الفصل الرابع

تكامل الدوال المعقدة ونظرية كوشي

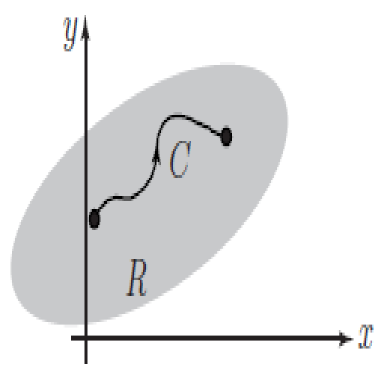
المحاضرة (١)

التكامل المعقد Complex integral

لتكن الدالة $f(z)$ دالة مستمرة عند كل نقاط المنحني C محدود الطول (انظر الشكل(١))، فأن التكامل الخطي (في متغير واحد) غير المحدد للدالة المعقدة $f(z)$ على مسار المنحني C او التكامل الخطي المحدد للدالة المعقدة $f(z)$ من a الى b على المنحني C يعطى بالعلاقة:

$$\int_C f(z)dz \qquad OR \qquad \int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a) \tag{4-1a}$$

حيث F ناتج التكامل.



الشكل (١)

في مثل الحالة اعلاه، يقال ان الدالة قابلة للتكامل على المنحني C. لاحظ انه اذا كانت $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المنطقة R واذا كان C يقع في R، فأن $f(z)$ تكون قابلة للتكامل على المنحني C.

مثال١: حساب التكامل $\int_1^i zdz$ يكون:

$$\int_1^i zdz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^i = \frac{1}{2}\{(i)^2 - (1)^2\} = -1$$

مثال٢: حساب التكامل $\int_1^i z^2dz$ يكون:

$$\int_1^i z^2dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^i = -\frac{1}{3}(1+i)$$

مثال٣: حساب التكامل $\int_1^i (z^2+z)\,dz$ يكون:

$$\int_1^i (z^2+z)\,dz = -\frac{4}{3} - \frac{i}{3}$$

لو كانت $f(z)$ دالة عقدية مستمرة ومعرفة في المنطقة R، بحيث $z(t) = x(t) + iy(t)$ وان $a \le t \le b$ و C تقع كليا في R وتكون $\acute{z}(t) = \acute{x}(t) + i\acute{y}(t)$ موجودة ومستمرة عند $a \le t \le b$.
وبالتالي يكون التكامل:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)\frac{dz}{dt}dt \qquad (4-1b)$$

مثال٤: جد قيمة التكامل $\int_C z^2dz$ على امتداد المسار C المعطى في $z(t) = t + it^2$ وان $0 \le t \le 1$.

الحل:

نعوض عن $z(t) = t + it^2$ و $dz = (1+2it)dt$، في التكامل

$$\int_C z^2dz = \int_0^1 \left(t+it^2\right)^2(1+2it)\,dt$$

لنبسط الكمية داخل التكامل:

$$\left(t+it^2\right)^2(1+2it) = (t^2 - 5t^4) + i(4t^3 - 2t^5)$$

وبالتالي:

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t^2 - 5t^4)\, dt + i \int_0^1 (4t^3 - 2t^5)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^5\right]_0^1 + i\left[t^4 - \frac{t^6}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(i-1)$$

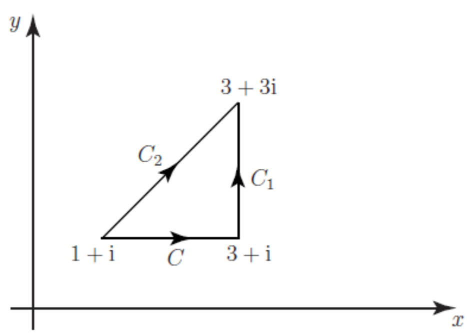
اما اذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$، فأن المعادلة $(4-1a)$ ، يمكن التعبير عنها بدلالة التكاملات الخطية للدوال الحقيقية:

$$.\ \int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) \qquad \Leftarrow, dz = dx + idy \qquad (4-1c)$$

يمكن فصل التكامل في المعادلة $(4-1c)$ إلى الأجزاء الحقيقية والخيالية كالتالي:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \qquad (4-2)$$

مثال٥: اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$، جد التكامل المعقد $\int_C zdz$ للمسارات الموضحة في الشكل (٢):



الشكل (٢)

الحل:

بالنسبة للمسار C ، نظرًا لأن قيمة y ثابتة $(y = 1)$ على طول المسار المحدد الموازي للمحور x ، فإن $z = x + 1i$، مما يعني أن $u = x$ و $v = 1$. أيضاً ، نظراً لأن y ثابتة ، فإن تفاضل الثابت $dy = 0$.
باستخدام $(2 - 4)$:

$$\int_C zdz = \int_1^3 xdx + i\int_1^3 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + i[x]_1^3 = 4 + 2i$$

بالنسبة للمسار $C1$، نظرًا لأن قيمة x ثابتة $(x = 3)$ على طول المسار المحدد الموازي للمحور y، فإن $z = 3 + iy$ ، مما يعني أن $u = 3$ و $v = y$. أيضاً، نظراً لأن x ثابتة ، ، فإن تفاضل الثابت $dx = 0$.
باستخدام $(2 - 4)$:

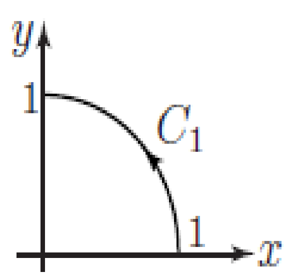
$$\int_{C1} zdz = \int_1^3 -ydy + i\int_1^3 3dy = \left[-\frac{y^2}{2}\right]_1^3 + i[3y]_1^3 = -4 + 6i$$

بالنسبة للمسار $C2$، يكون $x = y$ ، فإن $z = x + ix$ وان $dz = dx + idx$، مما يعني أن $u = x$ و $v = x$. أيضًا باستخدام $(2 - 4)$:

$$\int_{C2} f(z)dz = \int_1^3 (xdx - xdx) + i\int_1^3 (xdx + xdx) = 2i\int_1^3 xdx = 8i$$

مثال٦: اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$، جد التكامل $\int_{C1} z^2dz$ للحالات التالية:

الحالة الاولى: $C1$ جزء من محيط الدائرة الوحدة(r=1) في الربع الاول (الشكل ادناه)، هو المسار الذي يتجه عكس اتجاه عقارب الساعة من النقطة $z = 1$ إلى النقطة $z = i$.



الحل: بدلالة الاحداثيات المتعامدة يمكن كتابة z^2 بالشكل التالي:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$dz = dx + idy$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

باستخدام $(4-2)$:

$$\int_{z=1}^{z=i} z^2 dz = \int_{z=1}^{z=i} \big((x^2 - y^2)dx - 2xydy\big) + i\int_{z=1}^{z=i} (2xydx + (x^2 - y^2)dy) \qquad (4-3)$$

من الصعوبة حل هذه التكاملات لارتباط كل من x و y مع بعضها، بما ان C جزء من دائرة الوحدة فأن $z = e^{i\theta}$ وان $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، وبالتالي نعيد كتابة y و x بدلالة متغير واحد θ.

$$x = cos(\theta) \qquad , dx = -sin(\theta)d\theta$$

$$y = sin(\theta) \qquad , dy = cos(\theta)d\theta$$

يمكن ان نعبر عن $x^2 - y^2$ و $2xy$ بدلالة 2θ:

$$x^2 - y^2 = cos^2(\theta) - sin^2(\theta) = cos(2\theta)$$

و

$$2xy = 2cos(\theta)sin(\theta) = sin(2\theta)$$

الان، لنقطة مثل z تتحرك من $z = x = 1$ الى $z = y = i$ على طول المسار C ، فأن قيمة الزاوية المعقدة θ تتغير من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي:

$$\int_{z=1}^{z=i} z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-cos(2\theta)sin(\theta)d\theta - sin(2\theta)cos(\theta)d\theta)$$

$$+ i\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-sin(2\theta)sin(\theta)d\theta + cos(2\theta)cos(\theta)d\theta) \qquad (4-4)$$

يمكن تبسيط التكاملات اعلاه باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$cos2\theta \sin\theta + \sin 2\theta \cos\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin(3\theta)$$

$$cos2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos(3\theta)$$

وبالتالي المعادلة $(4-4)$ تصبح:

$$\int_C z^2 dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3\theta)\, d\theta + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3\theta)\, d\theta \qquad (4-5)$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cos(3\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + i\left[\frac{1}{3}\sin(3\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}(1+i)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في المثال٢.

الحالة الثانية: $C1$ يمثل كل محيط دائرة: هنا حدود التكامل في المعادلة $(4-5)$ هي من $\theta = 0$ الى $\theta = 2\pi$، وبالتالي فأن المعادلة $(4-5)$ بعد تغير حدود التكامل تصبح:

$$\int_C z^2 dz = -\int_0^{2\pi} \sin(3\theta)\, d\theta + i\int_0^{2\pi} \cos(3\theta)\, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cos(3\theta)\right]_0^{2\pi} + i\left[\frac{1}{3}\sin(3\theta)\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + i(0-0) = 0$$

تمارين

١) جد قيمة التكامل $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$ للحالات التالية:

١- عندما $x = 2t$ و $y = t^3 + 3$.

٢- لحالة خطين مستقيمين، الاول من النقطة $(0,3)$ و $(2,3)$ والثاني $(2,3)$ الى $(2,4)$.

٣- لحالة الخط المستقيم $(0,3)$ الى $(2,4)$.

ب) جد قيمة التكامل $\int_C \bar{z}dz$ من $z = 0$ الى $z = 4 + 2i$ على المنحني C المعطى بالحالات التالية:

١- $z = t^2 + it$.

٢- من $z = 0$ الى $z = 2i$ ومن $z = 2i$ الى $z = 4 + 2i$.

ج) اذا علمت بأن $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ، جد التكامل $\int_{C1} z^2 dz$ حيث ان $C1$ هو خط مستقيم يصل نقطة الاصل O بنقطة $P(2,1)$ في المستوي المعقد.

خواص التكاملات

اذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دالتين قابلتين للتكامل على C فأن:

$$a)\quad \int_C \{f(z) + g(z)\}dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$$

$$b)\quad \int_C Af(z)dz = A\int_C f(z)dz \qquad ,A{:}\, constant$$

$$c)\quad \int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$$

$$d)\quad \int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz$$

تكاملات خاصة مع حذف ثابت التكامل

1. $\int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

2. $\int \frac{dz}{z} = \ln z$

3. $\int e^z\,dz = e^z$

4. $\int a^z\,dz = \frac{a^z}{\ln a}$

5. $\int \sin z\,dz = -\cos z$

6. $\int \cos z\,dz = \sin z$

7. $\int \tan z\,dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$

8. $\int \cot z\,dz = \ln \sin z$

9. $\int \sec z\,dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln \tan(z/2 + \pi/4)$

10. $\int \csc z\,dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan(z/2)$

11. $\int \sec^2 z\,dz = \tan z$

12. $\int \csc^2 z\,dz = -\cot z$

13. $\int \sec z \tan z\,dz = \sec z$

14. $\int \csc z \cot z\,dz = -\csc z$

15. $\int \sinh z\,dz = \cosh z$

16. $\int \cosh z\,dz = \sinh z$

17. $\int \tanh z\,dz = \ln \cosh z$

18. $\int \coth z\,dz = \ln \sinh z$

19. $\int \operatorname{sech} z\,dz = \tan^{-1}(\sinh z)$

20. $\int \operatorname{csch} z\,dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$

21. $\int \operatorname{sech}^2 z\,dz = \tanh z$

22. $\int \operatorname{csch}^2 z\,dz = -\coth z$

23. $\int \operatorname{sech} z \tanh z\,dz = -\operatorname{sech} z$

24. $\int \operatorname{csch} z \coth z\,dz = -\operatorname{csch} z$

25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$

26. $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} \quad \text{or} \quad -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{z}{a}$

27. $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\frac{z}{a} \quad \text{or} \quad -\cos^{-1}\frac{z}{a}$

29. $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$

30. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z} \quad \text{or} \quad \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{z}{a}$

31. $\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$

32. $\int \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$

33. $\int e^{ax}\sin bz\,dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$

34. $\int e^{ax}\cos bz\,dz = \frac{e^{ax}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2 + b^2}$