i)$، نرى ان كل من $z=i$ و $z=-i$ تقع داخل C.

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

يوجد نقطتان منفردتان (قطبان بسيطان) $z=i$ و $z=-i$. **بالنسبة للقطب البسيط $n=1$ عند النقاط $z=i$ و $z=-i$ ، من المعادلة $(4-21)$، يكون**

$$R(z=i)=\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{1}{2i}$$

$$R(z=-i)=\lim_{z\to -i}\left\{(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{-1}{2i}$$

من المعادلة $(4-18)$

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz=2\pi i\left[\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i}\right]=0$$

تمارين

طبقا لنظرية المتبقي، جد التكاملات التالية:

1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4}\,dz \qquad ,C:|z+1|=3$

2) $\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz \qquad ,C:|z+1|=3$

3) $\oint_C \frac{e^{\pi z/4}}{z^2+4}\,dz \qquad ,C:|z+1|=3$

حساب التكاملات المحددة بطريقة المتبقي

لحساب التكاملات المحددة بطريقة المتبقي للدالة $f(z)$ داخل وعلى حدود المنحني المغلق البسيط C وهناك بعض الحالات العامة مثل هذه التكاملات:

أحدها: تكاملات دوال النسبية لـ $\sin\theta\,,\cos\theta$ من النوع

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta\,,\cos\theta)\,d\theta \qquad (4-22)$$

حيث ان $R(\sin\theta\,,\cos\theta)$ دالة نسبية حقيقية لـ $\sin\theta\,,\cos\theta$ وتكون منتهية في الفترة $0\le\theta\le 2\pi$، لنفرض ان $z=e^{i\theta}$ فيكون

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad (4-22a)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad (4-22b)$$

وبهذا يكون المكامل دالة نسبية z مثل $f(z)$ وبالإضافة الى ذلك

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$$

وبهذا يمكن اعادة كتابة المعادلة $(4-22)$ بالشكل التالي:

$$I = \oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \qquad (4-23)$$

حيث ان C هو دائرة الوحدة $|z| = 1$) عندما تتغير θ من 0 الى 2π فأن z يدور دورة واحدة على الدائرة $|z| = 1$).

مثال: طبقا لنظرية المتبقي، جد

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta}$$

الحل:

$$\frac{5}{4} + \sin\theta = \frac{5}{4} + \frac{z^2 - 1}{2iz} = \frac{2z^2 + 5iz - 2}{4iz}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2z^2 + 5iz - 2}{4iz}} = \oint_C \frac{4dz}{2z^2 + 5iz - 2}$$

$$= \oint_C \frac{4dz}{(z + 2i)(2z + i)} = \oint_C \frac{4dz}{2(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = \oint_C \frac{2dz}{(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)}$$

حيث C دائرة $|z| = 1$. ولهذا تقع النقطة المنفردة الوحيدة $z = -\frac{i}{2}$ داخل C وهي قطب بسيط.

بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند $z = -\frac{i}{2}$ ، من المعادلة $(21 - 4)$، يكون

$$R\left(z = -\frac{i}{2}\right) = \lim_{z \to -\frac{i}{2}} \left\{ \left(z + \frac{i}{2}\right) \frac{2}{(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)} \right\} = \frac{4}{3i}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = 2i\pi R\left(z = -\frac{i}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

مثال: طبقا لنظرية المتبقي، جد

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

الحل:

$$3 - 2\cos\theta + \sin\theta = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) + \left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{2iz}{z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) + \left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}$$

$$I = \oint_C \frac{2dz}{z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i}$$

نستخدم طريقة الدستور بالنسبة للمقام $z^2(1 - 2i) + 6iz - 1 - 2i$ لاستخراج النقاط المنفردة

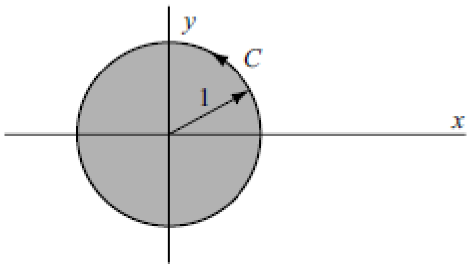
$$z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1 - 2i)(-1 - 2i)}}{2(1 - 2i)} = \frac{-6i \pm 4i}{2(1 - 2i)} = 2 - i, \frac{2 - i}{5}$$

النقطة $\frac{2-i}{5}$ تقع فقط داخل C وهي تمثل قطب بسيط حيث C هي دائرة وحدة التي نصف قطرها 1 ومركزها $(0,0)$

، بالنسبة للقطب البسيط $n = 1$ عند $z = \frac{2-i}{5}$ ، من المعادلة $(21 - 4)$، يكون

$$R\left(z=\frac{2-i}{5}\right)=\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\left\{\left(z-\frac{2-i}{5}\right)\frac{2}{z^2(1-2i)+6iz-1-2i}\right\}=\frac{1}{2i}$$

$$I=\oint_C\frac{2dz}{z^2(1-2i)+6iz-1-2i}=2i\pi R\left(z=\frac{2-i}{5}\right)=\pi$$



تمارين

طبقا لنظرية المتبقي، جد التكامل التالي:

1) $$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\,\theta\,d\theta}{5-4\cos\theta}$$

2) $$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$$

2) $$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$$