التكامل حول المنحني المغلق

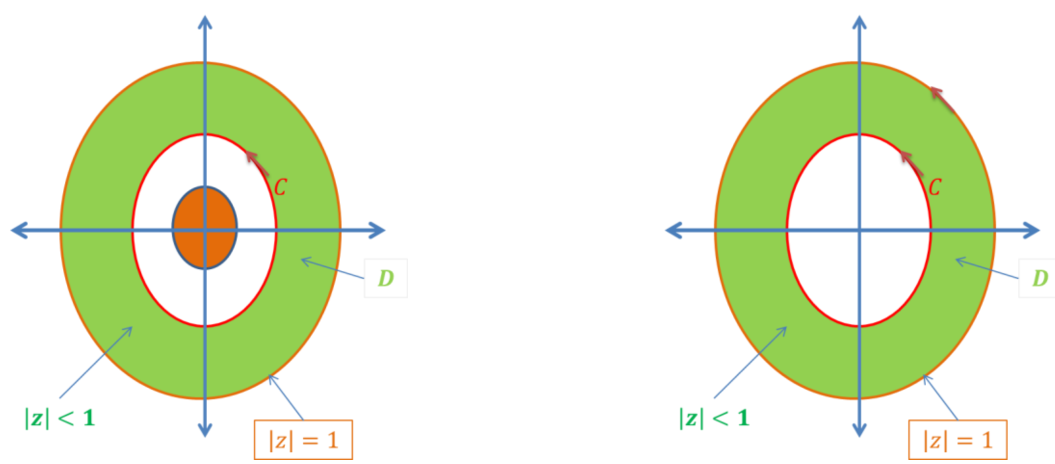
يعبر عن التكامل حول المنحني المغلق (الكنتور) C بالشكل التالي:

$$\oint_C f(z)dz \qquad (4-6)$$

الكنتور :في التحليل المعقد، هو منحنى في المستوى المعقد. في تكامل الكنتوري، يوفر الكنتور تعريفاً دقيقاً للمنحنيات التي يمكن تحديد التكامل عليها بشكل مناسب. يتم تعريف المنحني في المستوي المعقد كدالة مستمرة عند الفترة المغلقة لخط حقيقي إلى المستوى المعقد: $z: [a,b] \rightarrow C$.

المناطق البسيطة والمعقدة الاتصال

يقال للمنطقة D انها منطقة اتصال اذا كان بالإمكان ايصال نقطتين في المنطقة D بمسار يقع كلياً فيها. ويقال للمنطقة D بانها بسيطة الاتصال اذا كان المنحني المغلق البسيط واقع كليا في المنطقة D يحيط بنقاط تقع كليا في المنطقة D ايضاً. تسمى المنطقة D منطقة معقدة الاتصال اذا لم تكن بسيطة الاتصال.



الشكل(٣ب) الشكل(٣أ)

نلاحظ ان في الشكل(٣أ)، تكون المنطقة D (الاخضر) منطقة اتصال بسيطة لان المنحني C يقع كليا فيها ويحيط بنقاط تقع عليه او داخله تقع كليا في المنطقة D. اما في الشكل(٣ب)، فأن المنطقة D تكون متعددة الاتصال لان المنحني C يقع كلياً في المنطقة D ولكنه يحيط بنقاط (الدائرة) تقع داخله لا تقع كليا في المنطقة D.

نظرية كرين

نفرض ان $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ ، $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ مستمرة في المنطقة المغلقة R تشمل نقاط داخل وعلى كنتور مغلق بسيط C ،فأن صيغة كرين في بعدين تعطى بالعلاقة:

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (4-7)$$

نظرية كوشي – كورسات

نظرية كوشي: لتكن $f(z) = u + iv$ تحليلية ، ولتكن $\acute{f}(z)$ مستمرة لكل النقاط داخل او على المنحني C فأن:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4-8)$$

هذه الصيغة تعرف بصيغة كوشي التكاملية. لأثبات صيغة كوشي التكاملية: لتكن R منطقة تشمل جميع نقاط داخل وعلى المنحني C ،يمكننا كتابة المعادلة $(4-8)$ باستخدام المعادلة $(4-2)$ بالصيغة التالية:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) = 0 \qquad (4-9)$$

باستخدام صيغة كرين بالمقارنة لكل تكامل في المعادلة اعلاه

$$\oint_C f(z)dz = -\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0 \qquad (4-10)$$

من الفصل الثالث، عرفنا بأن تفاضل الدالة $f(z)$ باستخدام معادلات كوشي ريمان يمكن ايجاده:

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي فأن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

وبالتالي فأن $(4-10)$ تصبح:

$$\oint_C f(z)dz = -\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0 \qquad (4-11)$$

لقد وجد لأول مرة من قبل كورسات، بانه ليس من الضروري افتراض استمرارية $\acute{f}(z)$ وان مبرهنة كوشي تتحقق اذا افترض ان $\acute{f}(z)$ موجودة فقط عند جميع النقاط داخل او على C ولهذا تسمى المبرهنة كوشي-كورسات والتي سيتم ذكرها بدون برهان لها والتي فيها:

مبرهنة كوشي- كورسات: اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقاط داخل وعلى الكنتور المغلق C، فأن:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4-12)$$

اذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة معقدة الاتصال D، فأنه لا يمكن ان نستنتج ان

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4-13)$$

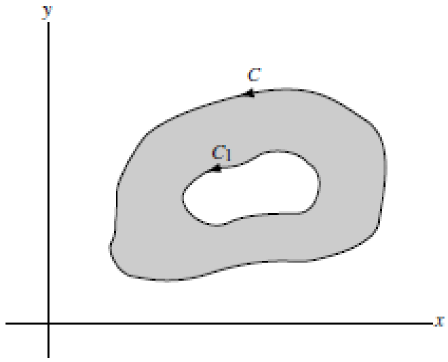
على كل كنتور مغلق بسيط C في D.

بعض نتائج نظرية كوشي:

نظرية ١: لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيين بسيطين مغلقين C و $C1$ (حيث $C1$ يقع في C كما في الشكل(٤أ)) وكذلك على هذين المنحنيين، فأن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C1} f(z)dz \qquad (4-14)$$

حيث تبين هذه النتيجة انه اذا اردنا ان نكامل $f(z)$ على المنحنى C فأنه يمكن ان نكامل على المنحنى $C1$ بدلاً من C طالما ان $f(z)$ تحليلية في المنطقة بين المنحنيين C و $C1$

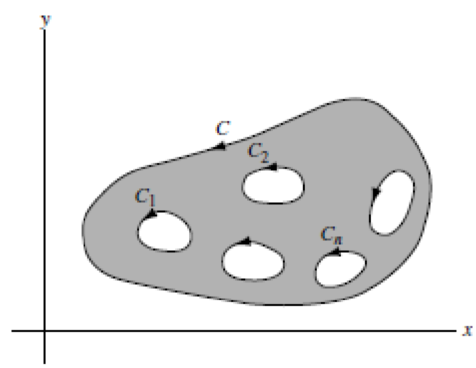


الشكل(٤أ)

النظرية ٢: لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيات بسيطة مغلقة غير متداخلة C و $C1$ و $C2$ الى Cn) حيث تقع المنحنيات C و $C1$ و $C2$ الى Cn في C كما في الشكل(٤ب)) وكذلك على هذه المنحنيات، فأن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C1} f(z)dz + \oint_{C2} f(z)dz + \oint_{C3} f(z)dz + \cdots + \cdots \oint_{Cn} f(z)dz \qquad (4-15)$$

تعتبر هذه نظرية تعميماً للنظرية ١.



الشكل(٤ب)

صيغ كوشي التكاملية

لتكن D منطقة بسيطة الاتصال ولتكن نقطة ثابتة في D، فاذا $f(z)$ كانت دالة تحليلية في D فأن الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ لا يمكن ان تكون تحليلية عند z_0. اي ان $\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ $\oint_C$ لا يساوي صفراً بصورة عامة على المنحني C

يشمل z_0. وكما هو معروف من نظرية كوشي لمنطقة بسيطة الاتصال ان لهذا التكامل القيمة نفسها على جميع مسارات C حول z_0. لتحديد قيمة هذا التكامل نأخذ الصيغ التكاملية:

صيغة كوشي التكاملية ١

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C، مأخوذاً بالاتجاه الموجب، فاذا كانت z_0 نقطة داخل C، فأن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad , z_0 \in C \qquad (4-16)$$

صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات

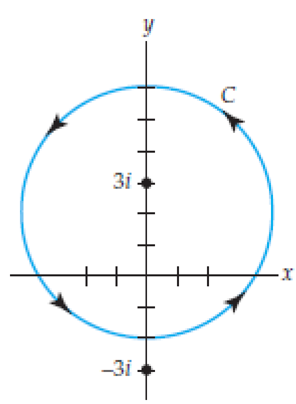
لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل او على المنحني المغلق البسيط C، مأخوذاً بالاتجاه الموجب، فاذا كانت z_0 نقطة داخل C، لهذا فأن المشتقة من الرتبة n تعطى:

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz \qquad , z_0 \in C \qquad (4-17)$$

مثال٧: طبقاً لنظرية كوشي التكاملية ١، جد

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9}dz$$

حيث C مأخوذ باتجاه الموجب كما مبين في الشكل ادناه، يمثل دائرة $|z - 2i| = 4$ بنصف قطر 4 وتم ازاحة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ على المحور y الى الاعلى بمقدار $2i$.



الحل: بتحليل المقام $z^2+9=(z-3i)(z+3i)$، نرى ان النقطة $z=3i$ فقط تقع داخل الكنتور C المتمثل $|z-2i|=4$. لذلك فأن

$$f(z)=\frac{z}{z+3i}$$

لدينا $z-z_0=z-3i$، وان $f(z)$ عند z_0 تتمثل بـ $f(z_0)$

$$f(z_0)=\frac{3i}{3i+3i}=\frac{1}{2}$$

يمكن كتابة التكامل

$$\oint_{|z-2i|=4}\frac{z}{z^2+9}dz=\oint_{|z-2i|=4}\frac{\frac{z}{z+3i}}{(z-3i)}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية ١، فأن

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-2i|=4}\frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz$$

بترتيب المعادلة اعلاه

$$2\pi i\frac{1}{2}=\oint_{|z-2i|=4}\frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz$$

وبالتالي فان

$$\oint_{|z-2i|=4}\frac{z}{z^2+9}dz=\pi i$$

مثال٨: باستخدام صيغة كوشي التكاملية، اثبت ان

$$\oint_C\frac{z}{(z^2-9)(z+i)}dz=-\frac{\pi}{5}$$

حيث C مأخوذ باتجاه الموجب و هو يمثل دائرة $|z|=2$ بنصف قطر 2 ومركزها يقع عند $(0,0)$.

الحل: : بتحليل المقام $(z^2-9)(z+i) = (z-3)(z+3)(z+i)$، نرى ان النقطة $z=-i$ فقط تقع داخل الكنتور C المتمثل $|z|=2$. لذلك فأن

$$f(z) = \frac{z}{z^2-9}$$

لدينا $z - z_0 = z + i$،وان $f(z)$ عند z_0 تتمثل بـ $f(z_0)$

$$f(z_0) = \frac{-i}{(-i)^2-9} = \frac{i}{10}$$

يمكن كتابة التكامل بالشكل

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2-9)(z+i)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{z^2-9}}{z+i} dz$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ١، فأن

$$2\pi i f(z_0) = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{z^2-9}}{z+i} dz$$

بترتيب المعادلة اعلاه

$$2\pi i \frac{i}{10} = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{z^2-9}}{z+i} dz$$

وبالتالي فأن

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2-9)(z+i)} dz = -\frac{\pi}{5}$$

مثال٩: باستخدام صيغة كوشي التكاملية١، جد

$$\oint_C \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$$

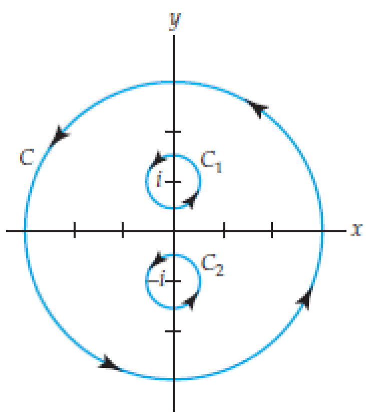
حيث ان C دائرة $|z|=3$ بنصف قطر 3 مركزها عند $(0,0)$، مأخوذ باتجاه الموجب.

الحل: نبسط لكي نستخدم صيغة كوشي التكاملية١. بتحليل المقام $z^2+1=(z-i)(z+i)$، نرى ان كل من $z=i$ و $z=-i$ تقع داخل C. لذلك بالنسبة لبعض A ، $\mathrm{B}\in\mathrm{C}$ لدينا ما يلي:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{\mathrm{A}}{z-i}+\frac{\mathrm{B}}{z+i}=\frac{\mathrm{A}(z+i)+\mathrm{B}(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$

لذلك من $1=\mathrm{A}(z+i)+\mathrm{B}(z-i)$ نجد، عند $z=i$ فأن $\mathrm{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}$، وعند $z=-i$ فأن $\mathrm{B}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}$.
لذلك فأن:

$$\frac{1}{(z^2+1)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$



أن $f(z)=z^2-1$ في كلا التكاملين، وبالتالي باستخدام $(4-15)$

$$\oint_{|z|=3}\frac{z^2-1}{(z^2+1)}dz=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(\oint_{C1}\frac{z^2-1}{z-i}dz-\oint_{C2}\frac{z^2-1}{z+i}dz\right)$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية١:

$$\oint_{|z|=3}\frac{z^2-1}{(z^2+1)}dz=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(2\pi i\, f(z_0=i)-2\pi i\, f(z_0=-i)\right)$$

$$\oint_{|z|=3}\frac{z^2-1}{(z^2+1)}dz=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(2\pi i(-2+2)\right)=0$$

مثال١٠: باستخدام صيغة كوشي التكاملية، جد

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z^2+1)}dz$$

حيث ان C دائرة $|z|=2$ بنصف قطر 2 مركزها عند $(0,0)$ ،مأخوذ بالاتجاه الموجب.

الحل: نبسط لكي نستخدم صيغة كوشي التكاملية١. بتحليل المقام $z^2+1=(z-i)(z+i)$، نرى ان كل من $z=i$ و $z=-i$ تقع داخل C. لذلك بالنسبة لبعض A ، $\mathrm{B}\in \mathrm{C}$ لدينا ما يلي:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2-i^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{\mathrm{A}}{z-i}+\frac{\mathrm{B}}{z+i}=\frac{\mathrm{A}(z+i)+\mathrm{B}(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$

لذلك من $1=\mathrm{A}(z+i)+\mathrm{B}(z-i)$ نجد، عند $z=i$ فأن $\mathrm{A}=\frac{1}{2i}$، وعند $z=-i$ فأن $\mathrm{B}=-\frac{1}{2i}$.

لذلك فأن:

$$\frac{1}{(z^2+1)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$

أن $f(z)=ze^z$، لذا بواسطة صيغة كوشي التكاملية:

$$\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{(z^2+1)}dz=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\left(\oint_{C1}\frac{ze^z}{z-i}dz-\oint_{C2}\frac{ze^z}{z+i}dz\right)$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\big(2\pi i f(z_0=i)-2\pi i f(z_0=-i)\big)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}\big(2\pi i(ie^i)-2\pi i(-ie^{-i})\big)$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\big(2\pi(ie^i+ie^{-i})\big)$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^i+e^{-i}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\oint_C\frac{ze^z}{(z^2+1)}dz=2\pi i\cos(1)$$

مثال ١١: باستخدام صيغة كوشي التكاملية٢ للتفاضلات، جد

$$\oint_C \frac{z+1}{(z^4+2iz^3)}dz$$

حيث ان C دائرة $|z| = 1$ بنصف قطر 1 مركزها عند $(0,0)$، التكامل مأخوذ باتجاه الموجب.

الحل: من خلال فحص مقام الكمية تحت التكامل $(z^4+2iz^3) = z^3(z+2i)$، نجد أنها تكون غير تحليلية عند $z = 0$ و $z = -2i$ وان $z = 0$ فقط تقع في داخل الكنتور C، لذلك:

$$\frac{z+1}{(z^4+2iz^3)} = \frac{z+1}{z^3(z+2i)} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

حيث ان $z_0 = 0$ وان $n = 3 - 1 = 2$ وكذلك فأن $f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$، وان

$$\acute{\acute{f}}(z) = \frac{2-4i}{(z+2i)^3} = \frac{2-4i}{z^3+6iz^2-12z-8i}$$

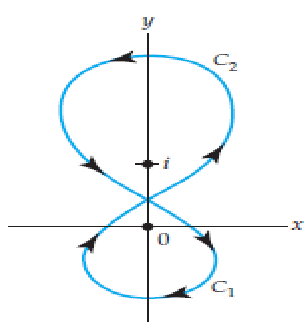
$$\acute{\acute{f}}(z_0 = 0) = \frac{2i-1}{4i}$$

بالمقارنة مع صيغة كوشي التكاملية ٢ للتفاضلات، نجد

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z^4+2iz^3)}dz = \frac{2\pi i}{2!}\acute{\acute{f}}(z_0 = 0) = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}$$

مثال ١٢: للمنحني C على شكل رقم 8 المبين في الشكل ادناه وباستخدام صيغة كوشي التكاملية للتفاضلات، جد

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$



الحل: على الرغم من انه ليس كنتور بسيطاً، الذي هو مكون من كنتورين مغلقين بسيطين $C1$ و $C2$ كما موضح في الشكل اعلاه. ان اتجاه $C1$ يكون باتجاه عقرب الساعة او بالاتجاه **السالب**.

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -\oint_{C1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}dz + \oint_{C2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}dz = -I1 + I2$$

__لحساب $I1$:__ هنا لدينا $z_0 = 0$ و $n = 0$،

$$f(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2} = \frac{z^3+3}{z^3-2iz-1}$$

لا وجود للمشتقة لان $n = 0$ لذلك كأنما نستخدم صيغة كوشي التكاملية،

$$f(z_0 = 0) = -3$$

$$I1 = \oint_{C1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}dz = 2\pi i f(z_0 = 0) = -6\pi i$$

__لحساب $I2$:__ هنا لدينا $z_0 = i$ و $n = 1$،

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z}$$

$$f'(z) = \frac{2z^3-3}{z^2}$$

$$f'(z_0 = i) = 3 + 2i$$

$$I2 = \oint_{C2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}dz = 2\pi i f'(z_0 = i) = -4\pi + 6\pi i$$

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -(-6\pi i) - 4\pi + 6\pi i = -4\pi + 12\pi i$$

تمارين

باستخدام صيغة كوشي التكاملية١، جد

1) $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz \qquad , C: |z-1| = 1$

2) $\oint_C \frac{z^2+1}{z(2z-1)}dz \qquad , C: |z| = 1$

3) $\oint_C \frac{cosz}{(z^2-6z+5)}dz \qquad , C: |z| = 4$

4) $\oint_C \frac{1}{z^2+4}dz \qquad , C: |z-i| = 2$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية٢ للتفاضلات، جد

5) $\oint_C \frac{z+1}{(z^4+4z^3)}dz \qquad , C: |z| = 1$

6) $\oint_C \frac{e^z}{z^3}dz \qquad , C: |z| = 1$

7) $\oint_C \frac{z+1}{z(z-1)(z-1)^3}dz \qquad , C: |z| = 1$

8) $\oint_C \frac{z^2+1}{(z-1)^3}dz \qquad , C: |z-1| = 1$